

فضاءات الضرب الداخلي

جامعة الملك سعود

4 أكتوبر 2017

تعريف الضرب الداخلي

تعريف

ليكن V فضاء متجهات على \mathbb{R} .

نقول أن الدالة $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ هي ضرب داخلي على V إذا تحقق كل ما يلي لكل

$$\alpha \in \mathbb{R}, u, v, w \in V$$

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad 1$$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad 2$$

$$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \quad 3$$

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \quad 4$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0 \quad 5$$

1 الضرب الداخلي المعتاد على \mathbb{R}^n معرف كما يلي:
إذا كان $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_n)$ و $v = (v_1, \dots, v_n)$,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^n u_j v_j = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

2 إذا كان $E = C([0, 1])$ فضاء الدوال المتصلة على $[0, 1]$. لكل $f, g \in E$,
نعرف الضرب الداخلي على E كما يلي:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t).$$

إذا كان $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء ضرب داخلي وإذا كان $u, v, w, x \in E, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ فإن

$$\langle u + v, w + x \rangle = \langle u, w \rangle + \langle u, x \rangle + \langle v, w \rangle + \langle v, x \rangle.$$

المثال الأول

ليكن $u = (x, y)$ و $v = (a, b)$ ، نعرف

$$\langle u, v \rangle = 2ax + by - bx - ay$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ تمثل ضربا داخليا في \mathbb{R}^2 .

يكفي أن نثبت أن $\langle u, u \rangle \geq 0$ و $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$.

$$\langle u, u \rangle = 2x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 + x^2 \geq 0$$

و $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$.

المثال الثاني

ليكن $u = (x, y, z)$ و $v = (a, b, c)$ ، نعرف

$$\langle u, v \rangle = 2ax + by + 3cz - bx - ay + cy + bz$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ تمثل ضربا داخليا في \mathbb{R}^3 .

يكفي أن نثبت أن $\langle u, u \rangle \geq 0$ و $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$.

$$\begin{aligned}\langle u, u \rangle &= (y + z - x)^2 - (z - x)^2 + 2x^2 + 3z^2 \\ &= (y + z - x)^2 + (x + z)^2 + z^2 \geq 0\end{aligned}$$

المثال الثالث

ليكن $u = (x, y, z)$ و $v = (a, b, c)$ ، نعرف

$$\langle u, v \rangle = 2ax + by + cz - bx - ay + cy + bz$$

\langle , \rangle لا تمثل ضربا داخليا في \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned}\langle u, u \rangle &= (y + z - x)^2 - (z - x)^2 + 2x^2 + z^2 \\ &= (y + z - x)^2 + x^2 + 2xz \\ &= (y + z - x)^2 + (x + z)^2 - z^2.\end{aligned}$$

المثال الرابع

إذا كانت مصفوفة $A = (a_{j,k}) \in M_n(\mathbb{R})$, نعرف

$$\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{j,j}$$

و

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$$

لكل $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
 $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle$ تمثل ضربا داخليا على الفضاء $M_n(\mathbb{R})$.

تمرين

إذا كان $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$, نعرف الدوال التالية
 $f, g, h, k: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(u, v) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2x_3 y_3 + x_2 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_3 + y_2 x_3 \quad 1$$

$$g(u, v) = x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + 3x_1 y_3 + 3x_3 y_1. \quad 2$$

$$h(u, v) = \quad 3$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_3 + y_2 x_3 + x_3 y_1 + x_1 y_3.$$

$$k(u, v) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_1 y_3 + y_1 x_3. \quad 4$$

حدد من الدوال f, g, h, k من تمثّل ضرباً داخلياً في \mathbb{R}^3 .

$$f(u, v) - f(v, u) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad \text{إذاً } f \text{ لا تمثل ضربا داخليا في } \mathbb{R}^3. \quad 1$$

$$g(u, u) = 2x_1 x_2 + 2x_2 x_3 + 6x_1 x_3 = 2(x_1 + x_3)(x_2 + 3x_3) - 6x_3^2 \\ = (x_1 + x_2 + 4x_3)^2 - (x_1 - x_2 - 2x_3)^2 - 6x_3^2 \quad \text{إذاً } g \text{ لا تمثل ضربا داخليا في } \mathbb{R}^3. \quad 2$$

3

$$h(u, u) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2 x_3 + 2x_1 x_3 \\ = (x_1 + x_2 + x_3)^2$$

إذاً h لا تمثل ضربا داخليا في \mathbb{R}^3 لأن

$$h(u, u) = 0 \not\Rightarrow u = 0.$$

4

$$\begin{aligned}k(u, u) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

إذاً k لا تمثل ضربا داخليا في \mathbb{R}^3 لأن

$$k(u, u) = 0 \not\Rightarrow u = 0.$$

مثال

أوجد قيم a, b حتى يكون

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + a x_1 y_2 + b x_2 y_1$$

ضربا داخليا في \mathbb{R}^2 .

حتى يكون $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2) \rangle$ لا بد أن يكون $a = b$.

$$\begin{aligned}\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle &= x_1^2 + x_2^2 + 2ax_1x_2 \\ &= (x_1 + ax_2)^2 + x_2^2(1 - a^2).\end{aligned}$$

إذا $\langle \cdot, \cdot \rangle$ تمثل ضربا داخليا في \mathbb{R}^2 إلا و إذا كان $|a| < 1$.

تعريف

ليكن $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء ضرب داخلي.

1 إذا كان $u \in E$, نعرف طول أو معيار المتجه بما يلي:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

2 إذا كان $u, v \in E$, نعرف المسافة بين u و v بما يلي:

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

3 و نعرف الزاوية $0 \leq \theta \leq \pi$ بين متجهين $u, v \in E$ بما يلي:

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

ليكن الفضاء الضرب الداخلي $(M_2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ المعروف بما يلي

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T).$$

أوجد $\cos \theta$ إذا كانت θ هي الزاوية بين المصفوفتين

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\|B\|^2 = 7, \|A\|^2 = 12, AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

إذا

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

مبرهنة (متباينة كوشي شوارتز)

إذا كان $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء ضرب داخلي و $u, v \in E$ إذا

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

ولا تكون المساوات إلا إذا كان المتجهين u, v مرتبطين خطيا.

لتكن كثيرة الحدود التالية

$$Q(t) = \|u + tv\|^2 = \|u\|^2 + 2t\langle u, v \rangle + t^2\|v\|^2.$$

بما أن $Q(t) \geq 0$ لكل $t \in \mathbb{R}$, إذا مميز $Q(t)$ يكون سالبا، أي

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2.$$

و هذا هو المطلوب.

إذا كان $\|u\|\|v\| = |\langle u, v \rangle|$, فهذا يعني أن المميز يساوي صفر. إذا يوجد $t \in \mathbb{R}$ بحيث $Q(t) = 0$. إذا المتجهين u, v مرتبطين خطيا.

مبرهنة

إذا كان $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ و $u, v \in E$ إذا

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

البرهان

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

تعريف

إذا كان $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء ضرب داخلي. نقول أن متجهين $u, v \in E$ متعامدين و نكتب $u \perp v$ إذا كان $\langle u, v \rangle = 0$.

مبرهنة (قاعدة بيتاغورس)

إذا كان $u \perp v$ فإن

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

البرهان

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

تعريف

إذا كان $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء ضرب داخلي. نقول أن مجموعة $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ من المتجهات الغير صفرية متعامدة إذا كان

$$\langle e_j, e_k \rangle = 0, \quad \forall 1 \leq j \neq k \leq n.$$

و نقول أنها عيارية إذا كان

$$\|e_j\| = 1, \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

و نقول أنها عيارية و متعامدة إذا كان

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{j,k}, \quad \forall 1 \leq j, k \leq n.$$

($\delta_{j,k} = 0$ إذا كان $j \neq k$ و $\delta_{j,j} = 1$)

مبرهنة

كل مجموعة متعامدة و لا تحتوي على المتجه الصفري هي مستقلة خطيا.

مبرهنة

إذا كان $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء ضرب داخلي و إذا كانت $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ أساسا عياريا و متعامدا و إذا كان $u \in E$ فإن

$$u = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle e_n.$$

$$\langle u, e_k \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \langle e_j, e_k \rangle = a_k \text{ فإن } u = \sum_{j=1}^n a_j e_j \text{ إذا كان}$$

مبرهنة

إذا كان $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء ضرب داخلي و (v_1, \dots, v_n) مجموعة مستقلة خطيا في E
توجد مجموعة وحيدة عيارية و متعامدة (e_1, \dots, e_n) بحيث

$$\text{لكل } k \in \{1, \dots, n\}$$

1

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k),$$

$$\text{لكل } k \in \{1, \dots, n\}$$

2

$$\langle e_k, v_k \rangle > 0.$$

البرهان

نبحث في الأول على مجموعة متعامدة (u_1, \dots, u_n) كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \frac{\langle u_1, v_2 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\ &\vdots \\ u_n &= v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_i, v_n \rangle}{\|u_i\|^2} u_i. \end{cases}$$

نتحصل على المجموعة (e_1, \dots, e_n) من المجموعة (u_1, \dots, u_n) كما يلي:

$$e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

ليكن الفضاء الجزئي F من \mathbb{R}^4 المولد بالمتجهات

$$S = \{u = (1, 1, 0, 0), v = (1, 0, -1, 0), w = (0, 0, 1, 1)\}.$$

1 أثبت أن S هو أساس للفضاء الجزئي F .

2 أوجد أساسا عياريا متعامدا للفضاء الجزئي F باستعمال خوارزمية جرام شميد. (حيث الضرب الداخلي هو الضرب الإقليدي).

$$1 \quad \text{لتكن } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ والتي أعمدتها } u, v, w.$$

$$\text{الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة } A \text{ هي } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ وهذا يبين}$$

أن S هو أساس للفضاء الجزئي F .

$$2 \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2, 0), u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$$

$$.u_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(1, -1, 1, 3)$$

$\{u_1, u_2, u_3\}$ هو أساس عياري متعامد للفضاء الجزئي F

1 أثبت أن $\langle (a, b), (x, y) \rangle = ax + ay + bx + 2by$ تمثل ضربا داخليا في \mathbb{R}^2 .

2 استعمل طريقة جرام شميت لتحويل الأساس $\{u_1 = (1, -1), u_2 = (1, 2)\}$ إلى أساس عياري و متعامد.

- $\langle (a, b) + (c, d), (x, y) \rangle = (a + c)x + (a + c)y + (b + d)x + 2(b + d)y = \langle (a, b), (x, y) \rangle + \langle (c, d), (x, y) \rangle$ **1**
 - $\langle (a, b), (x, y) \rangle = ax + ay + bx + 2by = \langle (x, y), (a, b) \rangle$
 - $\langle \lambda(a, b), (x, y) \rangle = \lambda ax + \lambda ay + \lambda bx + 2\lambda by = \lambda \langle (a, b), (x, y) \rangle$
 - $\langle (a, b), (a, b) \rangle = a^2 + 2ab + 2b^2 = (a + b)^2 + b^2 \geq 0$
 - $\langle (a, b), (a, b) \rangle = 0 \iff a + b = 0 = b \iff a = b = 0$
- المتجه u_1 عياري والمتجه الثاني هو $v_2 = (1, 0)$ إذا **2**
- $\{v_1 = (1, -1), v_2 = (1, 0)\}$ هو أساس عياري و متعامد.

$$S = \{u_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, u_4 = \text{تكن} \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{أساسا للفضاء } M_2(\mathbb{R}).$$

سنستعمل طريقة جرام شميت لتحويل الأساس S إلى أساس عياري و متعامد.

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
$$\langle u_2, v_1 \rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\langle u_3, v_2 \rangle = \frac{3}{\sqrt{15}}, \langle u_3, v_1 \rangle = \sqrt{3}$$

$$u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\langle u_4, v_3 \rangle = \frac{4}{\sqrt{35}}, \langle u_4, v_2 \rangle = \frac{6}{\sqrt{15}}, \langle u_4, v_1 \rangle = 0$$

$$u_4 - \langle u_4, v_1 \rangle v_1 - \langle u_4, v_2 \rangle v_2 - \langle u_4, v_3 \rangle v_3 = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} -10 & -39 \\ -29 & -29 \end{pmatrix}.$$

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

تمرين

ليكن الفضاء الجزئي F من الفضاء الإقليدي \mathbb{R}^4 المولد بالمتجهات التالية
 $u_1 = (1, 2, 0, 2), u_2 = (-1, 1, 1, 1)$.

أوجد أساسا عياريا متعامدا للفضاء F باستعمال خوارزمية جرام شميدت. 1

أثبت أن المجموعة التالية 2

$F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^4 : \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in F\}$ تمثل فضاءا جزئيا من \mathbb{R}^4 .
أوجد أساسا عياريا متعامدا للفضاء F^\perp . 3

$$\langle u_2, v_1 \rangle = 1, v_1 = \frac{1}{3} u_1 \quad 1$$

$$u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = (0, 3, 1, -1) - \frac{1}{3}(-1, 1, 1, 1) = \\ .v_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-4, 1, 3, 1) \text{ إذا } \frac{1}{3}(-4, 1, 3, 1). \\ .F \text{ تمثل أساسا عياريا متعامدا للفضاء } F.$$

2 إذا كان $u \in F$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, v_1, v_2 \in F^\perp$ فإن

$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2, u \rangle = \alpha \langle v_1, u \rangle + \beta \langle v_2, u \rangle = 0.$$

3 إذا المجموعة التالية F^\perp تمثل فضاءا جزئيا من \mathbb{R}^4 .

$$.u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ ليكن}$$

$$u \in F^\perp \iff \begin{cases} \langle u, u_1 \rangle = 0 \\ \langle u, u_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 2t = 0 \\ -x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 2t = 0 \\ -x + y + z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2}{3}z \\ y = -\frac{z}{3} - t \end{cases}$$

إذاً $u \in F^\perp \iff u = -\frac{z}{3}(-2, 1, -3, 0) + t(0, -1, 0, 1)$
 المتجهين $e_1 = (-2, 1, -3, 0)$, $e_2 = (0, -1, 0, 1)$ أساسا للفضاء F^\perp .
 $\langle w_1, e_2 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{14}}$, $w_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} e_1$
 $e_2 - \langle e_2, w_1 \rangle w_1 = \frac{1}{14}(2, 13, 3, 14)$
 إذاً $(\frac{1}{\sqrt{14}}(-2, 1, -3, 0), \frac{1}{3\sqrt{42}}(2, 13, 3, 14))$ تمثل أساسا عياريا متعامدا للفضاء F^\perp .