

## المحتويات

- 1 فصول خاصة من المجموعات الجزئية
- 2 قياس لبياق الخارجي
- 3 قياس لبياق
- 4 الدوال القابلة للقياس
- 5 الدوال البسيطة
- 6 تكامل لبياق
- 7 مبرهنتات التقارب
- 8 تكامل ريمان و تكامل لبياق
- 9 التكامل المعتل و تكامل لبياق

نقدم في هذا الباب نظرية قياس ليبياق و نقارنها بنظرية تكامل ريمان. رأينا في باب تكامل ريمان أن نظرية تكامل ريمان لدالة على فترة مغلقة و محدودة  $[a, b]$  تعتمد على تقريب المساحة المحصورة بين بيان الدالة و المحور ( $ox$ ) بواسطة مستطيلات دقيقة بشكل متزايد. أما طريقة ليبياق فترتكز على تجزئة  $[A, B] \subset f([a, b])$  على المحور ( $oy$ ) أي نأخذ تجزئة  $y_0 < \dots < y_n$  للمجموعة  $f([a, b])$  ثم نحصر مساحة المجموعات  $E_k = f^{-1}([y_k, y_{k+1}[)$

## جبر و سيجمما جبر

### تعريف

1 لتكن  $\mathcal{A}$  تجمع من المجموعات الجزئية من  $\mathbb{R}$ . نقول إن  $\mathcal{A}$  جبر إذا حققت ما يلي:

$$\mathbb{R} \in \mathcal{A} \bullet$$

• إذا كان  $A \in \mathcal{A}$  فإن  $A^c \in \mathcal{A}$  و يسمى الإغلاق بالنسبة للمكمل

• إذا كان  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  فإن  $\bigcap_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$ ، و يسمى الإغلاق بالنسبة

لتقاطع محدود.

2 نقول إن المجموعة  $\mathcal{A}$ ، سيجمما جبر أو سيجمما حقل إذا كانت جبر و لكل

$(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$  في  $\mathcal{A}$ ، فإن  $\bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{A}$ . هذه الخاصية تسمى الإغلاق بالنسبة

لتقاطع قابل للعد

إذا كانت  $\mathcal{A}$  سيجما جبر، المجموعة  $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$  تسمى فضاء قياس، و المجموعات الجزئية من  $\mathcal{A}$  تسمى مجموعات قابلة للقياس.

## ملاحظة

إذا كان  $\mathcal{A}$  جبر، باستعمال مكل المجموعات، نحصل على مايلي:

$$\emptyset \in \mathcal{A} \quad 1$$

إذا كان  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ ، فإن  $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$  ويسمى الإغلاق بالنسبة للإتحاد المنته

إذا كانت  $\mathcal{A}$  سيجما جبر و  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$  متتالية من عناصر في  $\mathcal{A}$ ، فإن  $\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{A}$  ويسمى الإغلاق بالنسبة للإتحاد القابل للعد

## مثال

1  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$  جبر و سيجمما جبر. وهي أصغر سيجمما جبر في  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

2  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$  جبر و سيجمما جبر وهي أكبر سيجمما جبر في  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

3 لتكن  $\mathcal{A}$  تجمع المجموعات الجزئية  $A$  من  $\mathbb{R}$  بحيث  $A$  أو  $A^c$  قابلة للعد. المجموعة  $\mathcal{A}$  سيجمما جبر.

$\emptyset \in \mathcal{A}$  و كذلك إذا كانت  $A \in \mathcal{A}$ ، فإن  $A^c \in \mathcal{A}$ .

لتكن  $(A_j)_j$  متتالية في  $\mathcal{A}$ . إذا وجدت مجموعة  $A_p$  قابلة للعد، فإن المجموعة  $\bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j \subset A_p$  قابلة للعد و بالتالي فإن  $\bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{A}$  و أما إذا كانت كل المجموعات  $A_j$  غير قابلة للعد، فإن المجموعات  $A_j^c$  كلها قابلة للعد، و بالتالي المجموعة  $\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j^c \in \mathcal{A}$  و  $\bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{A}$ . إذاً المجموعة  $\mathcal{A}$ ، سيجما جبر

4 لتكن  $A$  تجمع المجموعات الجزئية  $A$  في  $\mathbb{R}$  بحيث  $A$  أو  $A^c$  له عدد منته من العناصر. المجموعة  $A$  جبر و ليست سيجما جبر

## مبرهنة

كل تقاطع لمجموعات جبر هو جبر و كل تقاطع لمجموعات سيجما جبر هو سيجما جبر.

## تعريف

لتكن  $B \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  تجمع غير خال من المجموعات الجزئية في  $\mathbb{R}$ . يوجد أصغر جبر يحوي  $B$  و نرسم له بالرمز  $A(B)$ . هذه المجموعة تسمى الجبر المولدة بالمجموعة  $B$ .  $A(B)$  هي تقاطع كل المجموعات الجبر التي تحوي  $B$  فهي بالتالي أصغر جبر يحوي  $B$ . كذلك يوجد أصغر سيجما جبر يحوي  $B$  و نرسم له بالرمز  $\sigma(B)$ . هذه المجموعة تسمى سيجما جبر المولدة بالمجموعة  $B$ .  $\sigma(B)$  هي تقاطع كل المجموعات سيجما جبر التي تحتوي على  $B$  فهي بالتالي أصغر سيجما جبر يحوي  $B$ .



1 لتكن  $A$  مجموعة جزئية من  $\mathbb{R}$  بحيث  $A \neq \emptyset$  و  $A \neq \mathbb{R}$ . سيجما جبر المولدة بالمجموعة  $\{A\}$  هي  $\{\emptyset, \mathbb{R}, A, A^c\}$ .

2 إذا كان  $\mathcal{F} = \{A, B, C\}$  تجزئ للمجموعة  $\mathbb{R}$  فإن

$$\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}(\mathcal{F}) = \{\emptyset, \mathbb{R}, A, B, C, A \cup B = C^c, A \cup C = B^c, B \cup C = A^c\}$$

لتكن  $\mathcal{A}$  تجمع المجموعات الجزئية القابلة للعد أو مكملها قابل للعد.  
أثبت أن المجموعة  $\mathcal{A}$ ، سيجما جبر مولدة بالمجموعات  $S = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ .

## بوريل سيجمما جبر

### تعريف

سيجمما جبر المولدة بالمجموعات  $\{[a, b[: (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$  تسمى بوريل سيجمما جبر على  $\mathbb{R}$  و نرمز لها بالرمز  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ . كل عنصر من  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  يسمى مجموعة بوريل في  $\mathbb{R}$ .

لتكن  $A$  و  $B$  تجمعين من المجموعات الجزئية في  $\mathbb{R}$ .

$$\sigma(A) = \sigma(B) \iff \begin{cases} \forall A \in \mathcal{A} & A \in \sigma(B) \\ & \& \\ \forall B \in \mathcal{B} & B \in \sigma(A) \end{cases}$$

## مبرهنة

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  مولدة باحدى المجموعات التالية:

$$\{]a, b[: (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

المجموعات المفتوحة في  $\mathbb{R}$

المجموعات المغلقة في  $\mathbb{R}$

$$\{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\}$$

$$\{]-\infty, a]: a \in \mathbb{R}\}$$

## قياس ليباق الخارجي

### تعريف

نقول إن دالة  $[0, \infty]$   $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  هو قياس خارجي على  $\mathbb{R}$  إذا حققت  
 الخصائص التالية:

$$\mu^*(\emptyset) = 0 \quad 1$$

إذا كان  $A \subset B$  فإن  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$  (نقول إن  $\mu^*$  تزايدية) 2

إذا كانت  $(A_n)_n$  متتالية من المجموعات الجزئية في  $\mathbb{R}$ ، فإن 3

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n)$$

نعطي مثالا لقياس خارجي على  $\mathbb{R}$  يساعدنا في تكوين مقياس ليبياق على  $\mathbb{R}$ .

### مبرهنة

لتكن  $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  تجمع من المجموعات الجزئية في  $\mathbb{R}$  بحيث  $\emptyset, \mathbb{R} \in A$ . إذا كانت  $\rho: A \rightarrow [0, +\infty]$  دالة حيث  $\rho(\emptyset) = 0$ . لكل مجموعة جزئية  $A \subset \mathbb{R}$ ، نعرف

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \rho(A_n) : A_n \in A, A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right\} \quad 1$$

الدالة  $\mu^*$  قياس خارجي على  $\mathbb{R}$ .

إذا أخذنا  $\mathcal{I}$  تجمع الفترات المفتوحة في  $\mathbb{R}$  و الدالة  $\rho(I) = \mathcal{L}(I)$  و التي تمثل طول الفترة. في هذه الحالة نرمز بالمقياس الخارجي بالرمز  $\lambda^*$  و نسميه قياس ليباق الخارجي.

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}(I_n) : I_n \in \mathcal{I}, A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \right\}.$$

هذا المقياس الخارجي يحقق الخصائص التالية:

تمهيدية

لكل فترة  $I$  في  $\mathbb{R}$ ،  $\lambda^*(I) = \mathcal{L}(I)$ .



## تمهيدية

إذا كانت  $\Omega$  مجموعة مفتوحة في  $\mathbb{R}$  و  $(I_n)_n$  أجزاء المترابطة، فإن

$$\lambda^*(\Omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}(I_n).$$

### مبرهنة

لكل مجموعة جزئية  $A \subset \mathbb{R}$ ،

$$\lambda^*(A) = \inf_{O \in \mathcal{O}_A} \lambda^*(O)$$

حيث  $\mathcal{O}_A$  تجمع المجموعات المفتوحة التي تحوي المجموعة  $A$ .

ونستنتج من كل ماسبق المبرهنة التالية:

نتيجة

إذا كانت  $A$  مجموعة قابلة للعد في  $\mathbb{R}$ ، فإن  $\lambda^*(A) = 0$ .

بما أن  $\lambda^*\{a\} = \mathcal{L}([a, a]) = 0$  فإنه إذا كان  $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ، فإن

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*\{a_n\} = 0$$

نتيجة

$\mathbb{R}$  و  $[a, b]$  غير قابلة للعد، لكل  $a \neq b$ .

## مبرهنة

$$\text{لكل } A \subset \mathbb{R} \text{ و لكل } r \in \mathbb{R}, \text{ فإن } \lambda^*(A + r) = \lambda^*(A) \text{ و}$$
$$\lambda^*(rA) = |r|\lambda^*(A)$$

## المجموعات القابلة للقياس

### تعريف

ليكن  $\mu^*$  قياس خارجي على  $\mathbb{R}$ .  
نقول إن مجموعة جزئية  $A$  في  $\mathbb{R}$  قابلة للقياس بالنسبة للقياس الخارجي  $\mu^*$  إذا حققت  
الشرط التالي:

$$\forall X \subset \mathbb{R} : \mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c).$$

## مبرهنة

إذا كانت  $\mathcal{B}$  تجمع المجموعات القابلة للقياس في  $\mathbb{R}$  بالنسبة للقياس الخارجي  $\mu^*$ ، فإن  $\mathcal{B}$  سيجمع جبراً.

فصول خاصة من المجموعات الجزئية  
قياس لياق الخارجي  
قياس لياق  
الدوال القابلة للقياس  
الدوال البسيطة  
تكامل لياق  
مبرهنات التقارب  
تكامل ريمان و تكامل لياق  
التكامل المعتل و تكامل لياق

مبرهنة

كل مجموعة بورل قابلة للقياس أي  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}$ .

نقول إن مجموعة جزئية  $A \subset \mathbb{R}$  صفرية بالنسبة للقياس الخارجي  $\lambda^*$  إذا وجدت مجموعة  $B$  قابلة للقياس بحيث  $A \subset B$  و  $\lambda^*(B) = 0$ .  
 أثبت أن كل مجموعة صفرية قابلة للقياس.

الحل

إذا كانت  $A$  مجموعة صفرية، فإنه يوجد  $B \in \mathcal{B}$  بحيث  $A \subset B$  و  $\lambda^*(B) = 0$ . إذا كانت  $X$  مجموعة جزئية من  $\mathbb{R}$ ، فإن  $\lambda^*(X \cap A) = 0$  و

$$\lambda^*(X) \geq \lambda^*(X \cap A^c) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c).$$

و المتباينة العكسية تنتج من تعريف القياس الخارجي  $\lambda^*$ . إذا المجموعة  $A$  قابلة للقياس بالنسبة للقياس الخارجي  $\lambda^*$ .



## نظرية القياس

### تعريف

لتكن  $\mathcal{A}$  سيجما جبر في  $\mathbb{R}$ . نقول إن دالة  $[0, \infty] \rightarrow \mathcal{A} : \mu$  قياس (قياس موجب) على  $\mathcal{A}$  إذا حققت الشروط التالية:

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad 1$$

$$\text{لكل متتالية منفصلة } (A_n)_n \in \mathcal{A} \text{، } \mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \text{، (خاصية)} \quad 2$$

التجميع القابل للعد

المجموعة  $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$  تسمى فضاء قياسي.

## مثال

- 1 إذا كانت  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$  و  $\mu(A) = \#A$  (عدد عناصر المجموعة  $A$  إذا كانت  $A$  منتهية و  $+\infty$  في الحالة الأخرى). الدالة  $\mu$  قياس على  $\mathcal{A}$ . هذا القياس يسمى قياس العد (the counting measure).
- 2 إذا كان  $a \in \mathbb{R}$ ، نعرف  $\delta_a(A) = 1$  إذا كان  $a \in A$  و  $0$  إذا كان  $a \notin A$ .  $\delta_a$  قياس و يسمى قياس نقطي عند النقطة  $a$  (point mass at  $a$ ) أو قياس ديراك عند النقطة  $a$  (the Dirac measure at  $a$ ).

3 لتكن  $\mu$  الدالة المعرفة على  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  بما يلي:  $\mu(A) = 0$  إذا كانت المجموعة  $A$  منتهية و  $\mu(A) = +\infty$  إذا كانت المجموعة  $A$  غير منتهية. الدالة  $\mu$  لا تحقق خاصية التجميع القابل للعد بما أن  $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{n\}$ ، و لكن

$$\mu(\mathbb{N}) = +\infty \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{n\}) = 0$$

و بالتالي الدالة  $\mu$  ليست قياساً.

## مبرهنة

لتكن  $\mathcal{A}$  سيجما جبر في  $\mathbb{R}$  و  $\mu$  قياسا على  $\mathcal{A}$ . القياس  $\mu$  يحقق الخواص التالية:  
إذا كانت  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  عدد منته من المجموعات الجزئية المنفصلة، فإن

$$\mu(\cup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

إذا كان  $A, B \in \mathcal{A}$  حيث  $A \subset B$ ، فإن  $\mu(A) \leq \mu(B)$  ( $\mu$  مطردة)

خاصية ما دون التجميع القابل للعد: إذا كانت  $(A_n)_n \in \mathcal{A}$  و  $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ ، فإن

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

إذا كانت  $(A_n)_n$  متتالية تزايدية في  $\mathcal{A}$  و  $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ ، فإن

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

إذا كان  $A, B \in \mathcal{A}$  و  $A \subset B$  و  $\mu(B) < +\infty$ ، فإن  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$  (النتيجة تبقى صحيحة إذا كانت  $\mu(A) < \infty$ ).

لتكن  $(A_n)_n$  متتالية تناقصية في  $\mathcal{A}$  و  $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$  إذا كانت  $\mu(A_1) < \infty$  فإن  $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$ .

ليكن  $\mathcal{A}$  سيجمما جبر على  $\mathbb{R}$  و  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  دالة على  $\mathcal{A}$ .  
أثبت أن  $\mu$  قياس إذا و فقط إذا :

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad \mathbf{1}$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \mathbf{2}$$

إذا كان  $A \cap B = \emptyset$

إذا كانت  $(A_n)_n$  متتالية تزايدية في  $\mathcal{A}$ ، فإن  $\mathbf{3}$

$$\mu(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

الحل

إذا كانت  $\mu$  قياساً، فإنها تحقق الخاصيتين 1. و 2. لتكن  $(A_n)_n$  متتالية تزايدية في  $\mathcal{A}$ ،  
 ولتكن  $B_1 = A_1$  و  $B_n = A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$  لكل  $n \in \mathbb{N}$ . المتتالية  $(B_n)_n$  منفصلة  
 و  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$  إذاً

$$\begin{aligned} \mu \left( \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \mu(B_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu \left( \bigcup_{j=1}^n B_j \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$



عكسياً، إذا كانت دالة  $\mu$  تحقق الخصائص 1، 2، و 3، و  $(A_n)_n$  متتالية منفصلة من المجموعات القابلة للقياس. المتتالية  $(B_n = \cup_{j=1}^n A_j)_n$  تزايدية و

$$\cup_{n=1}^{+\infty} A_n = \cup_{n=1}^{+\infty} B_n \text{ إذاً}$$

$$\mu(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \mu(A_j) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

## مبرهنة أحادية القياس

### مبرهنة

ليكن  $\mu$  و  $\nu$  قياسين على الفضاء  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  حيث يوجد فصل  $\mathcal{C}$  من المجموعات القابلة للقياس يحقق الخصائص التالية:

$\mathbb{R} \in \mathcal{C}$  و إذا كانت  $A, B \in \mathcal{C}$ ، فإن  $A \cap B \in \mathcal{C}$

$\mathcal{C}$  تولد سيجما الجبر  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ . ( $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ )

لكل  $C \in \mathcal{C}$   $\mu(C) = \nu(C) < +\infty$

إذاً  $\mu = \nu$

1

2

3

نفترض أن القياسين  $\mu$  و  $\nu$  يحققان فرضيات المبرهنة (34) نعرف مجموعة تقاطع القياسين التالية  $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : \mu(A) = \nu(A)\}$ . الفصل  $\mathcal{F}$  يحقق الخصائص التالية:

- 1 إذا كانت  $A \in \mathcal{F}$ ، فإن  $A^c \in \mathcal{F}$  وذلك لأن  $\mu(A^c) = \mu(\mathbb{R}) - \mu(A) = \nu(\mathbb{R}) - \nu(A) = \nu(A^c)$
- 2 إذا كانت  $A, B \in \mathcal{F}$  و  $A \subset B$ ، فإن  $B \cap A^c \in \mathcal{F}$  وبالتالي فإن  $\mu(A) + \mu(B \cap A^c) = \nu(A) + \nu(B \cap A^c)$   
 $\mu(B \cap A^c) = \nu(B \cap A^c)$
- 3 إذا كانت  $(A_n)_n$  متتالية مطردة من المجموعة  $\mathcal{F}$ ، فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n \in \mathcal{F}$

## مبرهنة

لتكن  $A \in \mathcal{F}$ . المجموعة:  $\tilde{A} = \{B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : A \cup B, B \cap A^c, A \cap B^c \in \mathcal{F}\}$   
سيجما جبر في  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

## نتيجة

$$\tilde{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, A \in \mathcal{C}$$

## البرهان

إذا كان  $A, B \in \mathcal{C}$ ، فإن  $A \cap B \in \mathcal{C}$  و بالتالي فإن  $\mu(A \cap B) = \nu(A \cap B)$ . من ناحية أخرى، بما أن  $\mu(A) = \nu(A)$ ، فإن  $\mu(A \cap B^c) = \nu(A \cap B^c)$  وكذلك  $\mu(A^c \cap B) = \nu(A^c \cap B)$  و بالتالي فإن  $\mu(A \cup B) = \nu(A \cup B)$ . إذاً  $\tilde{A}$  سيجمعا جبر و بما أنها تحوي  $\mathcal{C}$  فإن  $\tilde{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ .

## مبرهنة

لتكن  $\mu$  و  $\nu$  قياسين على الفضاء القياسي  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  و نفترض أنه يوجد فصل  $\mathcal{C}$  من المجموعات القابلة للقياس تحقق الخصائص التالية:

إذا كانت  $A, B \in \mathcal{C}$ ، فإن  $A \cap B \in \mathcal{C}$  1

$\mathcal{C}$  تولد سيجما جبر  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  2

لكل  $C \in \mathcal{C}$   $\mu(C) = \nu(C) < +\infty$  3

توجد  $(X_n)_n$  متتالية تزايدية في  $\mathcal{C}$  بحيث  $\mathbb{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n$  4

إذاً  $\mu = \nu$

## قياس ليبياق

### مبرهنة

اختصار قياس ليبياق الخارجي  $\lambda^*$  على سيجما الجبر  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  قياس. نرمز بهذا القياس بالرمز  $\lambda$  ويسمى قياس ليبياق على  $\mathbb{R}$ .  $\lambda$  هو القياس الوحيد على  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  الذي يحقق الخصائص التالية:

$$\lambda([0, 1]) = 1$$

لكل  $x \in \mathbb{R}$  و لكل  $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ . (نقول أن  $\lambda$  لا متغيرة بالإنسحاب)

1

2

في الحقيقية مقياس لياق  $\lambda$  يمكن تعريفه على سيحما الجبر  $\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \mathcal{N}$  حيث  $\mathcal{N}$  تجمع المجموعات الصفرية و قد أثبتنا أن  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$ .



## خصائص عامة للدوال القابلة للقياس

في ما يلي  $\Omega$  مجموعة قابلة للقياس في  $\mathbb{R}$ .

### تعريف

نقول إن دالة  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  قابلة للقياس إذا كان  $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$  لكل مجموعة بوريل  $A$  ( $A \in \mathcal{B}$ ).

سنرمز لمجموع الدوال القابلة للقياس على  $\Omega$  بالرمز  $\mathcal{M}(\Omega)$  و لمجموع الدوال الموجبة و القابلة للقياس على  $\Omega$  بالرمز  $\mathcal{M}^+(\Omega)$ .

## مبرهنة

لتكن  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  دالة. التقارير التالية متكافئة  
الدالة  $f$  قابلة للقياس.

$$a \in \mathbb{R} \text{ لكل } f^{-1}[a, +\infty[ \in \mathcal{B}$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ لكل } f^{-1] - \infty, a[ \in \mathcal{B}$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ لكل } f^{-1] - \infty, a[ \in \mathcal{B}$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ لكل } f^{-1} a, b[ \in \mathcal{B}$$

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ لكل } f^{-1}[a, b[ \in \mathcal{B}$$

هذه المبرهنة هي نتيجة أن سيجمما جبر بورال  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  مولدة بأي واحدة من المجموعات التالية:

$$\{[a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\} \quad 1$$

$$\{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\} \quad 2$$

$$\{]-\infty, a[: a \in \mathbb{R}\} \quad 3$$

$$\{] - \infty, a[: a \in \mathbb{R}\} \quad 4$$

$$\{]a, b[: a, b \in \mathbb{R}\} \quad 5$$

$$\{[a, b[: a, b \in \mathbb{R}\} \quad 6$$

$$\{]a, b[: a, b \in \mathbb{R}\} \quad 7$$

$$\{[a, b[: a, b \in \mathbb{R}\} \quad 8$$

إذا كانت  $\Omega$  مجموعة مفتوحة، كل دالة  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  متصلة، قابلة للقياس.

## خصائص الدوال القابلة للقياس

مبرهنة

إذا كانت  $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ ، فإن الدالة  $|f| \in \mathcal{M}(\Omega)$  1  
إذا كانت  $(f_n)_n$  متتالية في  $\mathcal{M}(\Omega)$ ، فإن الدوال التالية قابلة للقياس 2

$$g = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

$$h = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

$$k = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

## نتيجة

1 إذا كانت  $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ ، فإن الدوال  $f^+ = \sup(f, 0)$  و  $f^- = \inf(f, 0)$  قابلة للقياس.

2 إذا كانت  $(f_n)_n$  متتالية من الدوال القابلة للقياس و متقاربة ونهايتها  $f$ ، فإن الدالة  $f$  قابلة للقياس.

3 إذا كانت  $(f_n)_n$  متتالية من الدوال القابلة للقياس و إذا كانت  $C$  مجموعة النقاط  $x \in \Omega$  حيث تكون المتتالية  $(f_n)_n(x)$  لها نهاية في  $\overline{\mathbb{R}}$ ، فإن المجموعة  $C$  قابلة للقياس.

## الدوال البسيطة

### تعريف

نقول إن دالة  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}(\overline{\mathbb{R}})$  بسيطة إذا كانت قابلة للقياس و تأخذ عدد منته من القيم.

إذا كانت  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  دالة بسيطة وإذا كانت  $\{c_1, \dots, c_m\}$  قيم الدالة المختلفة،

فإن  $f = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{A_j}$ ، حيث  $A_j = f^{-1}\{c_j\}$  و الدالة  $f$  قابلة للقياس إذا و فقط إذا كانت المجموعات  $A_j$  قابلة للقياس لكل  $j = 1, \dots, m$ .

## مبرهنة

لتكن  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للقياس و محدودة، توجد متتالية من الدوال البسيطة متقاربة بانتظام على  $\Omega$  و نهايتها  $f$ . 1

إذا كانت الدالة  $f$  موجبة و قابلة للقياس، توجد متتالية موجبة و تزايدية من الدوال البسيطة و نهايتها  $f$ . 2



## تكامل ليبياق

تعريف تكامل ليبياق للدوال القابلة للقياس، نعرف أولاً تكامل الدوال البسيطة والموجبة. بعدها نعرف تكامل ليبياق للدوال الموجبة والقابلة للقياس.

### تعريف

إذا كانت  $f = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{\{f=c_k\}}$  دالة موجبة وبسيطة، نعرف تكامل ليبياق للدالة  $f$  بما يلي:

$$\int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) = \sum_{k=1}^N c_k \lambda(\{f = c_k\}). \quad 2$$

## مبرهنة

لتكن  $\mathcal{E}^+$  مجموعة الدوال البسيطة و الموجبة المعرفة على  $\Omega$ . تكامل الدوال في  $\mathcal{E}^+$  يحقق الخصائص التالية:

$$f \in \mathcal{E}^+ \text{ لكل } \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ لكل } \int_{\Omega} \alpha f(x) d\lambda(x) = \alpha \int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) \quad 1$$

$$f, g \in \mathcal{E}^+ \text{ لكل } \int_{\Omega} (f+g)(x) d\lambda(x) = \int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) + \int_{\Omega} g(x) d\lambda(x) \quad 2$$

$$f \leq g \text{ حيث } f, g \in \mathcal{E}^+ \text{ لكل } \int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) \leq \int_{\Omega} g(x) d\lambda(x) \quad 3$$

إذا كانت  $(f_n)_n$  متتالية تزايدية في  $\mathcal{E}^+$  وإذا كانت  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f \in \mathcal{E}^+$  فإن

$$\int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\lambda(x)$$

## تمهيدية

لتكن  $(f_n)_n$  متتالية تزايدية في  $\mathcal{E}^+$  وإذا كانت  $g \in \mathcal{E}^+$  بحيث  $g \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ ، فإن

$$\int_{\Omega} g(x) d\lambda(x) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\lambda(x)$$

## تعريف

لتكن  $f$  دالة موجبة قابلة للقياس، نعرف تكامل الدالة كما يلي:

$$\int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) = \sup\left\{ \int_{\Omega} g(x) d\lambda(x) : g \leq f, g \in \mathcal{E}^+ \right\}$$

هذا العدد حقيقي موجب أو  $+\infty$ .

## ملاحظة

إذا كانت  $f$  دالة موجبة قابلة للقياس، فحسب المبرهنة (48) توجد متتالية تزايدية  $(f_n)_n$  في  $\mathcal{E}^+$  متتقاربة ونهايتها الدالة  $f$ . ونستنتج مما سبق أن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\lambda(x) \leq \int_{\Omega} f(x) d\lambda(x)$$

(52) فإن كل دالة  $g \in \mathcal{E}^+$ ، حيث  $g \leq f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ ، فإنها تحقق

$$\int_{\Omega} g(x) d\lambda(x) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\lambda(x)$$

إذًا حسب التعريف ( 53 )  $\int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\lambda(x)$  و بالتالي فإن

$$\int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\lambda(x).$$

هذه النتيجة غير مرتبطة بالمتتالية  $(f_n)_n$  في  $\mathcal{E}^+$  التي تتقارب ونهايتها الدالة  $f$ . و بالتالي نحصل على المبرهنة التالية:

## مبرهنة

لتكن  $f$  و  $g$  في  $\mathcal{M}^+(\Omega)$  و إذا كان  $\alpha \geq 0$  فإن

$$\int_{\Omega} \alpha f(x) d\lambda(x) = \alpha \int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) \quad 1$$

$$\int_{\Omega} (f + g)(x) d\lambda(x) = \int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) + \int_{\Omega} g(x) d\lambda(x) \quad 2$$

$$\int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) \leq \int_{\Omega} g(x) d\lambda(x) \quad \text{فإن } f \leq g \text{ إذا كان } \quad 3$$



## تعريف

لتكن  $f, g$  دالتين. نقول إن  $f = g$  خارج مجموعة صفرية أو  $f = g$  a.e. إذا كانت المجموعة  $\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$  صفرية. وإذا كانت مجموعة  $A$  قابلة للقياس، فإن الدالة  $\chi_A = 0$  a.e. إذا وفقط إذا  $\lambda(A) = 0$ .

## تعريف

نقول إن دالة  $f$  معرفة a.e. على  $\Omega$  إذا وجدت مجموعة صفرية  $N$  بحيث تكون الدالة  $f$  معرفة على  $\Omega \setminus N$ .

## تعريف

نقول إن متتالية  $(f_n)_n$  معرفة على  $\Omega$  متقاربة a.e. ونهايتها دالة  $f$  إذا كانت المجموعة  $\{x \in \Omega : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$  مجموعة صفرية.

## مبرهنة

لتكن  $f, g$  دالتين في  $\mathcal{M}^+(\Omega)$ .

$$\int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) = 0 \text{ إذا و فقط إذا } f = 0 \text{ a.e.} \quad 1$$

$$\int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) = \int_{\Omega} g(x) d\lambda(x) \text{ فإن } f = g \text{ a.e. إذا كانت} \quad 2$$

## تعريف

لتكن  $f: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  دالة قابلة للقياس. نعرف الدالتين  $f^+ = \sup(f, 0)$  و  $f^- = \sup(-f, 0)$ . إذا  $f = f^+ - f^-$  و  $|f| = f^+ + f^-$ .

نقول إن الدالة  $f$  قابلة لتكامل ليبياق إذا كانت  $\int_{\Omega} f^+(x) d\lambda(x)$  و  $\int_{\Omega} f^-(x) d\lambda(x)$  في  $\mathbb{R}$  و

$$\int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) = \int_{\Omega} f^+(x) d\lambda(x) - \int_{\Omega} f^-(x) d\lambda(x)$$

يرمز لتكامل الدالة  $f$  إذا كانت قابلة لتكامل ليباق. كذلك إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للقياس  
و  $\int_{\Omega} f^{+}(x) d \lambda(x) < +\infty$  أو  $\int_{\Omega} f^{-}(x) d \lambda(x) < +\infty$  سنرمز بنفس الرمز  
لتكامل ليباق للدالة على  $\Omega$ .  
نرمز لمجموعة الدوال القابلة لتكامل ليباق على  $\Omega$  بالرمز  $\mathcal{L}^1(\Omega)$ .

## مبرهنة

المجموعة  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  فضاء متجهات على  $\mathbb{R}$  و الدالة  $f \mapsto \int_{\Omega} f(x) d\lambda(x)$  شكل خطي على الفضاء  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  و

$$\left| \int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)| d\lambda(x)$$

لكل  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ .

## نتيجة

1 إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للقياس و  $a \leq f \leq b$  و  $\lambda(\Omega) < +\infty$ ، فإن

$$a\lambda(\Omega) \leq \int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) \leq b\lambda(\Omega): \text{ و } f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$$

2 إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للقياس و  $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  و  $f \leq g$ ، فإن

$$\int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) \leq \int_{\Omega} g(x) d\lambda(x)$$

3 إذا كانت  $E$  مجموعة صفرية قابلة للقياس، فإن  $\int_E f(x) d\lambda(x) = 0$  لكل دالة قابلة للقياس  $f$ .

- 1 إذا كانت دالة  $f$  قابلة للتكامل فإن  $\{x \in \Omega : f(x) = \pm\infty\}$  مجموعة صفرية.
- 2 مجموعة الدوال  $a.e. f = 0$  هو فضاء جزئي من فضاء المتجهات  $L^1(\Omega)$  و مغلق بالنسبة للعمليات  $(\sup, \inf)$ . سنرمز بالرمز  $L^1(\Omega)$  خارج القسمة الفضاء  $L^1(\Omega)$  بفضاء الدوال الصفرية  $a.e.$   
نقول أن دالتين  $f, g$  متساويتين في  $L^1(\Omega)$  إذا كانت  $a.e. f = g$



## مبرهنة التقارب المطرد

مبرهنة

[مبرهنة التقارب المطرد]  
إذا كانت  $(f_n)_n \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ ، فإن

$$\int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\lambda(x).$$

## البرهان:

لكل عدد طبيعي  $n$ ، توجد متتالية تزايدية موجبة  $(\varphi_{n,j})_j$  في  $\mathcal{E}^+$  تتقارب و نهايتها  $f_n$ .  
لكل  $j$ ، نعرف  $\psi_j = \sup_{1 \leq n \leq j} \varphi_{n,j}$ . المتتالية  $(\psi_j)_j \in \mathcal{E}^+$  تزايدية لأن

$$\psi_j = \sup_{1 \leq n \leq j} \varphi_{n,j} \leq \sup_{1 \leq n \leq j} \varphi_{n,j+1} \leq \sup_{1 \leq n \leq j+1} \varphi_{n,j+1} = \psi_{j+1}.$$

لكل  $\varphi_{n,j} \leq \psi_j$ ،  $j \geq n$  وبالتالى  $f_n = \lim_{j \rightarrow +\infty} \varphi_{n,j} \leq \lim_{j \rightarrow +\infty} \psi_j$  إذاً  
 $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \leq \lim_{j \rightarrow +\infty} \psi_j$  من ناحية أخرى المتباينات  $\varphi_{n,j} \leq f_n \leq f$  تثبت أن  
 $\lim_{j \rightarrow +\infty} \psi_j \leq f$  و  $\psi_j \leq f$  المتتالية  $(\psi_j)_j$  تزايدية في  $\mathcal{E}^+$  ونهايتها الدالة  $f$ . إذاً  
 من ناحية أخرى  $\psi_j \leq f_j$ . إذاً  $\int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi_j(x) d\lambda(x)$   
 $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi_j(x) d\lambda(x) \leq \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_j(x) d\lambda(x) \leq \int_{\Omega} f(x) d\lambda(x)$ .

## نتيجة

إذا كانت  $(f_n)_n \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ ، فإن

$$\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\lambda(x).$$

## نتيجة

إذا كانت  $f \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ ، فإن لكل  $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ، الدالة

$$\mu(A) = \int_{\Omega} f(x) \chi_A(x) d\lambda(x)$$

قياس على  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ .

## تمهيدية فاتو

### تمهيدية

[ تمهيدية فاتو ]

إذا كانت  $(f_n)_n \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ ، فإن

$$\int_{\Omega} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\lambda(x) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\lambda(x).$$

$$\int_{\mathbb{R}} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\lambda(x) = 0, f_n = n^2 \chi_{[0, \frac{1}{n}]} \text{ لتكن و}$$
$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda(x) = +\infty$$

## مبرهنة التقارب المسقوف

### مبرهنة

[مبرهنة التقارب المسقوف أو مبرهنة لياق]

لتكن  $(f_n)_n \in \mathcal{M}(\Omega)$ . نفترض أن

المتتالية  $(f_n)_n$  تتقارب a.e. و نهايتها دالة  $f$  معرفة a.e.

توجد دالة موجبة قابلة للتكامل  $g$  بحيث:  $|f_n| \leq g$  a.e. لكل  $n$ .

إذاً المتتالية  $(f_n)_n$  و الدالة  $f$  قابلة للتكامل و

$$\int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\lambda(x).$$



## مبرهنة

لتكن  $(f_n)_n \in \mathcal{M}(\Omega)$ . نفترض أنه توجد دالة موجبة قابلة للتكامل  $g$  بحيث لكل  $n$ ،  
إذا  $|f_n| \leq g$  a.e.

$$\int_{\Omega} \underline{\lim} f_n(x) d\lambda(x) \leq \underline{\lim} \int_{\Omega} f_n(x) d\lambda(x) \quad 3$$

$$\int_{\Omega} \overline{\lim} f_n d\lambda(x) \geq \overline{\lim} \int_{\Omega} f_n(x) d\lambda(x) \quad 4$$

إذا كانت المتتالية  $(f_n)_n$  تتقارب a.e. على  $\Omega$  و نهايتها دالة قابلة للقياس  $f$  معرفة a.e. فإن  $f \in L^1(\Omega)$  و

$$\int_{\Omega} f(x) d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\lambda(x) \quad 5$$

تكن  $f$  دالة قابلة للتكامل على  $[0, +\infty[$ . أوجد

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-n \sin^2 x} f(x) dx.$$

**الحل** لتكن  $(f_n)_n$  المتتالية المعرفة بما يلي:  $f_n(x) = e^{-n \sin^2 x} f(x)$  على  $[0, \infty[$ .

$A = \{x : f(x) = \pm\infty\} \cup \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$ . لكل  $x \notin A$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$  و  $|f_n| \leq |f|$  و الدالة  $f$  قابلة للتكامل. إذًا

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-n \sin^2 x} f(x) dx = 0.$$

## تكامل ريمان و تكامل ليبياق

ليكن  $\lambda$  قياس ليبياق على  $\mathcal{B}$  سيجمما جبر الدوال القابلة لقياس ليبياق على الفترة  $[a, b]$ . إذا كانت  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  دالة قابلة لتكامل ريمان، فإن  $\int_a^b f(x) dx$  يرمز لتكامل ريمان للدالة  $f$  على الفترة  $[a, b]$  وإذا كانت الدالة قابلة لتكامل ليبياق على الفترة  $[a, b]$ ، فإن  $\int_{[a,b]} f(x) d\lambda(x)$  يرمز لتكامل ليبياق للدالة  $f$  على الفترة  $[a, b]$ .

## مبرهنة

لتكن  $f$  دالة محدودة على فترة  $[a, b]$ . إذا كانت  $f$  قابلة لتكامل ريمان على الفترة  $[a, b]$ ، فإن الدالة  $f$  قابلة لتكامل ليبياق  $[a, b]$  و

$$\int_{[a, b]} f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(x) dx.$$

## مبرهنة

لتكن  $f$  دالة محدودة على فترة  $[a, b]$ .  
الدالة  $f$  قابلة لتكامل ريمان على الفترة  $[a, b]$  إذا و فقط إذا كانت مجموعة النقاط  
حيث تكون الدالة  $f$  غير متصلة مجموعة صفرية.  
عكسياً، إذا كانت مجموعة النقاط حيث تكون الدالة  $f$  غير متصلة مجموعة صفرية،  
فإن الدالة  $f$  قابلة لتكامل ليبياق و

$$\int_{[a,b]} f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(x) dx.$$

للبرهان نحافظ على نفس الرموز للمبرهنة (77) و نحتاج التمهيدية التالية:

تمهيدية

لكل  $x \in [a, b] \setminus \left( \bigcup_{n=1}^{+\infty} \sigma_n \right)$  عند النقطة  $x$ .  
إذا و فقط إذا كانت الدالة  $f$  متصلة

نعطي الآن برهان آخر للمبرهنة التالية:

مبرهنة

لتكن  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  دالة محدودة. الدالة  $f$  قابلة لتكامل ريمان إذا و فقط إذا كانت متصلة a.e. على الفترة  $[a, b]$ .



## التكامل المعتل و تكامل ليبيغ

### مبرهنة

تكن  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  دالة قابلة لتكامل ليبيغ على كل فترة مغلقة و محدودة في  $]a, b[$ .  
 الدالة  $f$  قابلة لتكامل ليبيغ على الفترة  $]a, b[$  إذا و فقط إذا كان التكامل المعتل  
 $\int_a^b |f(x)| dx$  متقارب و في هذه الحالة، التكامل المعتل و تكامل ليبيغ للدالة  $f$   
 متساويان:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) d\lambda(x).$$