الفصل الأول

المنطق الرياضي وطرائق البرهان

MATHEMATICAL LOGIC AND METHODS OF PROOF

اشتقت كلمة منطق *(Logic)* من نظيرتها اليونانية ($\lambda o \gamma o \sigma$) والتي تعني الاستدلال. أما لويس كارول *(Lewis Carroll)* في كتابه "النظر من خلال الزجاج" فإنه قدم الوصف التالي للمنطق: "إذا كانت كذلك فمن الممكن أن تكون. وبما أنها ليست كذلك فإنها لن تكون. هذا هو المنطق."

وإذا بحثنا في المعاجم اللغوية فإننا نجد العديد من التعاريف للمنطق، على سبيل المثال نجد في معجم أكسفورد التعريفين التاليين:

(أ) هو فرع الفلسفة الذي يبحث في طرائق التفكير والاستدلال. على وجه الخصوص الطرائق العلمية وقواعد الاستدلال.

(ب) استخدام منظم للرموز والطرائق الرياضية لمعرفة قيم صواب الحجج الاستقرائية.

وأما إذا بحثنا في معاجم الرياضيات المختلفة فإننا نجد تعاريف مختلفة للمنطق، منها:

(أ) التحليل، دون الاهتمام بالمعنى أو السياق، لأنماط التفكير التي نصل بواسطتها إلى الاستنتاجات الصحيحة منطلقين من مجموعة من المقدمات المنطقية.

(ب) أي حساب صوري أو لغة صورية تستخدم مسلمات أو قواعد استدلال.

(ج) منظومة ومبادئ التفكير المستخدم في حقل دراسي خاص.

(د) طريقة خاصة للمحاجة أو التفكير.

(هـ) أسلوب التفكير الذي يتحقق من صحة برهان رياضي أو برنامج حاسوبي.

أياً كان التعريف المستخدم للمنطق فإن قواعده تقدم لنا معنى دقيقاً للمفاهيم الرياضية وتستخدم هذه القواعد للتمييز بين الحجج الرياضية الصائبة والخاطئة. وعلاوة على أهمية هذه القواعد في المساعدة على فهم الاستدلال الرياضي فإن لها العديد من التطبيقات في مجال علم الحاسوب، حيث يعتمد عليها في تصميم الدارات والشبكات المنطقية ووضع الخوارزميات التي هي حجر البناء الأساس للبرامج الحاسوبية. كما أنها تستخدم للتحقق من صحة البرامج ولها العديد من الاستخدامات الأخرى.

نقوم في هذا الفصل بدراسة مبسطة غير صورية (غير شكلية) لأهم نظامي منطق هما حساب التقارير (القضايا) وحساب المُسْنَدات.

(١,١) حساب التقارير (القضايا)
Sentential (Propositional) Calculus

يعد حساب التقارير من أبسط الأنظمة المنطقية، وهو يستخدم لغة سهلة جداً تتكون مفرداتها من تقارير وأدوات ربط تستخدم لبناء تقارير جديدة من تقارير سابقة. وعلى الرغم من بساطة هذا النظام إلا أن له تطبيقات مهمة جداً في الرياضيات والحاسوب.

يبدأ حساب القضايا بمفهوم التقرير البسيط *(simple proposition)* ويعرف على أنه جملة خبرية تحمل خبراً واحداً فقط ويمكن الحكم بأنها صائبة أو خاطئة وليس كلاهما معاً. إذا كان التقرير البسيط صائباً فإننا نقول إن قيمة صوابه هي T ، أما إذا كان خاطئاً فنقول إن قيمة صوابه هي F.

تستخدم عادة حروف الهجائية الانجليزية الصغيرة $p,q,r,...$ أو الكبيرة $P,Q,R,...$ للتعبير عن التقارير.

مثال(١,١)

كل من الجمل التالية تقرير صائب:

(١) $5+3=8$

(٢) المسجد الأقصى أولى القبلتين.

(٣) العدد 7 عدد أولي.

(٤) الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية.

(٥) العدد 2 يقسم العدد 24 □

مثال (١,٢)

كل من الجمل التالية تقرير خاطئ:

(١) $5+3=9$.

(٢) العدد 15 عدد أولي.

(٣) جدة عاصمة المملكة العربية السعودية.

(٤) العدد 2 يقسم العدد 7.

(٥) الأمم المتحدة مؤسسة عربية □

مثال(١,٣)

كل من الجمل التالية ليست تقريراً:

(١) كم الساعة الآن؟

(٢) مع السلامة وإلى اللقاء.

(٣) إقرأ حساب التقارير جيداً.

(٤) أنت مدعو لحضور افتتاح المسرحية □

ملحوظات

(١) المنزلـــة الألفين، على يمين الفاصلة، في التمثيل العشري للعدد e هي 7 . هذه الجملة الخبرية تقرير ولكن يصعب الحكم على صوابها.

(٢) اليوم هو الجمعة. هذه الجملة تقرير صائب إذا كان اليوم هو بالفعل يوم الجمعة وتقرير خاطئ فيما عدا ذلك.

(٣) يقيم أحمد في جدة. هذه الجملة تقرير إذا اعتبرنا أن أحمد هو شخص نعرفه جيداً.

(٤) الجملة $x+5>0$ ليست تقريراً لأنها تحتوي على متغير ولكنها تصبح تقريراً إذا علمنا قيمة x ونسميها جملة مفتوحة *(open sentence)* وستتعرف في البند القادم على كيفية الحصول على تقارير من أمثال هذه الجمل.

التقارير المركبة *(Compound Propositions)*

يمكن إنشاء العديد من العبارات الرياضية من تقريرين أو أكثر باستخدام عمليات منطقية تسمى أدوات الربط *(connectives)* ومثل هذه العبارات تدعى تقارير مركبة وهي في العادة جمل خبرية تحمل أكثر من خبر واحد. سنستخدم في هذا الكتاب خمساً من أدوات الربط الأكثر شيوعاً.

تعريف (١,١) [أداة النفي *negation connective*]

ليكن p تقريراً. يسمى التقرير "ليس صحيحاً أن p" بنفي التقرير p ويرمز له بالرمز $\neg p$.

مثال (١,٤)

إذا كان p هو التقرير: كوكب المريخ مأهول فإن $\neg p$ هو التقرير : ليس صحيحاً أن كوكب المريخ مأهول (أو كوكب المريخ ليس مأهولاً).

وإذا كان q هو التقرير: $3+5=8$ فإن $\neg q$ هو التقرير: ليس صحيحاً أن $3+5=8$ (أو $3+5\neq 8$) $\square$

ملحوظة

لمعرفة قيم صواب تقارير مركبة نستعين بجدول يسمى جدول الصواب (truth table) . هذا الجدول يبين لنا قيم صواب التقارير المركبة باستخدام قيم صواب التقارير البسيطة المستخدمة في إنشائها.

الجدول (١,١) يبين لنا جميع قيم الصواب الممكنة لتقرير p وقيم الصواب المقابلة للتقرير $\neg p$.

p	$\neg p$
T	F
F	T

جدول (١,١)

تعريف (١,٢) [أداة العطف conjunction connective]

ليكن p ، q تقريرين . التقرير " p و q" يرمز له بالرمز $p \wedge q$ ويكون صائباً إذا كان كل من p و q صائباً ويكون خاطئاً فيما عدا ذلك. جدول صواب التقرير $p \wedge q$ مبين في الجدول (١,٢) .

تعريف (١,٣) [أداة الفصل disjunction connective]

ليكن p ، q تقريرين . التقرير " p أو q" يرمز له بالرمز $p \vee q$ ويكون خاطئاً إذا كان كل من p و q خاطئاً ويكون صائباً فيما عدا ذلك. جدول صواب $p \vee q$ مبين في الجدول (١,٢).

تعريف (١,٤) [أداة الشرط conditional connective]

ليكن p ، q تقريرين . التقرير "إذا كان p فإن q " يرمز له بالرمز $p \rightarrow q$ ويكون خاطئاً إذا كان p صائباً و q خاطئاً وفيما عدا ذلك فهو صائب.

جدول صواب $p \rightarrow q$ مبين في الجدول (١,٢).

ملحوظات

(١) يســـمى الـــتقرير p في التقرير الشرطي $p \to q$ المقدمة *(antecedent)*، أما التقرير q فيدعى النتيجة *(consequent)*.

(٢) توجد في اللغة عدة صيغ للتعبير عن التقرير الشرطي $p \to q$ نذكر منها:

إذا كان p فإن q

p يؤدي إلى q

p شرط كافٍ لـــ q

q شرط لازمٌ لـــ p

q إذا كان p

q عندما يكون p

p فقط إذا كان q

q ينتج من p

(٣) يقترن بالتقرير الشرطي $p \to q$ تقارير شرطية أخرى هي :

العكس *(converse)* : $q \to p$

المعاكس *(inverse)* $\neg p \to \neg q$

المكافئ العكسي *(contrapositive)* $\neg q \to \neg p$

تعريف (١,٥) [أداة ثنائي الشرط *biconditional connective*]

لـــيكن p ، q تقريرين . التقرير " p إذا وفقط إذا كان q" يرمز له بالرمز $p \leftrightarrow q$ ويكـــون صائباً إذا كان كل من p و q صائباً أو كان كل منهما خاطئاً وفيما عدا ذلك فهو خاطئ . جدول صواب $p \leftrightarrow q$ مبين في الجدول (١,٢).

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

جدول (١,٢)

تعريف (١,٦)

نقـــول إن A عـــبارة تقريرية *(formula)* أو تقريراً مركباً إذا كانت A تقريراً بسيطاً أو أمكن إنشاؤها من تقارير بسيطة باستخدام أداة أو أكثر من أدوات الربط.

مثال (١,٥)

جد جدول صواب العبارة التقريرية التالية:

إذا درســـت مقـــرر الرياضـــيات المتقطعة جيداً و لم تهمل دراسة مقرر المنطق فسوف تحصل على درجة عالية في الاختبار.

الحل

نحول العبارة التقريرية إلى صورة رمزية.

لنرمز بالرمز p للتقرير : درست مقرر الرياضيات المتقطعة جيداً.

لنرمز بالرمز q للتقرير: تهمل دراسة مقرر المنطق.

لنرمز بالرمز r للتقرير : تحصل على درجة عالية في الاختبار .

عندئذ، تأخذ العبارة التقريرية الصورة الرمزية $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$.

نستخدم الآن جداول صواب أدوات الربط لنحصل على جدول صواب العبارة التقريرية وهو مبين في الجدول (١,٣) .

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(P \wedge \neg q) \rightarrow r$
T	T	T	F	F	T
T	T	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	T

جدول (١,٣)

لاحظ أن $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ تحتوي على ثلاثة تقارير بسيطة ولذا فإن جدول صوابها يحتوي على $8 = 2^3$ سطراً مختلفاً. وبصورة عامة إذا احتوت العبارة التقريرية على n من التقارير البسيطة فإن جدول صوابها يحتوي على 2^n سطراً □

مثال (١,٦)

حول العبارة التقريرية التالية إلى صورة رمزية ثم جد المكافئ العكسي لها:
إذا كان المثلث ABC متساوي الساقين ويحتوي على زاوية مقدارها 45^o فإنه مثلث قائم الزاوية.

الحل

لنرمز بالرمز p للتقرير : المثلث ABC متساوي الساقين.
لنرمز بالرمز q للتقرير: المثلث ABC يحتوي على زاوية مقدارها 45^o.
لنرمز بالرمز r للتقرير: المثلث ABC قائم الزاوية.
عندئذ، الصورة الرمزية للعبارة التقريرية هي $(p \wedge q) \rightarrow r$، والمكافئ العكسي لها هو $\neg r \rightarrow \neg(p \wedge q)$. وبالتعبير عن ذلك لغوياً نجد أن المكافئ العكسي للعبارة التقريرية هو: إذا لم يكن المثلث ABC قائم الزاوية فإنه ليس صحيحاً أن يكون متساوي الساقين ويحتوي على زاوية مقدار 45^o. ويمكن أيضاً صياغة التقرير على النحو التالي:

إذا لم يكن المثلث ABC قائم الزاوية فإما أنه ليس متساوي الساقين أو أنه لا يحتوي على زاوية مقدارها 45^o □

التكافؤ المنطقي *(Logical Equivalence)*

في الرياضيات كما في معظم فروع المعرفة يمكن التعبير عن مفهوم بأكثر من طريقة. ولذا فإننا نود أن نعرف هنا بشكل دقيق العبارات التقريرية المتكافئة.

تعريف (١,٧)

لتكن A و B عبارتين تقريريتين . نقول إن العبارة A تكافئ منطقياً العبارة B ونكتب $A \equiv B$ إذا كان لهما جدول الصواب نفسه.

مثال (١,٧)

أثبت أن $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$.

الحل

باستخدام جدولي صواب $p \to q$ و $\neg q \to \neg p$ نجد أن:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

جدول (١,٤)

وبمقارنة العمودين الأخيرين في الجدول (١,٤) نخلص إلى أن:

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p \quad \square$$

مثال (١,٨)

أثبت أن $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

الحل

باستخدام جدولي صواب $\neg(p \vee q)$ و $\neg p \wedge \neg q$ نجد أن:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

جدول (١,٥)

يتضح من العمودين الأخيرين في الجدول (١,٥) أن: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\square$

مثال (١,٩)

أثبت أن $p \to q \equiv \neg p \vee q$.

الحل

باستخدام جدولي صواب $\neg p \vee q$ و $p \to q$ نجد أن:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \to q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

جدول (١,٦)

من العمودين الأخيرين في الجدول (١,٦) نخلص إلى أن: $p \to q \equiv \neg p \vee q$ □

مثال (١,١٠)

أثبت أن $(p \wedge q) \to r \equiv \neg r \to (\neg p \vee \neg q)$.

الحل

باستخدام جدولي صواب $(p \wedge q) \to r$ و $\neg r \to (\neg p \vee \neg q)$ نجد أن:

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$p \wedge q$	$\neg p \vee \neg q$	$(p \wedge q) \to r$	$\neg r \to (\neg p \vee \neg q)$
T	T	T	F	F	F	T	F	T	T
T	T	F	F	F	T	T	F	F	F
T	F	T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T	F	T	T	T

جدول (١,٧)

من العمودين الأخيرين في الجدول (١,٧) نجد أن:

$(p \wedge q) \to r \equiv \neg r \to (\neg p \vee \neg q)$ □

مبدأ التعويض للتكافؤ المنطقي
(Substitution Rule For Logical Equivalence)

لتكن كل من A و B عبارة تقريرية. ولتكن X و Y العبارتين التقريريتين الناتجتين عن A و B باستبدال التقرير p بالتقرير q . ينص مبدأ التعويض للتكافؤ المنطقي على أنه إذا كان $A \equiv B$ فإن $X \equiv Y$. والمثال التالي يوضح هذا المبدأ.

مثال (١,١١)

أثبت أن العبارة التقريرية $X = ((x \wedge y) \vee \neg z) \to (u \to v)$ تكافئ منطقياً العبارة التقريرية $Y = \neg((x \wedge y) \vee \neg z) \vee (u \to v)$.

الحل

لقد رأينا في المثال (١,٩) أن $p \to q = \neg p \vee q$. وبالتعويض : $p = (x \wedge y) \vee \neg z$ و $q = u \to v$ واستخدام مبدأ التعويض للتكافؤ المنطقي نخلص إلى أن $X \equiv Y$ □

المصدوقات والتناقضات *(Tautologies And Contradictions)*

تعريف (١,٨)

نقول إن العبارة التقريرية A مصدوقة *(tautology)* إذا كانت صائبة دائماً بغض النظر عن قيم صواب التقارير البسيطة المكونة لها. سنرمز عادة للمصدوقة بالرمز T . كما نقول إن العبارة التقريرية A تناقض *(contradiction)* إذا كانت خاطئة دائماً بغض النظر عن قيم صواب التقارير البسيطة المكونة لها. سنرمز للتناقض بالرمز F . ونقول إن العبارة مخلوطة *(contingency)* إذا لم تكن مصدوقة ولا تناقضاً.

مثال(١,١٢)

العبارة التقريرية $p \vee \neg p$ مصدوقة وأما العبارة التقريرية $p \wedge \neg p$ فهي تناقض□

ملحوظات

(١) لتكن كل من A و B عبارة تقريرية. بالتمعن في جداول الصواب نجد أن $A \equiv B$ إذا وفقط إذا كانت $A \leftrightarrow B$ مصدوقة.

(٢) لاحظ أن مبدأ التعويض يبقى صحيحاً للمصدوقات والتناقضات.

مثال(١,١٣)

أثبت أن العبارة $[(p \wedge q) \to r] \leftrightarrow [\neg r \to (\neg p \vee \neg q)]$ مصدوقة.

الحل

لقد بينا في المثال (١,١٠) أن $(p \wedge q) \to r \equiv \neg r \to (\neg p \vee \neg q)$. ولذا باستخدام الملحوظة (٢) أعلاه نخلص إلى أن العبارة $[(p \wedge q) \to r] \leftrightarrow [\neg r \to (\neg p \vee \neg q)]$ مصدوقة □

مثال (١,١٤)

أثبت أن العبارة التقريرية $[p \wedge (p \to q)] \to q$ مصدوقة.

الحل

ننشىء جدول صواب العبارة فنجد أن:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

جدول (١,٨)

من العمود الأخير في الجدول (١,٨) نخلص إلى أن العبارة مصدوقة □

مثال (١,١٥)

أثبت أن العبارة التقريرية

$A = (p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$ تناقض.

الحل

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg q \vee p$	$\neg p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	A
T	T	F	F	T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	T	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	T	F	T	F
F	F	T	T	F	T	T	F	T	F

جدول (١,٩)

بالنظر إلى العمود الأخير من الجدول (١,٩) نجد أن A تناقض □

الاقتضاء المنطقي *(Logical implication)*

تعريف (١,٩)

(أ) نقــول إن العــبارة التقريرية A تقتضي منطقياً *(logically implies)* العبارة التقريرية B ونكتب $A \Rightarrow B$ إذا كانت $A \to B$ مصدوقة.

(ب) نقول إن العبارات التقريرية $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تقتضي منطقياً العبارة التقريرية B ونكتــــب $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B$ إذا كانــــت العــــبارة الــــتقريرية $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ مصدوقة.

مثال (١,١٦)

أثبت أن $\neg(p \to q) \Rightarrow p$.

الحل

بإنشاء جدول صواب العبارة التقريرية $\neg(p \to q) \to p$ نجد أن:

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg(p \to q) \to p$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

جدول (١,١٠)