التقريب بكثيرات الحدود ونظرية تايلور Polynomial Approximation and Taylor Theorem

نعرف كثيرة الحدود من الدرجة (على الأكثر) n بالصيغة

$$(*)\quad P_n(x)=f(c)+\frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c)+\frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

تسمى $P_n(x)$ كثيرة حدود تايلور من الدرجة n للدالة f بجوار العدد c . ويلاحظ أن P_n و f لهما نفس القيمة وكذلك المشتقات من الرتبة الأولى إلى الرتبة n عند c .

بوضع $c=0$ في (*) نحصل على حالة خاصة لكثيرة حدود تايلور :

$$(**)\qquad P_n(x)=f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

وتسمى **كثيرة حدود ماكلورين**.

مثال1

أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الدرجة n للدالة $f(x)=e^x$. وكذلك $P_n(1)$ ثم احسب $P_5(1)$.

الحل:

كي نتمكن من استخدام صيغة $P_n(x)$ نحسب $f^{(k)}(0)$ لأي عدد صحيح غير سالب k . ولكن لكل k فإن $f^{(k)}(x)=e^x$ ، ومنه فإن $f^{(k)}(0)=e^0=1$ ، وبالتالي

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

كنتيجة لذلك نجد أن $P_n(1)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots+\frac{1}{n!}$

وعندما $n=5$ نحصل على $P_5(1)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=\frac{163}{60}\approx 2.71667$

بما أن الهدف من إيجاد $P_n(x)$ هو الحصول على قيمة تقريبية للدالة $f(x)$ ، فإن علينا التأكد إلى أي مدى تعتبر $P_5(1)$ تقريبا للقيمة $f(1)=e$. نعلم أن $e=2.71828$ (صحيحة لستة منازل عشرية) وحيث أن $P_5(1)\approx 2.71667$ ، فإن $P_5(1)$ تقريب للعدد e بخطأ مقداره 0.00161 .

مثال2

أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الدرجة n للدالة $f(x)=\ln(1+x)$. ثم احسب $P_6(1)$.

الحل:

نقوم أولا بحساب مشتقات الدالة $f(x)$ على النحو التالي:

$$f(x)=\ln(1+x) \qquad f(0)=0$$

$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{1+x} \qquad f^{(1)}(0)=1$$

$$f^{(2)}(x)=\frac{-1}{(1+x)^2} \qquad f^{(2)}(0)=-1$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{(-1)^2\,2!}{(1+x)^3} \qquad f^{(3)}(0)=2!$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{(-1)^3\,3!}{(1+x)^4} \qquad f^{(4)}(0)=-(3!)$$

وبشكل عام ، لكل $k\geq 1$ فإن

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \qquad f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

وبالتالي نجد أن $P_n(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

ونستنتج من ذلك أن $P_6(1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{37}{60}\approx 0.616667$

نتوقع أن تكون $P_n(x)$ تقريبا للدالة $f(x)$. بما أن $f(1)=\ln(2)$ تساوي 0.693147 (صحيحة لـ ستة منازل عشرية) وبما أن $P_6(1)\approx 0.616667$ ، فإن $P_6(1)$ تقريب للعدد $ln\,2$ بخطأ مقداره 0.07648 .

مثال3

أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الدرجة n . للدالة $f(x)=\frac{1}{1-x}$. ثم احسب $P_n(2)$.

الحل:

مشتقات الدالة f هي

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \qquad f(0)=1$$

$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \qquad f^{(1)}(0)=1$$

$$f^{(2)}(x)=\frac{2!}{(1-x)^3} \qquad f^{(2)}(0)=2!$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{3!}{(1-x)^4} \qquad f^{(3)}(0)=3!$$

وبشكل عام ، لكل $k \geq 1$ فإن

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \qquad\qquad f^{(k)}(0) = k!$$

وبالتالي نجد أن $P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

وعلى وجه الخصوص فإن $P_n(2) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$.

لتحديد ما إذا كانت كثيرة الحدود $P_n(x)$ تقريبا لدالة f مشتقاتها من رتب عليا موجودة عند c ، نعرف ما يسمى **باقي تايلور** R_n للدالة f بالصيغة

تعريف1

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - P_n(x) \\ &= f(x) - \left[f(c) + \frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \right] \end{aligned}$$

إن قيمة $R_n(x)$ تساعدنا على تحديد مدى صحة اعتبار $P_n(x)$ كتقريب للدالة $f(x)$ ، فكلما صغر $R_n(x)$ كلما أصبحت $P_n(x)$ قريبة من $f(x)$.

تزودنا المبرهنة التالية التي يمكن اعتبارها كتعميم لنظرية القيمة الوسطى بوسيلة لإيجاد $R_n(x)$ وبالتالي بمدى صحة استبدال $f(x)$ بكثيرة حدود تايلور .

مبرهنة1

إذا كانت f دالة بحيث أن f وجميع مشتقاتها من الرتبة n متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ ، وإذا كانت $f^{(n+1)}(x)$ موجودة لجميع x في الفترة المفتوحة (a,b)، فإنه يوجد عدد z_x في الفترة المفتوحة (a,b) بحيث إن

$$\begin{aligned} f(x) = f(c) &+ \frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(z_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \end{aligned} \qquad (\mathbf{1})$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \qquad (\mathbf{2})$$

تعرف المعادلة (1) بصيغة تايلور والمعادلة (2) بصيغة لاجرانج للباقي (Lagrange Remainder Formula) .

بوضع $c = 0$ في (2) نحصل على حالة خاصة لصيغة تايلور :

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(0) &+ \frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(z_x)}{n+1!}x^{n+1} \end{aligned}}$$

حيث z_x يقع بين 0 و x ، وتسمى **صيغة ماكلورين**.

متسلسلات القوى Power Series

تعريف2

ليكن x متغيرا. تسمى المتسلسلة من الصيغة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

متسلسلة قوى في x .حيث a_n عدد حقيقي لكل n.

مثال4

اثبت أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ متقاربة فقط عندما $x = 0$.

الحل:

إذا كان $x \neq 0$ ، فان

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = |x| \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

بالتالي ومن اختبار النسبة فان المتسلسلة متباعدة لكل $x \neq 0$.

مثال5

اثبت أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ متقاربة لكل عدد حقيقي x.

الحل:

إذا كان $x \neq 0$ ، فان

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

وبالتالي ومن اختبار النسبة فإن المتسلسلة متقاربة لكل عدد x.

مثال6

حدد قيم x التي تكون عندها متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n 3^n}$ متقاربة.

الحل:

إذا كان $x \neq 0$ ، فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}\cdot\frac{n3^n}{2^n x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{3}\frac{n}{(n+1)}x\right| = \frac{2}{3}|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{2}{3}|x|$$

بالتالي من اختبار النسبة فإن المتسلسلة تكون متقاربة مطلقا عندما $\frac{2}{3}|x|<1$ ، أو ما يكافئ ذلك عندما تكون $|x|<\frac{3}{2}$. كما تكون المتسلسلة متباعدة عندما تكون $\frac{2}{3}|x|>1$ ، أو ما يكافئ ذلك عندما تكون $|x|>\frac{3}{2}$.

وعندما تكون $\frac{2}{3}|x|=1$ (أي عندما تكون $x=\pm\frac{3}{2}$) فان اختبار النسبة يفشل. لذلك لا بد من اختبار المتسلسلة عند هاتين القيمتين بطريقة أخري.

عندما $x=\frac{3}{2}$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n3^n}\frac{3^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

فإن المتسلسلة متقاربة.

عندما $x=-\frac{3}{2}$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n3^n}\left(-\frac{3}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$

وهذه المتسلسلة متباعدة لأنها المتسلسلة التوافقية.

وبالتالي المتسلسلة المعطاة متقاربة لكل $-\frac{3}{2}<x\leq\frac{3}{2}$ ، ومتباعدة لكل $x>\frac{3}{2}$ أو $x\leq-\frac{3}{2}$.

مبرهنة2

(ا) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ متقاربة لعدد حقيقي $d\neq 0$ فإنها متقاربة مطلقا لكل $|x|<|d|$.

(ب) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ متباعدة لعدد حقيقي $d\neq 0$ فإنها متباعدة لكل $|x|>|d|$.

مبرهنة 3

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **متسلسلة قوى . عندئذ فإن واحدا فقط من الشروط التالية يتحقق:**

ا. المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **متقاربة فقط عند** $x=0$.

ب. المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **متقاربة لكل x.**

ج. يوجد عدد $r>0$ **بحيث أن المتسلسلة** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **متقاربة لكل** x **، حيث** $|x|<r$ **ومتباعدة لكل** x **، حيث** $|x|>r$.

ملاحظة: يسمى العدد r في (**ج**) من النظرية **نصف قطر تقارب المتسلسلة** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. إذا حققت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ فرع (ا) فإننا نضع $r=0$ ، وإذا حققت فرع (**ب**) فإننا نضع $r=\infty$. إذن لكل متسلسلة قوى نصف قطر تقارب r ، وهو على العموم عدد حقيقي غير سالب أو يساوي ∞. تسمى مجموعة قيم x والتي عندها $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة **فترة تقارب المتسلسلة** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. من الشروط (ا)-(**ج**) نستنتج أن فترة تقارب المتسلسلة تأخذ واحدا وواحدا فقط من الأشكال التالية:

$$[0,0],\ \ [-r,r],\ \ (-r,r],\ \ [-r,r),\ \ (-r,r),\ \ (-\infty,\infty)$$

مثال7

حدد فترة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

الحل:

بوضع $x=-1$ نجد أن المتسلسلة هي $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{1/2}}$ ، وهي متقاربة من اختبار المتسلسلة المترددة.

عندما $x=1$ تصبح المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ وهي متباعدة لأنها متسلسلة - p حيث $p=\frac{1}{2}$. بما أن المتسلسلة متقاربة عندما $x=-1$ ومتباعدة عندما $x=1$ ، فإن النظرية تضمن أن نصف قطر التقارب $r=1$ وبالتالي فترة التقارب $[-1,1)$.

تعريف3

ليكن c عددا حقيقيا و x متغيرا . نعرف متسلسلة القوى في $x-c$ ، بأنها المتسلسلة التي من الصيغة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

حيث أن المعاملات a_n ، $n=0,1,2,\ldots$ أعداد حقيقية .

مثال8

أوجد فترة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}(x-5)^n$.

الحل:

عندما $x \neq 5$ نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{(x-5)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}(x-5)\right| = |x-5|$$

من اختبار النسبة المعمم ، المتسلسلة متقاربة عندما تكون $|x-5|<1$ ومتباعدة لكل x ، حيث $|x-5|>1$.

أي أنها متقاربة لكل x في الفترة $(4,6)$ ومتباعدة لكل x ، حيث $x<4$ أو $x>6$. نختبر النهايتين كل على انفراد. عندما $x=4$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ وهي متباعدة، وعندما $x=6$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ وهي متقاربة. اذن فترة التقارب هي $(4,6]$ كما أن نصف قطر التقارب $r=1$.