تمثيل الدوال بمتسلسلات القوى Power Series Representations of Functions

تحدد متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دالة f نطاقها فترة تقارب المتسلسلة . لكل x في فترة تقارب المتسلسلة نعرف الدالة $f(x)$ بأنها $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

ويقال في هذه الحالة أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تمثل الدالة f ، أو أن الدالة f مثلت بمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

مثال1

أوجد الدالة الممثلة بمتسلسلة القوى : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$

الحل:

إذا كانت $|x| < 1$ ، فمن نظرية المتسلسلة الهندسية المعطاة متقاربة ومجموعها

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$$

وبالتالي

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (1)$$

أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ تمثل الدالة $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ في الفترة $(-1,1)$

يمكن استخدام متسلسلة القوى في (1) للحصول على متسلسلات قوى يمكن تحديد مجموعها. بوضع $-x$ بدلا من x في (1) نحصل على

$$|x| < 1, \ \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad (2)$$

بوضع x^2 بدلا من x في (1) نحصل على

$$|x| < 1 , \ \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \qquad (3)$$

إذا وضعنا $-x^2$ عوضا عن x ، ينتج

$$|x| < 1 , \ \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad (4)$$

مثال2

أوجد متسلسلة القوى التي تمثل الدالة $f(x) = \dfrac{5}{3-7x}$.

الحل:

نكتب $f(x)$ على الصيغة : $f(x)=\dfrac{5}{3-7x}=\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1}{1-(7/3)x}\right)$

نضع $(7/3)x$ بدلا من x في (1) نحصل على

$$f(x)=\frac{5}{3-7x}=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{1-(7/3)x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3}\left((7/3)x\right)^n \text{ ، } |x|<3/7 .$$

مبرهنة1 (نظرية الاشتقاق لمتسلسلات القوى)

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ متسلسلة قوى ذات نصف قطر تقارب $r>0$. ولتكن $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ لكل x في فترة تقارب المتسلسلة . فإن

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_nx^n)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

لكل $|x|<r$. وأكثر من ذلك فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ لها نفس نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

مثال3

اثبت أن
$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

الحل:

نعلم أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ متقاربة لكل x . من نظرية الاشتقاق فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}$ متقاربة لكل x وأن

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

نعرف f بأنها $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ لكل x وبما أن $f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0^n}{n!}=1$. نستنتج أن $f(x)=e^x$ لكل x . ومنه

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad (*)$$

وهذا يعني أننا أوجدنا صيغة للدالة e^x كمتسلسلة قوى ، كما نوهنا في بداية هذا الفصل.

لاحظ أن (*) تمكننا من التعبير عن العدد e كمجموع لمتسلسلة قوى متقاربة ذات حدود موجبة. أي
$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots:$$

أيضا يمكننا استخدام (*) للحصول على تمثيل لبعض الدوال بمتسلسلات قوى ، نورد بعضا منها

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

بجمع الحدود المتناظرة للمتسلسلتين e^x و e^{-x} نحصل على

$$e^x + e^{-x} = 2 + 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^4}{4!} + \cdots + 2\frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots$$

ومنه نحصل على متسلسلة قوى تمثل الدالة $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^x)$، أي

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

أيضا نستطيع أن نجد متسلسلة قوى تمثل الدالة $\sinh x$ إما باستخدام الصيغة $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$، أو باشتقاق حدود متسلسلة $\cosh x$. فنجد أن: $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

مثال4

أوجد متسلسلة القوى التي تمثل الدالة $f(x) = xe^{-2x}$.

الحل:

نضع $-2x$ بدلا من x في (*) نحصل على: $e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{x^n}{n!}$

بضرب الطرفين بـ x نحصل على : $xe^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{x^{n+1}}{n!}$

مبرهنة 2 (التكامل لمتسلسلات القوى)

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة قوى بنصف قطر تقارب $r > 0$. ولتكن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

لكل x في فترة تقارب المتسلسلة. فإن

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt\right) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

لكل $-r < x < r$. وأكثر من ذلك فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$ لها نفس نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

تعتبر هذه النظرية أداة قيمة لأنها تمكننا من تمثيل العديد من الدوال بمتسلسلات قوى.

مثال5

اثبت أن

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

لكل $-1 < x < 1$.

الحل:

نعلم أن
$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$$

إذا كانت $|t| < 1$ فإن $|t^2| < 1$. وبالتالي يمكننا التعويض بـ t^2 بدلا من t نحصل على

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$$ لكل $|t| < 1$.

من نظرية التكامل للمتسلسلات فإن

$$\tan^{-1}x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$ لكل $|x| < 1$.

يمكن إثبات أن هذه المتسلسلة متقاربة أيضا عندما $x = \pm 1$.

بوضع $x = 1$ نحصل على الصيغة التالية لقيمة $\pi/4$

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

مثال6

اثبت أن

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

لكل x ، حيث $|x| < 1$.

الحل:

إذا كانت $|x| < 1$ فإن

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right] dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

لكل x ، حيث $|x| < 1$.

مثال7

لتكن g دالة معرفة

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{e^t-1}{t}, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}$$

أوجد متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ التي تمثل الدالة $\int_0^x g(t)\,dt$.

الحل:

نعلم أن $e^t-1=t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots$ فإن $\frac{e^t-1}{t}=1+\frac{t}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-1}}{n!}+\cdots$

بما أن متسلسلة القوى هذه لها القيمة 1 عند $t=0$ وبما أن $g(0)=1$ فإن

$$g(t)=1+\frac{t}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-1}}{n!}+\cdots$$

لكل t. بتطبيق نظرية التكامل للمتسلسلات، ينتج

$$\int_0^x g(t)\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n!}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n!)}$$

$$=x+\frac{x^2}{2(2!)}+\frac{x^3}{3(3!)}+\cdots+\frac{x^n}{n(n!)}+\cdots$$

وبالتالي فإن متسلسلة القوى التي تمثل الدالة $\int_0^x g(t)\,dt$ هي $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ ، حيث $a_n=\frac{1}{n(n!)}$.