التبولوجيا العامة

د. المنجي بلال

19 جانفي 2020

المحتويات

الباب الأول

التبولوجيا العامة

1.1 الفضاءات التوبولوجية

1.1.1 مدخل للفضاءات التوبولوجية

في هذا الفصل نبدأ دراستنا بتعريف التوبولوجي، ومن ثم نعطي بعض الأمثلة مع التركيز على واحد منها وهو التوبولوجي المعتاد على $\mathbb{R}$ حيث نبين أن كل فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$ تنتمي لهذا التوبولوجي والذي يكمن وراءه تسمية عناصر التوبولوجي بالمجموعات المفتوحة. ونعرف أيضاً الفضاء التوبولوجي. ثم ننهي هذا الفصل بدراسة المقارنة بين توبولوجي وآخر.

تعريف 1

. لتكن X مجموعة غير خالية وليكن $\mathcal{I}$ تجمع من المجموعات الجزئية من X. نقول أن $\mathcal{I}$ يعرف توبولوجي على X إذا تحققت الشروط االتالية:

1. $X, \emptyset \in \mathcal{I}$

2. تقاطع أي عنصرين في $\mathcal{I}$ عنصراً في $\mathcal{I}$. أي لكل $U, V \in \mathcal{I}$ فإن $U \cap V \in \mathcal{I}$. (أو تقاطع عدد منته من عناصر $\mathcal{I}$ عنصرا في $\mathcal{I}$)

3. اتحاد أي تجمع من عناصر $\mathcal{I}$ عنصراً في $\mathcal{I}$. (أي إذا كان $\{U_j,\ j \in I\}$ تجمع من عناصر $\mathcal{I}$ فإن $\cup_{j\in I} U_j \in \mathcal{I}$.

فيما يلي نستعرض بعضاً من الأمثلة لتوبولوجيات مختلفة.

مثال 1. (التوبولوجي المتقطع- Discrete Topology)
. لتكن X مجموعة غير خالية و $\mathcal{I} = \mathcal{P}(X)$ هي مجموعة كل المجموعات الجزئية من X فإن $\mathcal{I}$ توبولوجي على X يسمى التوبولوجي المتقطع ويرمز له بالرمز $\mathcal{I}_D$

مثال 2. (التوبولوجي غير المتقطع- Indiscrete Topology)
. لتكن X مجموعة غير خالية و $\mathcal{I} = \{X, \emptyset\}$ فإن $\mathcal{I}$ يعرف توبولوجي على X يسمى التوبولوجي غير المتقطع أو التافه وهو أصغر توبولوجي يمكن تعريفه على X.

مثال 3. (توبولوجي المتممة المنتهية- Cofinite Topology)
. لتكن X مجموعة غير خالية و $\mathcal{I} = \{X, \emptyset, A \subset X; \#A^c < \infty\}$ ($\#A$ هو عدد عناصر المجموعة A).
$\mathcal{I}$ يعرف توبولوجي على X.

- $X, \emptyset \in \mathcal{I}$.
- لتكن $U, V \in \mathcal{I}$، $U, V \neq X, \emptyset$.

$(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$. و بما أن $\#U^c < \infty$ و $\#V^c < \infty$ فإن $U \cap V \in \mathcal{I}$.

- ليكن $\{U_j,\ j \in I\}$ تجمع من عناصر $\mathcal{I}$ غير $X, \emptyset$، فإن $(\cup_{j\in I} U_j)^c = \cap_{j \in I} U_j^c \in \mathcal{I}$ لأن كل $\#U_j^c < \infty$. نرمز لهذه التبولوجيا بالرمز $\mathcal{I}_C$.

مثال 4. التوبولوجي المعتاد أو القياسي (Usual or Standard Topology)
. لتكن $X = \mathbb{R}$. نقول أن مجموعة جزئية U من $\mathbb{R}$ مفتوحة إذا كانت إما المجموعة الخالية أو لكل $x \in U$ توجد فترة مفتوحة $(a, b) \subset U$ و تحتوي على x.
لتكن $\mathcal{I}$ مجموعة المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$.
فإن $\mathcal{I}$ توبولوجي على $\mathbb{R}$. لأن:

- $\mathbb{R}, \emptyset$ مفتوحتين.
- لتكن U, V مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين. إذا كان $x \in U \cap V$، يوجد $(a, b) \subset U$، $(c, d) \subset V$ و $x \in (a, b) \cap (c, d)$.

الفترة $(a, b) \cap (c, d)$ تحتوي على x و $(a, b) \cap (c, d) \subset U \cap V$. و بالتالي المجموعة $U \cap V$ مفتوحة.

- ليكن $\{U_j,\ j \in I\}$ تجمع من عناصر $\mathcal{I}$.

إذا كان $x \in \cup_{j\in I} U_j$، توجد فترة $(a, b) \subset U_1$ و تحتوي على x.
$(a, b) \subset \cup_{j \in I} U_j$.
إذاً $\mathcal{I}$ يعرف توبولوجي على $\mathbb{R}$ يسمى التوبولوجي المعتاد أو القياسي (Usual or Standard Topology) على $\mathbb{R}$ ونرمز له بالرمز $\mathcal{I}_U$.

تعريف 2

• الفضاء التوبولوجي هو مجموعة X وتوبولوجي $\mathcal{I}$ على X. نستخدم الكتابة $(X,\mathcal{I})$ للدلالة على الفضاء التوبولوجي، ولكن عادةً ما نستخدم التعبير X فضاء توبولوجي للدلالة على الزوج $(X,\mathcal{I})$ دون الإشارة للتوبولوجي $\mathcal{I}$

تعريف 3

• ليكن $(X,\mathcal{I})$ فضاء توبولوجي.
تسمى عناصر التوبولوجي $\mathcal{I}$ بالمجموعات المفتوحة (Open sets)

مثال 5.
• أي من الفترات التالية في $\mathbb{R}$ تنتمي للتوبولوجي المعتاد؟

1. $(a,b)=\{x\in\mathbb{R};\ a<x<b\}$
2. $[a,b]=\{x\in\mathbb{R};\ a\leq x\leq b\}$
3. $[a,b)=\{x\in\mathbb{R};\ a\leq x<b\}$
4. $(a,b]=\{x\in\mathbb{R};\ a<x\leq b\}$
5. $(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R};\ a<x\}$
6. $[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R};\ a\leq x\}$
7. $(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R};\ x<a\}$
8. $(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R};\ x\leq a\}$
9. $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

1. تنتمي إلى التوبولوجي المعتاد. لكل $x\in(a,b)$ فإن $(a,b)\subset(a,b)$.
2. لا تنتمي إلى التوبولوجي المعتاد، لأنه لا توجد فترة مفتوحة تحوي على a ومحتواة في $[a,b]$.
3. لا تنتمي إلى التوبولوجي المعتاد كما في 2)
4. لا تنتمي إلى التوبولوجي المعتاد كما في 2)

5. تنتمي إلى التوبولوجي المعتاد. لكل $x \in (a, +\infty)$ لنأخذ الفترة المفتوحة $(a, x+1) \subset (a, +\infty)$.
6. لا تنتمي إلى التوبولوجي المعتاد كما في 2)
7. تنتمي إلى التوبولوجي المعتاد كما في 5)
8. لا تنتمي إلى التوبولوجي المعتاد كما في 2)
9. تنتمي إلى التوبولوجي المعتاد كما في 5)

نستنتج مما سبق أن الفترات الوحيدة التي تنتمي للتوبولوجي المعتاد هي الفترات المفتوحة. أي أن الفترات المفتوحة هي مجموعات مفتوحة في الفضاء المعتادK ولهذا السبب اتفق على تسمية عناصر أي توبولوجي بالمجموعات المفتوحة. سنستخدم بالتناوب التعبير U مجموعة مفتوحة في X أو U عنصراً في التوبولوجي.
الآن نعيد صياغة تعريف (??) باستخدام المجموعات المفتوحة.

تعريف 4

. لتكن X مجموعة غير خالية و $\mathcal{I}$ تجمع من المجموعات الجزئية من X.
نقول أن $\mathcal{I}$ يعرف توبولوجي على X إذا تحققت الشروط التالية:

1. $X, \emptyset$ مجموعتان مفتوحتان.
2. تقاطع مجموعتين مفتوحتين في X مجموعة مفتوحة في X.
3. اتحاد أي تجمع من المجموعات المفتوحة في X مجموعة مفتوحة في X.

مثال 6.
. مجموعة الأعداد الصحيحة ليست مجموعة مفتوحة في الفضاء المعتاد. والسبب أنه لأي $m \in \mathbb{Z}$ فإن أي فترة مفتوحة $(m-\varepsilon, m+\varepsilon)$ لكل $\varepsilon > 0$ تحوي أعداداً نسبية وغير نسبية، وبالتالي ليست محتواه في $\mathbb{Z}$.
بالمثل مجموعة الأعداد الكسرية ومجموعة الأعداد اللاكسرية كلتاهما لا تنتمي إلى التوبولوجي المعتاد.

ملاحظة 1.
. رأينا في المثال ?? أن كل فترة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة في الفضاء المعتاد. والتساؤل المنطقي هنا هو، هل كل مجموعة مفتوحة هي فترة مفتوحة؟ الإجابة بالنفي فالفترتان $(0, 1)$ و $(2, 4)$ مجموعتان مفتوحتان في الفضاء المعتاد، وبالتالي فإن اتحادهما مجموعة مفتوحة، ولكنها ليست فترة مفتوحة.

مثال 7.
. لتكن X مجموعة و $x \in X$ ولتكن U مجموعة جزئية من X تحوي x فإن التجمع $\mathcal{I}_x = \{\emptyset, U \subset X : x \in U\}$ يعرف توبولوجي على X لأن:

- *بما أن $x \in X$ فإن $X \in \mathcal{I}_x$ ومن التعريف $\emptyset \in \mathcal{I}_x$.*
- *لتكن $U, V \in \mathcal{I}_x$ فإن $x \in U$ و $x \in V$ وبالتالي $U \cap V \in \mathcal{I}_x$.*
- *ليكن $\{U_j,\ j \in I\}$ تجمع من عناصر $\mathcal{I}_x$.*

بما أن $x \in \cup_{j\in I} U_j$، فإن $\cup_{j\in I} U_j \in \mathcal{I}_x$.

إذًا $\mathcal{I}_x$ توبولوجي على X ويسمى توبولوجي النقطة الخاصة (Particular Point topology) والزوج $(X, \mathcal{I})$ فضاء النقطة الخاصة.

مثال 8.
. لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن U مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ تحقق لكل $x \in U$ توجد فترة نصف مغلقة نصف مفتوحة $[a, b)$ بحيث $x \in [a, b) \subset U$ وليكن

$$\mathcal{I} = \{\mathbb{R}, \emptyset, U \subset \mathbb{R};\ \forall\ x \in U,\ \exists [a, b) \subset U,\ x \in [a, b)\}$$

$\mathcal{I}$ يعرف توبولوجي على $\mathbb{R}$ ويسمى توبولوجي النهاية السفلى.

2.1.1 المقارنة بين توبولوجي وآخر على نفس المجموعة

ليكن $\mathcal{I}_1$ و $\mathcal{I}_2$ كل منهما توبولوجي على المجموعة X.

1. نقول أن $\mathcal{I}_1$ أصغر (coarser) من $\mathcal{I}_2$ إذا كان كل عنصر في $\mathcal{I}_1$ عنصراً في $\mathcal{I}_2$. وفي هذه الحالة نقول أيضاً أن $\mathcal{I}_2$ أكبر (finer) من $\mathcal{I}_1$. إذا كان $\mathcal{I}_1$ أصغر من $\mathcal{I}_2$ نكتب $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$. وإذا كان $\mathcal{I}_2$ أكبر من $\mathcal{I}_1$ نكتب $\mathcal{I}_2 \supset \mathcal{I}_1$.

2. إذا كان $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$ و $\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}_1$ نقول أن $\mathcal{I}_1$ و $\mathcal{I}_2$ متطابقان ونكتب $\mathcal{I}_1 \equiv \mathcal{I}_2$.

3. إذا تحقق أي من $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$ أو $\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}_1$ نقول أن $\mathcal{I}_1$ و $\mathcal{I}_2$ قابلان للمقارنة. وإذا لم يتحقق أي منهما نقول أنهما غير قابلين للمقارنة، ونكتب ذلك $\mathcal{I}_1 \not\equiv \mathcal{I}_2$.

مثال 9.
. قارن بين فضاء المتممة المنتهية $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_C)$ والفضاء المعتاد، $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_U)$ والفضاء المتقطع $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_D)$.
($\mathcal{I}_C \subset \mathcal{I}_U$، $\mathcal{I}_U \not\subset \mathcal{I}_C$، $\mathcal{I}_C \subset \mathcal{I}_D$، $\mathcal{I}_U \subset \mathcal{I}_D$، $\mathcal{I}_D \not\subset \mathcal{I}_C$، $\mathcal{I}_D \not\subset \mathcal{I}_U$).

3.1.1 تمارين

تمرين 1 :
إذا كان $\mathcal{C}$ تجمع من المجموعات الجزئية من المجموعة X. بفرض أن $X, \emptyset$ تنتميان إلى $\mathcal{C}$ وأن اتحاد عدد منته وتقاطع أي عدد من عناصر $\mathcal{C}$ عنصرا في $\mathcal{C}$، أثبت أن التجمع $\mathcal{I} = \{A^c,\ A \in \mathcal{C}\}$ توبولوجي على X.

تمرين 2 :
إ ذا كانت Y $f\colon (X, \mathcal{I}_X) \longrightarrow Y$ دالة من الفضاء التوبولوجي X إلى المجموعة Y (f ليست بالضرورة شاملة)، فأثبت أن التجمع

$$\mathcal{I}_Y = \{V \subset Y;\ f^{-1}(V) \in \mathcal{I}_X\}$$

يعرف تبولوجي على Y يسمى هذا التوبولوجي، بالتوبولوجي المستحث على Y (Induced Topology).

تمرين 3 :
لتكن X مجموعة غير منتهية وليكن

$$\mathcal{I} = \{X, \emptyset, A \subset X;\ A^c \text{ countable}\}.$$

أثبت أن $\mathcal{I}$ توبولوجي على X.
صف التوبولوجي إذا كانت X مجموعة قابلة للعد.

تمرين 4 :
لتكن $\mathcal{I}_L = \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, a);\ a \in \mathbb{R}\}$. أثبت أن $\mathcal{I}_L$ يعرف توبولوجي على $\mathbb{R}$ يسمى توبولوجي الشعاع الأيسر (Left Ray Topology) ويرمز له بالرمز $\mathcal{I}_L$.

تمرين 5 :
لتكن X مجموعة غير خالية و A مجموعة جزئية غير خالية من X وليكن $\mathcal{I} = \{\emptyset, U\}$ تجمع من المجموعات الجزئية في X حيث U تمثل جميع المجموعات الجزئية في X والتي تحوي A.

1. أثبت أن $\mathcal{I}$ توبولوجي على X.
2. ما هو التوبولوجي عندما تكون $A = X$؟
3. ما هو التوبولوجي عندما تكون $A = \emptyset$؟

تمرين 6 :
أعط مثالا لتجمع من المجموعات المفتوحة التي تقاطعها مجموعة غير مفتوحة.

تمرين 7 :
ليكن $\mathcal{I}$ تبولوجي على X يتكون من أربعة عناصر، أي $\mathcal{I} = \{X, \emptyset, A, B\}$ حيث A و B مجموعات جزئية فعلية غير خالية من X.
ما الشروط الواجب توافرها على A و B ليحقق شروط التوبولوجي؟

تمرين 8 :
ليكن X مجموعة غير خالية و $\mathcal{I}=\{\mathcal{I}_\alpha,\ \alpha\in J\}$ تجمع التوبولوجيات المعرفة على X.
أثبت أن $\cap_{\alpha\in J}\mathcal{I}_\alpha$ توبولوجي على X

تمرين 9 :
لتكن $\mathbb{Z}^+$ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة وكانت $U_n=\{n,n+1,n+2,\ldots\}$ لكل $n\in\mathbb{Z}^+$.
ليكن

$$\mathcal{I}=\{\emptyset,U_1,U_2,\ldots\}.$$

1. أثبت إن $\mathcal{I}$ توبولوجي على $\mathbb{Z}^+$.
2. اكتب جميع المجموعات المفتوحة التي تحوي العدد 7.

تمرين 10 :
إذا كان $\mathcal{I}$ توبولوجي على X.
أثبت إن $\mathcal{I}$ التوبولوجي المتقطع إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة أحادية مجموعة مفتوحة في X.

تمرين 11 :

1. هل هناك مجموعة بحيث أن التوبولوجي المتقطع والتافه متساويان؟
2. أعط مثالا لتوبولوجي على مجموعة غير منتهية يحتوي فقط عددا منتهيا من العناصر (لا تستخدم التوبولوجي التافه).

تمرين 12 :
أثبت أن تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة مجموعة مفتوحة.

تمرين 13 :
أعط مثالا لاثنين من التوبولوجيات على المجموعة X، بحيث أن اتحادهما لا يعرف تبولوجي على X.

تمرين 14 :
هل مجموعة الأعداد الكسرية وغير الكسرية مجموعات مفتوحة في الفضاء المعتاد؟

تمرين 15 :
قارن بين فضاء الشعاع الأيسر $(\mathbb{R},\mathcal{I}_L)$ والفضاء المعتاد $(\mathbb{R},\mathcal{I}_U)$ وفضاء المتممة المنتهية $(\mathbb{R},\mathcal{I}_C)$.

2.1 الفضاءات التبولوجية الجزئية Topological Subspaces

قبل البدء بدراسة التوبولوجي الجزئي، سنقوم بدراسة كيفية استخدام أي دالة في تعريف توبولوجي على كل من X إذا أعطي توبولوجي على Y وكذلك على Y إذا أعطي توبولوجي على X وهو ما يعرف بالتوبولوجي المستحث.

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X فإننا نستطيع تعريف أكثر من توبولوجي على A، ولكن ما نريده هو توبولوجي على A مرتبط بالتوبولوجي على X من أجل هذا سنستخدم التوبولوجي المستحث في تعريف توبولوجي على المجموعة A ثم نعطي تعريفا آخر مكافئا لهذا التعريف.

نظرية 1

لتكن $f\colon (X,\mathcal{I}_X) \longrightarrow Y$ دالة من الفضاء التوبولوجي $(X,\mathcal{I}_X)$ إلى المجموعة Y (f ليست بالضرورة شاملة). وليكن $\mathcal{I}_Y = \{V \subset Y;\ f^{-1}(V) \in \mathcal{I}_X\}$ تجمع من المجموعات الجزئية من Y فإن $\mathcal{I}_Y$ توبولوجي على Y.

مثال 10.

لتكن $X = Y = \mathbb{R}$ وليكن $(X,\mathcal{I}_U)$ الفضاء المعتاد ولتكن $f\colon X \longrightarrow Y$ معرفة

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$$

صف $\mathcal{I}_U$.

نظرية 2

لتكن $f\colon X \longrightarrow (Y,\mathcal{I}_Y)$ دالة من المجموعة X إلى الفضاء التوبولوجي $(Y,\mathcal{I}_Y)$. (f ليست بالضرورة شاملة). وليكن $\mathcal{I}_X = \{f^{-1}(V) \subset X;\ V \in \mathcal{I}_Y\}$ تجمع من المجموعات الجزئية من X. فإن $\mathcal{I}_X$ توبولوجي على X.

تعريف 5

التوبولوجي $\mathcal{I}_X$ المعرف على X بالنظرية السابقة يسمى التوبولوجي المستحث على X من $\mathcal{I}_Y$ و f. (Induced Topology).

مثال 11.

لتكن $X = \{a, b, c\}$ *و* $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ *و* $\mathcal{I}_Y = \{\emptyset, Y, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$*. لنعرف* $f\colon X \longrightarrow Y$ *بأنها* $f(a) = 1$*،* $f(b) = 3$*،* $f(c) = 2$*.*
جد $\mathcal{I}_X$.

تعريف 6

إذا كانت A مجموعة جزئية من المجموعة X فإننا نعرف دالة الاحتواء (Inclusion Function) $i\colon A \longrightarrow X$ و $i(x) = x$ لكل $x \in A$.

تعريف 7

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي $(X, \mathcal{I}_X)$ فإن التوبولوجي المستحث على A من X ودالة الاحتواء i يسمى بالتوبولوجي الجزئي على A ونرمز له بالرمز $\mathcal{I}_A$.

نظرية 3

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي $(X, \mathcal{I}_X)$ فإن التجمع،

$$\mathcal{I}_A = \{V \subset A;\ V = U \cap A,\ U \in \mathcal{I}_X\}$$

يعرف توبولوجي على A.

مثال 12.
ليكن $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_U)$ *الفضاء المعتاد ولتكن* $A = [c, d]$ حيث $c, d \in \mathbb{R}$.
صف $\mathcal{I}_A$.

ملاحظة 2.
من المثال السابق يتضح أن المجموعة المفتوحة في الفضاء الجزئي ليست بالضرورة مجموعة مفتوحة في الفضاء نفسه. فمثلاً $(a, b]$ *مفتوحة في* $[c, d]$ *لكنها ليست مفتوحة في* $\mathbb{R}$*.*

تمهيدية 1

إذا كانت A مجموعة مفتوحة في X فإن كل مجموعة مفتوحة في A مجموعة مفتوحة في X. أي لكل $V \in \mathcal{I}_A$، $V \in \mathcal{I}_X$.

1.2.1 تمارين

تمرين 16 :
ليكن $X = Y = \mathbb{R}$ و لتكن $f\colon X \longrightarrow Y$ دالة معرفة كما يلي:
$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 2 \\ 0 & 1 \leq x < 2 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$ صف التوبولوجي على Y إذا كان التوبولوجي على X توبولوجي المتممة المنتهية.

تمرين 17 :
إذا كان $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_C)$ فضاء المتممة المنتهية وكانت $A = [a, b]$.
صف التوبولوجي الجزئي $\mathcal{I}_A$.

تمرين 18 :
إذا كان $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_L)$ فضاء النهاية السفلى وكانت $A = (-\infty, a]$.
صف التوبولوجي الجزئي $\mathcal{I}_A$.

3.1 المجموعات المغلقة و الإنغلاقية و نقطة النهاية Closed Sets, Closure of a Set and limit point

لدينا الآن العديد من الأمثلة مما يمكننا من تقديم بعض المفاهيم التوبولوجية الأساسية. وسندرس في هذا الفصل المجموعات المغلقة وانغلاقية المجموعة، وكما ندرس مجموعة نقاط النهاية.

تعريف 8

ليكن X فضاء توبولوجي. نقول أن المجموعة الجزئية $F \subset X$ مجموعة مغلقة في X إذا كانت متممتها F^c مجموعة مفتوحة في X.

مثال 13.
ليكن $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_L)$ فضاء الشعاع الأيسر.
ما المجموعات المغلقة في هذا الفضاء؟

مثال 14.
ليكن $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_C)$ فضاء المتممة المنتهية.
صف المجموعات المغلقة في هذا الفضاء.

مثال 15.
سبق وأن بينا في مثال سابق أن الفترات المفتوحة هي الوحيدة من بين الفترات تكون مجموعات مفتوحة في الفضاء المعتاد. وحيث أن الفترات المغلقة هي متممات الفترات المفتوحة، فإن الفترات المغلقة تكون مجموعات مغلقة في الفضاء المعتاد، وهي الوحيدة من بين الفترات التي تكون مغلقة في هذا الفضاء.

مثال 16.
نعلم أن كل مجموعة جزئية في الفضاء المتقطع هي مجموعة مفتوحة، وبالتالي فإن كل مجموعة جزئية هي أيضا مجموعة مغلقة. أي، كل مجموعة جزئية في الفضاء المتقطع تكون مفتوحة ومغلقة في آن واحد. وكما عرفنا سابقا المجموعات المغلقة مستخدمين المجموعات المفتوحة، فإننا نستطيع تعريف المجموعات المفتوحة باستخدام المجموعات المغلقة.

تعريف 9

لتكن X فضاء توبولوجي. نقول أن المجموعة الجزئية U مجموعة مفتوحة في X إذا كانت متممتها U^c مجموعة مغلقة في X.

في الفضاء المتقطع وجدنا أن كل مجموعة جزئية من X تكون مغلقة ومفتوحة، بينما في الفضاء المعتاد وجدنا أن الفترات المفتوحة تكون مجموعات مفتوحةK ولكنها ليست مغلقة والفترات المغلقة تكون مجموعات مغلقة، بينما الفترات نصف مغلقة نصف مفتوحة والفترات نصف مفتوحة نصف مغلقة ليست مفتوحة وليست مغلقة.

إن تجمع المجموعات الجزئية المغلقة في الفضاء X له خواص شبيهة بتلك الخواص التي يحققها تجمع المجموعات الجزئية المفتوحة في X.

نظرية 4

ليكن $(X, \mathcal{I})$ فضاء توبولوجي، وليكن $\mathcal{F} = \{F_j;\ j \in J\}$ تجمع كل المجموعات المغلقة في X فإن

1. $X, \emptyset \in \mathcal{F}$،
2. اتحاد عدد منته من عناصر $\mathcal{F}$ ينتمي إلى $\mathcal{F}$ أي أن اتحاد عدد منته من المجموعات المغلقة مجموعة مغلقة.
3. تقاطع أي من عناصر $\mathcal{F}$ ينتمي إلى $\mathcal{F}$. أي أن تقاطع أي من المجموعات المغلقة مجموعة مغلقة.

العكس: لتكن X مجموعة و $\mathcal{F}$ عائلة من المجموعات الجزئية من X تحقق الثلاث خصائص (1)، (2)، (3) فإن تجمع متممات عناصر $\mathcal{F}$ تعرف توبولوجي على X بحيث تجمع المجموعات المغلقة في هذا التوبولوجي هو $\mathcal{F}$.

نظرية 5

ليكن A فضاء جزئيا من X فإن المجموعة B مغلقة في A إذا وفقط إذا كانت تساوي تقاطع مجموعة مغلقة في X مع A.

نظرية 6

ليكن B فضاء جزئي من الفضاء X. إذا كانت B مغلقة في A و A مغلقة في X فإن B مغلقة في X.

تعريف 10

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء X نعرف انغلاقية A (closure) بأنها تقاطع كل المجموعات المغلقة في X التي تحوي A ونرمز لها بالرمز $Cl(A)$ أو بالرمز $\bar{A}$.
أي إذا كان $\{F_j;\ j\in J\}$ تجمع كل المجموعات المغلقة في X والتي تحوي A، فإن

$$\bar{A}=\bigcap_{j\in J}F_j.$$

مثال 17.
ليكن $X=\{a,b,c,d\}$ و $\mathcal{I}=\{X,\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ فإن المجموعات المغلقة في X هي: $\mathcal{F}=\{X,\emptyset,\{b,c,d\},\{a,c,d\},\{c,d\}\}$.
إذا كانت $A=\{c,d\}$ فإن المجموعات المغلقة التي تحوي A هي: $X,\{b,c,d\},\{a,c,d\},\{c,d\}$ بالتالي $\bar{A}=\{b,c,d\}\cap\{a,c,d\}\cap\{c,d\}=\{c,d\}$.
إذا كانت $B=\{a,c\}$ فإن المجموعات المغلقة التي تحوي $\{a,c\}$ هي $\{X,\{a,c,d\}\}$ أي أن $\bar{B}=\{a,c,d\}$.

مثال 18.
إذا كانت $\mathbb{R}$ الفضاء المعتاد، أوجد $\bar{A}$

1. $A=(0,1)$
2. A مجموعة منتهية في $\mathbb{R}$

مثال 19.
في الفضاء المتقطع كل مجموعة جزئية مغلقة، وبالتالي تساوي انغلاقيتها.

نقدم في النظرية التالية بعضاً من خواص انغلاقية المجموعة.

نظرية 7

ليكن X فضاء توبولوجي ولتكن A مجموعة جزئية من X فإن:

1. $\bar{A}$ مجموعة مغلقة في X
2. $\bar{A}$ أصغر مجموعة مغلقة في X تحوي A. هذا يعني أن أي مجموعة مغلقة في X تحوي A

تحوي أيضاً $\bar{A}$.

3. $A \subset \bar{A}$.

4. إذا كانت B مجموعة جزئية في X وكانت $A \subset B$، فإن $\bar{A} \subset \bar{B}$.

5. A مغلقة في X إذا وفقط إذا كانت $A = \bar{A}$.

6. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$، $\bar{\emptyset} = \emptyset$.

في النظرية التالية نعطي مزيداً من خواص الانغلاقية.

نظرية 8

لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من الفضاء X. فإن

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

2. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ ولكن العكس ليس بالضرورة صحيحاً.

نظرية 9

لتكن A فضاء جزئي من الفضاء X ولتكن B مجموعة جزئية من A ولتكن $\bar{B}$ انغلاقية B في X فإن انغلاقية B في A تساوي $\bar{B} \cap A$.

إن التعريف الذي قدمناه لانغلاقية مجموعة، لا يعطينا طريقة ملائمة لإيجاد الانغلاقية لمجموعة ما: لأن تجمع كل المجموعات المغلقة كتجمع كل المجموعات المفتوحة عادة ما يكون كبيراً جداً مما يصعب معه إيجاد الانغلاقية. وتصنف النظرية التالية انغلاقية المجموعة باستخدام المجموعات المفتوحة. وقبل ذلك سندخل المفهوم التالي، سنقول أن المجموعة A تتقاطع مع المجموعة B إذا كان التقاطع $A \cap B$ مجموعة غير خالية.

نظرية 10

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X. فإن $x \in \bar{A}$ إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة

مفتوحة U في X تحوي x تتقاطع مع A. أي أن

$$x \in \bar{A} \iff \forall U \in \mathcal{I},\ x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset.$$

مثال 20.
ليكن X فضاء المتممة المنتهية، لتكن A مجموعة جزئية من X.
صف $\bar{A}$.
لدينا حالتان:

1. A مجموعة منتهية. A مجموعة مغلقة. إذًا $\bar{A} = A$.
2. A مجموعة غير منتهية.
ليكن $x \in X$، ولتكن U مجموعة مفتوحة في X تحوي x حيث $U \cap A \neq \emptyset$. من تعريف المجموعة المفتوحة في فضاء المتممة المنتهية فإن U^c مجموعة منتهية، وحيث إن A مجموعة غير منتهية فإن $A \neq U^c$. بالتالي $U \cap A \neq \emptyset$. إذًا $x \in \bar{A}$ ومنه $\bar{A} = X$.

مثال 21.
ليكن $\mathbb{R}$ الفضاء المعتاد. جد $\bar{A}$ إذا كانت A تساوي:

1. $A = (0, 1)$
2. $A = \{5, 6\} \cup (2, 4]$
3. $A = \mathbb{Z}^+$، $A = \mathbb{Z}$، $A = \mathbb{Q}$.

1.3.1 نقطة النهاية

هناك طريقة ثانية لوصف انغلاقية مجموعة، وتعتمد هذه الطريقة على أحد المفاهيم المهمة وهو نقطة النهاية، والذي سيقدمه التعريف التالي:

تعريف 11

ليكن X فضاء توبولوجي ولتكن A مجموعة جزئية من X. نقول أن $x \in X$ نقطة نهاية (Limit point) أو نقطة تجمع (Cluster point) أو نقطة تراكمية (Accumulation point) للمجموعة A، إذا كانت كل مجموعة مفتوحة في X تحوي x تتقاطع مع A في نقطة تختلف عن x.
مجموعة نقاط النهاية تسمى المجموعة المشتقة (Derived Set) ونرمز لها بالرمز A'

$$x \in A' \iff \forall U \in \mathcal{I},\ x \in U, \Rightarrow U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

مثال 22.
إذا كان $A=(0,1)$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.
صف A' إذا كانت $\mathbb{R}$

1. الفضاء المعتاد.
2. الفضاء المتقطع.
3. فضاء الشعاع الأيسر.
4. فضاء المتممة المنتهية.

نظرية 11

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X، ولتكن A' المجموعة المشتقة للمجموعة A فإن $\bar{A}=A\cup A'$.

نتيجة 1

المجموعة الجزئية من الفضاء التوبولوجي مغلقة إذا وفقط إذا احتوت على جميع نقاط نهايتها.

نظرية 12

ليكن $\{A_j;\ j\in J\}$ تجمع من المجموعات الجزئية من الفضاء X، فإن

1. $\overline{\cap_{j\in J}A_j}\subset\cap_{j\in J}\overline{A_j}$.
2. $\cup_{j\in J}\overline{A_j}\subset\overline{\cup_{j\in J}A_j}$.

إن الأمثلة السابقة تظهر لنا أن نقطة النهاية للمجموعة A ربما تنتمي للمجموعة وربما لا تنتمي لها. إن عناصر A التي ليست نقاط نهاية تسمى نقاط معزولة للمجموعة A طبقاً للتعريف التالي:

تعريف 12

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء X فإن $x.A$ نقطة معزولة للمجموعة A إذا وجدت مجموعة مفتوحة U في X تحوي x بحيث أن $U \cap A = \{x\}$.

من تعريف نقطة النهاية والنقطة المعزولة يمكن القول أنه كلما صغر التوبولوجي على X كلما كانت فرصة النقطة $x \in X$ أفضل لكي تكون نقطة نهاية للمجموعة الجزئية A، وكلما كبر التوبولوجي كلما كانت فرصة النقطة $x \in X$ أفضل لكي تكون نقطة معزولة للمجموعة A.

تعريف 13

نقول إن المجموعة الجزئية A من الفضاء X كثيفة (Dense) في X إذا كانت $\bar{A} = X$.

مثال 23.

1. *في مثال ?? أثبتنا أنه إذا كانت مجموعة غير منتهية في فضاء المتممة المنتهية X، فإن $\bar{A} = X$.*
   إذاً كل مجموعة غير منتهية في فضاء المتممة المنتهية كثيفة.
2. *في مثال ?? أثبتنا أنه في الفضاء المعتاد فإن $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*
   إذاً $\mathbb{Q}$ كثيفة في الفضاء المعتاد $\mathbb{R}$.
3. *في الفضاء المتقطع X كل مجموعة جزئية A مغلقة، وبالتالي $\bar{A} = A$.*
   إذاً لا توجد مجموعة كثيفة في X إلا X.
4. *إذا كان $\mathbb{R}$ فضاء الشعاع الأيسر وكانت $A = (-\infty, a)$ حيث $a \in \mathbb{R}$، فإن $\bar{A} = \mathbb{R}$.*
   إذاً A كثيفة في $\mathbb{R}$.

النظرية التالية تعطي شروطاً مكافئة لتعريف المجموعة الكثيفة.

نظرية 13

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X، فإن الشروط التالية متكافئة:

1. المجموعة A كثيفة في X.

2. إذا كانت B مجموعة مغلقة في X، وكانت $A \subset B$، فإن $B = X$.

3. لكل $x \in X$، كل مجموعة مفتوحة في X تحوي x تقاطعها مع A لا يساوي المجموعة الخالية.

2.3.1 تمارين

تمرين 19 :
لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$ وليكن

$$\mathcal{I} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

1. صف المجموعات المغلقة.
2. صف انغلاقية كل من المجموعات $\{a, b\}$، $\{a\}$ و $\{c, e\}$.
3. أي المجموعات في 2) كثيفة في X؟

تمرين 20 :
إذا كانت $\mathbb{Z}^+$ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة وكانت $U_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ ليكن

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, U_1, U_2, U_3, \ldots\}$$

فإن $\mathcal{I}$ توبولوجي على $\mathbb{Z}^+$.

1. صف المجموعات المغلقة في الفضاء $(\mathbb{Z}^+, \mathcal{I})$.
2. أوجد انغلاقية المجموعتين $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ و $\{8, 25, 48, 86\}$
3. أوجد المجموعات الجزئية من $\mathbb{Z}^+$ والكثيفة في $\mathbb{Z}^+$.

تمرين 21 :
إذا كان X فضاء تبولوجي و A فضاء جزئي في X أثبت أن المجموعة الجزئية F مغلقة في A إذا وفقط إذا كانت $F = M \cap A$ حيث M مجموعة مغلقة في X.

تمرين 22 :
أثبت إذا كانت A مجموعة مغلقة في B وكانت B مجموعة مغلقة في X، فإن A مغلقة في X.

تمرين 23 :
أثبت ما يلي: إذا كانت x نقطة نهاية للمجموعة الجزئية $A \subset \mathbb{R}$ وكانت U مجموعة مفتوحة تحوي x فإن $U \cap A$ مجموعة غير منتهية.

تمرين 24 :
. تعريف "لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X. يقال أن $x \in X$ نقطة معزولة للمجموعة A إذا وجدت مجموعة مفتوحة U في X بحيث $U \cap A = \{x\}$.
أثبت ما يلي: إذا لم يكن للفضاء التوبولوجي X نقاط معزولة، فإن كل مجموعة مفتوحة في X لن يكون لها نقاط معزولة.

تمرين 25 :
يقال أن المجموعة A مجموعة تامة إذا وفقط إذا كانت $A = A'$.
أثبت أن المجموعة تامة إذا وفقط إذا كانت مغلقة وليس لها نقاط معزولة.

تمرين 26 :
لتكن $A, B \subset X$. أثبت أن $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

تمرين 27 :
ليكن $\mathcal{I}_1$، $\mathcal{I}_2$ كل تبولوجي على المجموعة غير الخالية X بحيث أن $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$ ولتكن $A \subset X$.

1. أثبت أن كل نقطة نهاية للمجموعة A بالنسبة للتوبولوجي $\mathcal{I}_2$ هي أيضا نقطة نهاية للمجموعة A بالنسبة للتوبولوجي $\mathcal{I}_1$.

2. أعط مثالا توضح فيه أن وجود نقطة نهاية للمجموعة A بالنسبة للتوبولوجي $\mathcal{I}_1$ ولكنها ليست نقطة نهاية للمجموعة A بالنسبة للتوبولوجي $\mathcal{I}_2$.

تمرين 28 :
إذا كانت U مجموعة مفتوحة في X و A مجموعة مغلقة في X. أثبت أن $A \setminus U$ مجموعة مفتوحة في X و $U \setminus A$ مجموعة مغلقة في X.

تمرين 29 :
أعط مثالا لمجموعات مغلقة في X بحيث أن اتحادها مجموعة غير مغلقة.

تمرين 30 :
صف انغلاقية المجموعات $[4, 9)$، $\{26, 55, 99\}$ و $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ في فضاء الشعاع الأيسر.

تمرين 31 :
ليكن X الفضاء اللامتقطع.

1. أوجد المجموعات المغلقة في X

2. أوجد انغلاقية أية مجموعة جزئية A في X

3. ما المجموعات الكثيفة في X؟

تمرين 32 :
لتكن A مجموعة كثيفة في الفضاء التوبولوجي X ولتكن U مجموعة مفتوحة في X.
أثبت أن $A \cap U \neq \emptyset$.

تمرين 33 :

ليكن $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_U)$ الفضاء المعتاد. ولتكن p نقطة لا تنتمي إلى $\mathbb{R}$. و ليكن $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{p\}$.
نعرف التجمع $\mathcal{I}$ من المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}^*$ من النوعين:
النوع 1: U حيث U مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$.
النوع 2: $\mathbb{R}^* \setminus B$ حيث B مجموعة جزئية مغلقة ومحدودة في $\mathbb{R}$.
أثبت أن $\mathcal{I}$ توبولوجي على $\mathbb{R}^*$.

4.1 النقاط الداخلية و الخارجية ونقاط الحد Interior, Exterior and Boundary Points

نتابع في هذا الفصل دراستنا لبعض المفاهيم التوبولوجية الأساسية، وهي النقاط الداخلية ونقاط الحد والنقاط الخارجية.

تعريف 14

ليكن X فضاء توبولوجي ولتكن A مجموعة جزئية غير خالية من X.
نقول أن

1. النقطة $x \in X$ نقطة داخلية (Interior Point) للمجموعة A إذا وجدت مجموعة مفتوحة U في X بحيث أن $x \in U \subset A$. مجموعة النقاط الداخلية للمجموعة A نرمز لها بالرمز $\mathrm{Int(A)}$
2. النقطة $X \in x$ نقطة خارجية للمجموعة A إذا وجدت مجموعة مفتوحة إذا وجدت مجموعة مفتوحة U
في X بحيث $x \in U \subset X \setminus A$.
مجموعة النقاط الخارجية نرمز لها بالرمز $\mathrm{Ext(A)}$.
3. النقطة $x \in X$ نقطة حد (Boundary point)
للمجموعة A إذا كانت كل مجموعة مفتوحة، U في X تحوي x تتقاطع مع A ومع متممة A. أي أن $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ و $U \cap A \neq \emptyset$.

مجموعة نقاط الحد للمجموعة A.

نرمز لها بالرمز $\mathrm{Bd(A)}$.

ملاحظة 3.
لاحظ أنه إذا كانت $x \in X$ نقطة داخلية للمجموعة A فإنها تنتمي للمجموعة. بينما نقطة حد، فقد تنتمي للمجموعة أو إلى متممتها. وإذا كانت نقطة خارجية فإنها تنتمي إلى متممة المجموعة.

مثال 24.
ليكن $X = \mathbb{R}$ ولتكن $A = (0,1)$ أوجد $Bd(A), Ext(A), Int(A)$ إذا كان الفضاء X

1. *المعتاد.*
2. *المتقطع.*
3. *المتممة المنتهية.*

نظرية 14

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء X، فإن

1. $Bd(A), Ext(A), Int(A)$ منفصلة مثنى مثنى.
2. $X = Int(A) \cup Ext(A) \cup Bd(A)$
3. $Int(X \setminus A) = Ext(A)$
4. $Ext(X \setminus A) = Int(A)$
5. $Bd(A) = Bd(X \setminus A)$.

نظرية 15

ليكن X فضاء توبولوجي ولتكن A و B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من X، فإن

1. $Int(A)$ هي اتحاد كل المجموعات المفتوحة في X والمحتواه في A
2. $Int(A)$ مجموعة مفتوحة في X.
3. $Int(A)$ هي أكبر مجموعة مفتوحة في X والمحتواه في A، أي أن $Int(A) \subset A$.
4. إذا كانت $A \subset B$ فإن $Int(A) \subset Int(B)$.
5. $Int(A) \cap Int(B) = Int(A \cap B)$
6. $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$ ولكن العكس ليس بالضرورة صحيحاً.
7. A مجموعة مفتوحة في X إذا وفقط إذا كانت $Int(A) = A$.

نظرية 16

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X فإن

1. A مجموعة مفتوحة في X إذا وفقط إذا لم تحتوي A أي نقطة من نقاط حدها أي أن

$$Bd(A) \cap A = \emptyset$$

2. A مجموعة مغلقة في X إذا وفقط إذا احتوت A جميع نقاط حدها أي أن $Bd(A) \subset A$.

نظرية 17

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء X، فإن $\bar{A} = A \cup Bd(A) = Int(A) \cup Bd(A)$.

ننهي هذا الفصل بإعطاء تعريف مكافئ لمجموعة الحد الذي يبين أيضاً أنها مجموعة مغلقة.

نظرية 18

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X فإن $Bd(A) = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.

1.4.1 تمارين

تمرين 34 :
لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$ وليكن

$$\mathcal{I} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

ولتكن
$A = \{a, b, c\}$ صف $\bar{A}, Int(A), Bd(A), Ext(A)$.

تمرين 35 :
إذا كانت $A = (0, 1) \cup \{2, 3\} \subset \mathbb{R}$. صف $\bar{A}, Int(A), Bd(A), Ext(A)$ للفضاءات التالية:

1. المعتاد
2. المتقطع
3. المتممة المنتهية
4. التافه
5. الشعاع الأيسر.

تمرين 36 :
لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من X أثبت ما يلي:

1. $Int(A) = A \setminus Bd(A)$
2. أعط مثالا تبين فيه أن عكس $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$ ليس بالضرورة صحيحا.
3. افرض أن $Bd(A) \cap Bd(B) = \emptyset$ أثبت أن عكس 2) صحيحا.

تمرين 37 :
أعط مثالا تبين فيه أن الدالة f التي تعين لكل مجموعة A مجموعتها الداخلية، أي $f(A) = Int(A)$ ليست تبادلية مع الدالة g التي تعين لكل مجموعة انغلاقيتها، أي $g(A) = \bar{A}$. أي أثبت أن $gf \neq fg$.

تمرين 38 :
ليكن X فضاء تبولوجي ولتكن A مجموعة جزئية من X نعرف مجموعة النقاط الخارجية $Ext(A)$ للمجموعة A بأنها $Ext(A) = Int(X \setminus A$. أثبت أن

1. $Ext(A \cup B) = Ext(A) \cap Ext(B)$.
2. $A \cap Ext(A) = \emptyset$.

تمرين 39 :
إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X. إذا عرفنا $Bd(A) = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$. فأثبت ما يلي:

1. $Int(A)$ و $Bd(A)$ منفصلتان، وأيضا $Bd(A) = \bar{A} \setminus Int(A)$
2. $Bd(A) = \emptyset$ إذا وفقط إذا كانت A مغلقة ومفتوحة.
3. U مجموعة مفتوحة إذا وفقط إذا كان $Bd(U) = \bar{U} \setminus U$.

تمرين 40 :
تعريف " يقال أن المجموعة المفتوحة U في الفضاء التوبولوجي X مجموعة مفتوحة منتظمة إذا كان $U = Int(\bar{U})$ ويقال أن المجموعة المغلقة M مجموعة مغلقة منتظمة إذا كان $M = \overline{Int(M)}$.
استنادا: إلى التعريف، أثبت أن

1. متممة المجموعة المفتوحة المنتظمة تكون مجموعة مغلقة منتظمة.
2. متممة المجموعة المغلقة المنتظمة تكون مجموعة مفتوحة منتظمة.

تمرين 41 :
أثبت ما يلي:

1. $Bd(A) \cap A = \emptyset$ إذا وفقط إذا كانت A مجموعة مفتوحة.
2. $Bd(A) = \emptyset$ إذا وفقط إذا كانت A مجموعة مغلقة ومفتوحة.
3. $Bd(Int(A)) \subset Bd(A) = \emptyset$ أعط مثالا يوضح أن المساواة لا تحقق.
4. إذا كانت $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ فإن $Bd(A) \cup Bd(B) = Bd(A \cup B)$.

تمرين 42 :
إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X، إذا عرفنا
$Bd(A) = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$ فأثبت ما يلي:

1. $Bd(A)$ و $Int(A)$ منفصلتان، وأيضا $Bd(A) = \bar{A} \setminus Int(A)$.
2. $Bd(A) = \emptyset$ إذا فقط و إذا كانت A مغلقة ومفتوحة.
3. A مجموعة مفتوحة في X إذا وفقط إذا كان $Bd(A) = \bar{A} \setminus A$.

تمرين 43 :
ليكن X فضاء توبولوجي، ولتكن A مجموعة جزئية من X. تعرف مجموعة النقاط الخارجية $Ext(A)$ للمجموعة A بأنها $Ext(A) = Int(X \setminus A)$ أثبت ان

1. $Int\left((X \setminus A) \cup (X \setminus B)\right) = Int(X \setminus A) \cap Int(X \setminus B)$
2. Int $A \cap In(X \setminus A) = \emptyset$.