المحتويات

تعريف تكامل ريمان

تعريف

نقول لمجموعة محدودة و مرتبة $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ أنها تمثل تجزيئا للفترة $[a, b]$ إذا كان $a = x_0 < \dots < x_n = b$. الفترات $[x_j, x_{j+1}]$ تسمى الفترة الجزئية للتجزيئ σ.
إذا كان $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ تجزيئا للفترة $[a, b]$ نعرف مقياس التجزيئ σ، العدد

$$\|\sigma\| = \sup_{1 \leq j \leq n-1} |x_{j+1} - x_j|.$$

نرمز لمجموع التجزيئات للفترة $[a, b]$ بالرمز: $\mathbb{P}[a, b]$

تعريف

لتكن $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة و $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ تجزيء للفترة $[a, b]$.
نعرف الأعداد التالية:

$$M_j = \sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x), \qquad m_j = \inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x),$$

$$U(f, \sigma) = \sum_{j=0}^{n-1} M_j (x_{j+1} - x_j), \quad L(f, \sigma) = \sum_{j=0}^{n-1} m_j (x_{j+1} - x_j).$$

العددين $U(f, \sigma)$ و $L(f, \sigma)$ يسميان على التوالي مجموع ريمان الأكبر و مجموع ريمان الأصغر للدالة f على التجزيئ σ.

تعريف

1. نقول إن تجزيئا $\sigma_1 = \{x_0, \ldots, x_n\}$ أدقّ أو أنعم من تجزيئ $\sigma_2 = \{y_0, \ldots, y_m\}$ إذا كان $\{y_0, \ldots, y_m\} \subset \{x_0, \ldots, x_n\}$ و نكتب $\sigma_2 < \sigma_1$.
2. إذا كان $\sigma_1 = \{x_0, \ldots, x_n\}$ و $\sigma_2 = \{y_0, \ldots, y_m\}$ تجزيئين للفترة $[a, b]$، نعرف التجزيئ $\sigma_1 \cup \sigma_2$ التجزيئ المعرف بترتيب النقاط $\{y_0, \ldots, y_m, x_0, \ldots, x_n\}$.

مبرهنة

لتكن $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة و σ_1 تجزيئا للفترة $[a, b]$. إذا كان $y \in [a, b]$ و $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ التجزيئ للفترة $[a, b]$ حيث $\sigma_2 = \{a, y, b\}$، فإن

$$L(f, \sigma) \leq L(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma).$$

نتيجة

إذا كان σ_1 تجزيئا أدق من تجزيئ σ_2 و إذا كانت $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة، فإن

$$L(f, \sigma_2) \leq L(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma_2)$$

و

$$U(f, \sigma_1) - L(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma_2) - L(f, \sigma_2).$$

نتيجة

إذا كان σ_1 و σ_2 تجزيئين للفترة $[a, b]$ و إذا كانت $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة، فإن

$$L(f, \sigma_1) \leq U(f, \sigma_2).$$

نتيجة

ليكن $\mathcal{I} = \{L(f,\sigma);\ \sigma \in \mathbb{P}[a,b]\}$ و $\mathcal{J} = \{U(f,\sigma),\ \sigma \in \mathbb{P}[a,b]\}$.
المجموعة $\mathcal{I}$ لها حد علوي أصغر و نرمز له بالرمز $L(f)$ و المجموعة $\mathcal{J}$ لها حد سفلي أكبر و نرمز له بالرمز $U(f)$.

نتيجة

لتكن $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة. إذا وجد تجزيئ σ للفترة $[a,b]$ بحيث $L(f,\sigma) = U(f,\sigma)$، فإن الدالة f قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a,b]$.

تعريف

نقول إنّ دالة محدودة $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$ إذا كان $L(f) = U(f)$ و نرمز لهذا العدد بالرمز:

$$L(f) = U(f) = \int_a^b f(x)\ dx$$

و يسمى تكامل الدالة f على الفترة $[a, b]$.
نرمز لمجموعة الدوال القابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$ بالرمز $\mathcal{R}([a, b])$.

مبرهنة

تكون دالة محدودة $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة لتكامل ريمان إذا و فقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$، يوجد تجزيئ $\sigma = (a = x_0, \ldots, x_n = b)$ بحيث $U(f, \sigma) - L(f, \sigma) \leq \varepsilon$.

مبرهنة

كل دالة مطردة على فترة $[a, b]$ قابلة لتكامل ريمان.

مبرهنة

كل دالة متصلة على فترة $[a, b]$ قابلة لتكامل ريمان.

تعريف

لتكن $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة و لتكن A مجموعة جزئية من $[a,b]$.
العدد $O(f,A) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) - \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ يسمي تذبذب الدالة f على المجموعة A.

مبرهنة

[مبرهنة داربو]
لتكن $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة محدودة. تكون الدالة f قابلة لتكامل ريمان على فترة $[a,b]$ إذا و فقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $\alpha > 0$ بحيث $U(f,\sigma) - L(f,\sigma) \leq \varepsilon$ لكل تجزيئ σ، حيث $\|\sigma\| < \alpha$.

نتيجة

لتكن $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة لتكامل ريمان و لتكن I قيمة تكاملها. إذاً لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\alpha > 0$ بحيث $|U(f, \sigma) - I| \leq \varepsilon$ و $|L(f, \sigma) - I| \leq \varepsilon$ لكل تجزيئ σ يحقق $\|\sigma\| < \alpha$.

ملاحظات

1. ليكن $\sigma_n = (x_0, \ldots, x_n)$ تجزيئا للفترة $[a, b]$ و $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ حيث $\lambda_j \in [x_{j-1}, x_j]$، $\forall\ j = 1, \ldots, n$ و نقول أن λ هو علامة على التجزيئ σ.
المجموع $R(f, \sigma, \lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) f(\lambda_j)$، يسمى مجموع ريمان على التجزيئ σ حسب العلامة λ. و بما أن $m_j \leq f(\lambda_j) \leq M_j$ لكل $1 \leq j \leq n$، فإن $L(f, \sigma) \leq R(f, \sigma) \leq U(f, \sigma)$.
إذا كانت الدالة f قابلة لتكامل ريمان و إذا كانت I قيمة تكاملها، فإنّ لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\alpha > 0$ بحيث $|R(f, \sigma) - I| \leq \varepsilon$، لكل تجزيئ σ، $|\sigma| < \alpha$.
2. نحصل على نفس النتيجة إذا عوضنا $f(\lambda_j)$ بأي عدد $c_j \in [m_j, M_j]$.

نتيجة

تكون دالة $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة لتكامل ريمان إذا و إذا فقط إذا لكل $\varepsilon > 0$، توجد دالتين درجيتين على الفترة $[a, b]$, f_ε و g_ε بحيث $f_\varepsilon \le g_\varepsilon$ و $\displaystyle\int_a^b (g_\varepsilon - f_\varepsilon)\, dx \le \varepsilon$.

مبرهنة

تكون دالة قابلة لتكامل ريمان على فترة $[a, b]$ إذا و فقط إذا كانت قابلة لتكامل ريمان على الفترات $[a, c]$ و $[c, b]$ و

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

لكل $c \in [a, b]$.

مبرهنة

فضاء الدوال القابلة لتكامل ريمان $[a, b]$ هو فضاء متجهات على $\mathbb{R}$.

مبرهنة

إذا كانت $f\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$ دالة قابلة لتكامل ريمان على فترة $[a,b]$ و إذا كانت $g\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، فإنّ الدالة $g\circ f$ قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a,b]$.

مبرهنة

[متباينة كوشي شوارتز]

لتكن f و g دالتين قابلتين لتكامل ريمان على فترة $[a, b]$. إذاً

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\ dx \int_a^b g^2(x)\ dx. \tag{1}$$

مبرهنة

[الصيغة الأولى للقيمة المتوسطة للتكامل]
لتكن f و g دالتين قابلتين لتكامل ريمان على فترة $[a, b]$. نفترض أنّ الدالة f متصلة و الدالة g لها إشارة ثابتة على الفترة $[a, b]$. إذاً يوجد $c \in [a, b]$ بحيث

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\ dx. \tag{2}$$

نتيجة

[متباينة منكوفزكي]
إذا كانت f و g دالتين قابلتين لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$، فإنّ
$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x) \ dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x) \ dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

مبرهنة

[الصيغة الثانية للقيمة المتوسطة للتكامل]
لتكن $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و موجبة و تناقصية و لتكن g دالة قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$. إذاً يوجد $c \in [a, b]$ بحيث

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(a)\int_a^c g(x)\ dx.$$

نتيجة

لتكن $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و مطردة على الفترة $[a, b]$ و لتكن g دالة قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$، فإنه يوجد $c \in [a, b]$ بحيث

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(a)\int_a^c g(x)\ dx + f(b)\int_c^b g(x)\ dx.$$

مبرهنة

[المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل و التكامل]

إذا كانت $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، فإن الدالة $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ هي دالة أصلية للدالة f، لكل $a \in I$.

مبرهنة

لتكن $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و لتكن $u\colon I \longrightarrow [a, b]$ دالة قابلة للإشتقاق. إذاً الدالة $F(x) = \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\ dt$ قابلة للإشتقاق على الفترة I و $F'(x) = u'(x)f(u(x))$، لكل $x \in I$.

مبرهنة

لتكن f و g دالتين من الدرجة C^n على فترة I، فإن

$$\int f(x)g^{(n)}(x)\,dx = \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p f^{(p)}(x)\,g^{(n-1-p)}(x) + (-1)^n \int g(x)f^{(n)}(x)\,dx.$$

مبرهنة

[مفكوك تايلور مع باقي تكامل]
لتكن $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة C^n. إذا كان a و x في I، فإن

$$f(x) = f(a) + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt.$$

تعريف

1 نقول إنّ دالة $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة لتكامل ريمان محليا على الفترة I إذا كان إقتصار الدالة على كل فترة $[a,b] \subset I$ قابلة لتكامل ريمان.
(كل دالة متصلة أو مطردة على فترة، فهي قابلة لتكامل ريمان محليا).

2 لتكن f دالة قابلة لتكامل ريمان محليا على فترة $[a,b[$ حيث $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
نقول إنّ تكامل الدالة f على الفترة $[a,b[$ متقارب إذا كانت النهاية
$\lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\ dt$ موجودة في $\mathbb{R}$. هذه النهاية تسمى تكامل الدالة f على الفترة
$[a,b[$ و نرمز له بالرمز $\int_a^b f(t)\ dt$.

3 لتكن f دالة قابلة لتكامل ريمان محليا على فترة $]a,b]$، حيث $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
نقول إنّ تكامل الدالة f على الفترة $]a,b]$ متقارب إذا كانت النهاية

تعريف

نقول إن تكامل دالة f على فترة I متقارب مطلقا إذا كان تكامل الدالة $|f|$ على فترة I متقاربا.

اختبار تقارب التكامل المعتل

مبرهنة

(اختبار كوشي)
لتكن $f\colon [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة لتكامل ريمان محليا (يمكن أن نعوض هذه الفرضية بأن تكون الدالة متصلة قطعة قطعة على كامل الفقرة)، حيث $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
يكون التكامل $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ متقاربا إذا و فقط إذا:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ c < b :\ \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq \varepsilon, \quad \forall x, y \in]c, b[.$$

هذا الإختبار هو اختبار كوشي لنهاية الدوال.

نتيجة

لتكن f دالة قابلة لتكامل ريمان محليا على فترة I. إذا كان التكامل $\int_I f(x)\,dx$ متقاربا مطلقا، فهو متقارب.

مبرهنة

لتكن $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ دالة موجبة قابلة لتكامل ريمان محليا. يكون التكامل $\int_I f(x)\,dx$ متقاربا إذا و فقط إذا وجد $M \geq 0$ بحيث $\int_a^b f(x)\,dx \leq M$ ، حيث $a < b$ في I.

نتيجة

إذا كانت f و g دالتين موجبتين و قابلتين لتكامل ريمان محليا على فترة I بحيث $f \leq g$.
إذا كان التكامل $\int_I g(x)\,dx$ متقاربا، فإن التكامل $\int_I f(x)\,dx$ متقارب.
إذا كان التكامل $\int_I f(x)\,dx$ غير متقارب، فإن التكامل $\int_I g(x)\,dx$ غير متقارب.

ملاحظة

لتكن f و g دالتين موجبتين و قابلتين لتكامل ريمان محليا على فترة I. نفترض أن $|f| \leq g$ على الفترة I. إذًا، إذا كان التكامل $\int_I g(x)\,dx$ متقاربا، فإن التكامل $\int_I |f(x)|\,dx$ متقارب أيضا.

أمثلة

1. التكامل $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ متقارب و ذلك لأن الدالة $\frac{\sin x}{x}$ يمكن تمديدها كدالة متصلة على الفترة $[0,1]$.
2. التكامل $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx$ متقارب و ذلك لأن
$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$$
. هذا التكامل متقارب لأن $\left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ و $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = 1$.
3. التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ متقارب لكل $\alpha > 0$.

إذا كان $b > a > 1$، باستعمال مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل (20)، يوجد

مبرهنة

لتكن $f\colon [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ دالة موجبة و قابلة لتكامل ريمان محليا.

1. إذا وجد $\alpha > 1$ بحيث $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} f(x) = c \in \mathbb{R}$ ، فإن تكامل الدالة f على الفترة $[1,+\infty)$ متقارب.
2. إذا وجد $\alpha < 1$ بحيث $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} f(x) = c \in]0,+\infty]$ ، فإن تكامل الدالة f على الفترة $[1,+\infty)$ غير متقارب.

نتيجة

لتكن $a, b \in \mathbb{R}$ و $f\colon]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ دالة موجبة قابلة لتكامل ريمان محليا.

1. إذا وجد $\alpha < 1$ بحيث $\lim_{x \to a^+} (x-a)^\alpha f(x) = 0$ ، فإن تكامل الدالة f على الفترة $]a, b]$ متقارب.
2. إذا وجد $\alpha > 1$ بحيث $\lim_{x \to +\infty} (x-a)^\alpha f(x) = +\infty$ ، فإن تكامل الدالة f على الفترة $]a, b]$ غير متقارب.

أمثلة

لتكن α و β في $\mathbb{R}$. نعرف الدالة $f_{\alpha,\beta}(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$، على الفترة $x \in [2, +\infty[$.

- إذا كان $\alpha > 1$، فإن لكل $1 < \gamma < \alpha$، $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\gamma} f_{\alpha,\beta}(x) = 0$ و بالتالي فإن تكامل الدالة $f_{\alpha,\beta}$ على الفترة $[2, +\infty[$ متقارب.
- إذا كان $\alpha < 1$، فإن لكل $1 > \gamma > \alpha$، $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\gamma} f_{\alpha,\beta}(x) = +\infty$ و بالتالي فإن تكامل الدالة $f_{\alpha,\beta}$ على الفترة $[2, +\infty[$ غير متقارب.
- إذا كان $\alpha = 1$، فإن $\displaystyle\int_{2}^{x} \frac{dt}{t(\ln t)^{\beta}} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dt}{t^{\beta}}$ و يكون تكامل الدالة $f_{1,\beta}$ على الفترة $[2, +\infty[$ متقاربا إذا و فقط إذا $\beta > 1$.

اختبار آبل للتقارب

مبرهنة

[مبرهنة آبل]
لتكن $f\colon [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة لتكامل ريمان محليا و $g\colon [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و تناقصية، حيث $a\in\mathbb{R}$، $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. نفترض أن:

1. يوجد $M\geq 0$ بحيث $\left|\int_x^y f(t)\,dt\right|\leq M$ لكل x و y في $[a,b[$،
2. $\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=0$

إذًا التكامل $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ متقارب.

البرهان

ليكن $a \leq x < y < b$. باستعمال المبرهنة (18)،

$$\begin{aligned} \left|\int_x^y f(t)g(t)\,dt\right| &= \left|g(x)\int_x^c f(t)\,dt + g(y)\int_c^y f(t)\,dt\right| \\ &\leq M(|g(x)| + |g(y)|). \end{aligned}$$

بما أن $\lim_{x\to b^-} g(x) = 0$ ، فإن $\lim_{x\to b^-} \int_x^y f(t)g(t)\,dt = 0$.

مثال

التكامل $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,dx$ متقارب لكل $\alpha > 0$.