متسلسلة تايلور Taylor Series

لقد بينا أن

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} \quad \text{لكل} \quad x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{لكل} \quad -1 < x < 1 \qquad (2)$$

$$\tan^{-1} x = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{لكل} \quad -1 < x < 1 \qquad (3)$$

في الحالات الثلاث، نقول أن لدينا متسلسلة قوى تمثل الدالة المعطاة. بشكل أعم إذا كانت f دالة، و I فترة مفتوحة تحتوي 0 ، وكانت $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ لكل x في I

مبرهنة1

لتكن $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ **متسلسلة قوى بنصف قطر تقارب** $r > 0$ **. ولتكن**

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n \qquad (\mathbf{1})$$

لكل $-r < x < r$ **. فإن f لها مشتقات من جميع الرتب على الفترة** $(-r, r)$ **، و**

$$f^{(n)}(0) = n! a_n \qquad (\mathbf{2})$$

لكل $n \geq 0$ **. ونتيجة لذلك**

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad (\mathbf{3})$$

مبرهنة 2

لتكن $\sum_{n=0}^\infty a_n (x-c)^n$ **متسلسلة قوى بنصف قطر تقارب** $r > 0$ **. ولتكن**

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n (x-c)^n \qquad (\mathbf{4})$$

لكل $c - r < x < c + r$ **. فإن f لها مشتقات من جميع الرتب على الفترة** $(c-r, c+r)$ **، و**

$$f^{(n)}(c) = n! a_n \qquad (\mathbf{5})$$

لكل $n \geq 0$ **. ونتيجة لذلك**

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n \qquad (\mathbf{6})$$

تعريف1:

إذا كانت f دالة لها مشتقات من جميع الرتب عند c. فإن متسلسلة تايلور للدالة f عند c هي متسلسلة القوى

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$

لاحظ أنه عندما $c = 0$ **نحصل على متسلسلة ماكلورين كحالة خاصة لمتسلسلة تايلور.**

مثال1

لتكن f دالة معرفة كما يلي

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$$

أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة f، واثبت أنها متقاربة لجميع قيم x ولكنها تمثل الدالة فقط عند $x=0$.

الحل:

لإيجاد المشتقة نستخدم تعريف المشتقة

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x^2}}$$

استخدام قاعدة لوبيتال، ينتج أن $f'(0)=0$. بالطريقة نفسها، أي باستخدام تعريف المشتقة وقاعدة لوبيتال نحصل على أن جميع المشتقات تساوي صفرا. أي $f^{(n)}(0)=0$ لكل n. وبالتالي فإن متسلسلة ماكلورين للدالة هي $0+0+0+0+\cdots+0+\cdots$ وهذه المتسلسلة متقاربة للصفر لكل x؛ ولكن، إذا كان $x\neq 0$ ، فإن $f(x)=e^{-1/x^2}$ و $e^{-1/x^2}\neq 0$.

النظرية التالية تعطينا الشرط الضروري والكافي لوجود متسلسلة تايلور تمثل الدالة.

مبرهنة 3 (تايلور)

لتكن f دالة بحيث أن f ومشتقاتها من جميع الرتب موجودة على فترة مفتوحة $(c-r,c+r)$.

فإن f تمثل بمتسلسلة تايلور

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

لكل x بحيث أن $|x-c|<r$ إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(z_x)}{n+1!}(x-c)^{n+1}=0$$

حيث z_x تقع بين c و x .

مثال2

اثبت أن $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots+\frac{x^2}{n!}+x+1= e^x$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

الحل:

إذا كانت $f(x)=e^{x}$ فإن $f^{(n)}(x)=e^{x}$ لكل x، وبالتالي $f^{(n)}(0)=1$ لكل n. لذلك ومن (3) فإن متسلسلة ماكلورين هي

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+\cdots$$

نثبت الآن أن هذه المتسلسلة تتقارب من e^{x} لكل x. أي يجب إثبات أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ لكل x. هناك ثلاث حالات: $x>0$ و $x<0$ و $x=0$.

إذا كان $x>0$، فإن $0<z_x<x$، وبالتالي $e^{z_x}<e^{x}$.

لذلك
$$0<\frac{e^{z_x}}{(n+1)!}x^{n+1}<e^{x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

ينتج أن $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$ ، وبالتالي $\lim_{n\to\infty} e^{x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$

من خلال نظرية الحصر، ينتج أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty} e^{z_x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$.

إذا كان $x<0$ ، فإن $x<z_x<0$ ، وبالتالي $0<e^{z_x}<1$. نتيجة لذلك

$$0<\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{e^{z_x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=0$ ، نستنتج أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

أخيرا إذا كان $x=0$ ، فإن المتسلسلة لها المجموع 1، وهو e^{0}. أي أن المتسلسلة تتقارب من الدالة e^{x} لكل $x\in\mathbb{R}$.

مثال 3

اثبت أن $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

الحل:

لتكن $f(x)=\sin x$ فإن مشتقات f تتكرر في مجموعات رباعية:

$$f(x)=\sin x \qquad f(0)=0$$
$$f^{(1)}(x)=\cos x \qquad f^{(1)}(0)=1$$
$$f^{(2)}(x)=-\sin x \qquad f^{(2)}(0)=0$$
$$f^{(3)}(x)=-\cos x \qquad f^{(3)}(0)=-1$$

$$f^{(4)}(x)=\sin x \qquad f^{(4)}(0)=0$$
$$f^{(5)}(x)=\cos x \qquad f^{(5)}(0)=1$$
$$f^{(6)}(x)=-\sin x \qquad f^{(6)}(0)=0$$
$$f^{(7)}(x)=-\cos x \qquad f^{(7)}(0)=-1$$
$$f^{(8)}(x)=\sin x \qquad f^{(8)}(0)=0$$

وهكذا، تتضمن المشتقات الزوجية دالة $\sin x$ بينما تتضمن المشتقات الفردية دالة $\cos x$. بالتحديد لكل عدد صحيح غير سالب k، $f^{2k}(x)=(-1)^k\sin x$ و $f^{2k+1}(x)=(-1)^k\cos x$
وبالتالي $f^{2k}(0)=0$ و $f^{2k+1}(0)=(-1)^k$

وبما أن $f^{2k}(0)=0$ ، فإن جميع معاملات قوى x الزوجية في متسلسلة ماكلورين للدالة $\sin x$ تساوي صفرا. لذلك نحذف القوى الزوجية ونكتب متسلسلة تايلور للدالة $\sin x$ كما يلي:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

ولإثبات أن متسلسلة ماكلورين تتقارب من $\sin x$ لكل x، نثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ لكل x. نستنتج أن $\left|f^{2n+1}(z_x)\right|\le 1$، بغض النظر عن العدد الصحيح n أو الأعداد x و z_x ،

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{f^{n+1}(z_x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ينتج أن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ لكل x. من المبرهنة فإن متسلسلة ماكلورين لدالة sin تتقارب من $\sin x$ لكل x. بنفس أسلوب يمكن إثبات أن

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \text{ لكل } x\in\mathbb{R}.$$

مثال4

أوجد متسلسلة تايلور للدالة $\sin x$ عند $\pi/6$. ثم اثبت أنها تتقارب من $\sin x$ لكل x.

الحل:

لتكن $f(x)=\sin x$. هنا نرغب كتابة $f(x)$ كما في المبرهنة 3، حيث $c=\pi/6$. مشتقات f هي:

$$f(x)=\sin x \qquad f(\pi/6)=\tfrac{1}{2}$$
$$f^{(1)}(x)=\cos x \qquad f^{(1)}(\pi/6)=\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$f^{(2)}(x)=-\sin x \qquad f^{(2)}(\pi/6)=\tfrac{-1}{2}$$
$$f^{(3)}(x)=-\cos x \qquad f^{(3)}(\pi/6)=-\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$f^{(4)}(x)=\sin x \qquad f^{(4)}(\pi/6)=\tfrac{1}{2}$$

هذا النمط يتكرر رباعيا وبشكل غير منته. وبالتالي فإن متسلسلة تايلور لدالة $\sin x$ هي:

$$\frac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}(x-\pi/6)-\tfrac{1}{2(2!)}(x-\pi/6)^2-\tfrac{\sqrt{3}}{2(3!)}(x-\pi/6)^3+\dots$$

الحد النوني u_n لهذه المتسلسلة هو:

$$u_n=\begin{cases}(-1)^{n/2}\dfrac{1}{2(n)!}(x-\pi/6)^n & ;\ n=0,2,4,6,\dots\\ (-1)^{(n-1)/2}\dfrac{\sqrt{3}}{2(n)!}(x-\pi/6)^n & ;\ n=1,3,5,7,\dots\end{cases}$$

لإثبات أن هذه المتسلسلة تتقارب من $\sin x$ لكل x، نثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

بما أن $f^{(4)}(x)=f(x)$ ، نستنتج أن

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{n+1}(z_x)}{(n+1)!}(x-\pi/6)^{n+1}\right|\le\frac{|x-\pi/6|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ينتج أن $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x-\pi/6|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ لكل x. من المبرهنة فإن متسلسلة تايلور لدالة $\sin$ تتقارب من $\sin x$ لكل x.

من المبرهنة فإن الدالة f لها متسلسلة ماكلورين $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

شريطة أن تكون مشتقاتها موجودة عند 0 وبالتالي معرفة على فترة مفتوحة تحتوي 0. بما أن $\ln x$ غير معرفة على فترة مفتوحة تحتوي 0، فإن $\ln x$ لا يوجد لها متسلسلة ماكلورين على الصيغة المعطاة بالمعادلة .

لقد أثبتنا أن $\ln(1+x)=\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ لكل $-1<x<1$

إذا كان $0<x<2$، فإن $-1<x-1<1$، لذلك نجد أن

$\ln x=\ln(1+(x-1))=\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}$ لكل $0<x<2$.

وبذلك نكون قد أوجدنا متسلسلة تايلور للدالة $\ln x$ كقوى في $(x-1)$.

مثال5

أوجد متسلسلة تايلور للدالة e^x عند c.

الحل:

نكتب e^x على الصيغة $e^x = e^c e^{x-c}$، وبالتالي

$$e^x = e^c\left[1+(x-c)+\frac{(x-c)^2}{n!}+\cdots+\frac{(x-c)^n}{n!}+\cdots\right] = e^c\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-c)^n}{n!}\right]$$

مثال6

أوجد متسلسلة تايلور للدالة $\ln x$ عند c ($c>0$).

الحل:

نكتب $\ln x = \ln[c+(x-c)] = \ln c + \ln\left(1+\frac{x-c}{c}\right)$

لقدأثبتنا سابقا أن : $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ لكل $-1<x<1$

ومنه : $\ln\left(1+\frac{x-c}{c}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)c^{n+1}}(x-c)^{n+1}$

وبالتالي : $\ln x = \ln c + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)c^{n+1}}(x-c)^{n+1}$

وهذه المتسلسلة تمثل $\ln x$ لكل $0<x\le 2c$.

فترة التقارب	متسلسلة ماكلورين
$(-\infty,\infty)$	$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
$(-\infty,\infty)$	$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$
$(-\infty,\infty)$	
$(-1,1]$	$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$
$[-1,1]$	$\tan^{-1}x = x-\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$
	$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$(-\infty,\infty)$	$\sinh x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$