أسئلة

س 3 فصل 371

(1) f دالة لها مشتقات جزئية من كل رتبة وبالتالي:

(x,y) نقطة حرجة للدالة f إذا وفقط إذا

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-6=0 \\ 2y+6=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$$

إذن $(3,-3)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f

(2) و(4) لدينا: $h(x,y)=f(x,y)-f(3,-3)$

$$= x^2-6x+y^2+6y-(-18)$$

$$=(x^2-6x+9)+(y^2+6y+9)$$

$$=(x-3)^2+(y+3)^2$$

وبالتالي $a=3$, $b=-3$

$$f(x,y)=x^2-6x+y^2+6y$$

(3) لدينا: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2$

إذن $g(x,y)=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2\right](x,y)$

$= 4 > 0$

و

إذن $g(3,-3)=4>0$

وبما أن $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,-3)=2>0$

إذن $f(3,-3)=-18$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f عند النقطة $(3,-3)$

(5) بما أن لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$f(x,y)-f(3,-3)=(x-3)^2+(y+3)^2 \geq 0$

إذن $f(x,y)\geq f(3,-3)$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

إذن $f(3,-3)=-18$ هي قيمة صغرى مطلقة للدالة f عند النقطة $(3,-3)$.

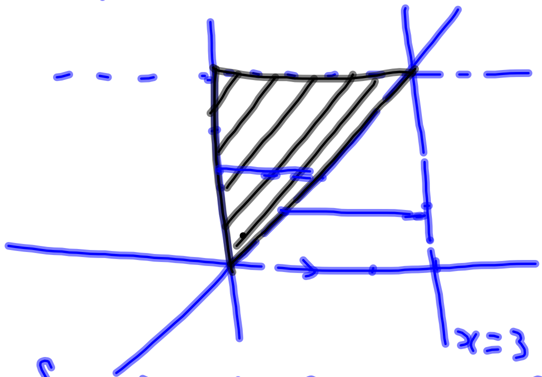
س: احسب التكامل :

$$I = \iint_R \frac{x}{y^3+4}\, dy\, dx$$

حيث $R = \{(x,y) : 0 \le x \le 3,\ x \le y \le 3\}$

الحل :

$R = R_x = \{(x,y) : 0 \le x \le 3,\ x \le y \le 3\}$



$R_y = \{(x,y) : 0 \le y \le 3,\ 0 \le x \le y\}$

$$I = \iint_{R_y} \frac{x}{y^3+4}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^y \frac{x}{y^3+4}\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^3 \left[\frac{x^2}{2(y^3+4)} \right]_0^y dy = \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{3y^2}{2(y^3+4)}\, dy$$

$$= \frac{1}{6} \ln|y^3+4| \Big]_0^3$$

$$I = \frac{1}{6}\left(\ln(31) - \ln(4)\right) = \boxed{\frac{1}{6}\ln\left(\frac{31}{4}\right) = I}$$

س:

$$f(x,y)=x^4+y^3$$

النقاط الحرجة والقيم القصوى المحلية إن وجدت، وهل هي قيم مطلقة:

الحل: الدالة f لها مشتقات من الرتبة 2 ومتصلة عند كل نقطة:

النقاط الحرجة: (x,y) نقطة حرجة إذا وفقط إذا كان

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x^3=0 \\ 3y^2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

بأن $(0,0)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة.

القيم القصوى والنقاط الحرجة:

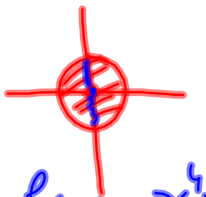
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6y$$

$$g(x,y)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right)(x,y) = 72x^2y$$

$$g(0,0)=0$$

يفشل الإختبار



$$f(x,y)-f(0,0)=x^4+y^3-0 \begin{cases} >0 \ ; \ y>0 \\ <0 \ , \ y<0 \end{cases}$$

بأن النقطة $(0,0)$ هي نقطة سرجية