المحتويات

خصائص عامة للمتسلسلات المتقاربة

تعريف

1 لتكن $(u_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية. نعرف المتتالية $(S_n)_n$ بما يلي:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

نقول إنّ المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ متقاربة، إذا كانت المتتالية $(S_n)_n$ متقاربة.

2 إذا كانت المتتالية $(S_n)_n$ متقاربة، نرمز بنهايتها بالرمز $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$

3 نقول إنّ المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ متباعدة إذا كانت المتتالية $(S_n)_n$ متباعدة.

ملاحظة

1. إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة، فإنّ $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$ و ذلك لأن
$u_n = S_n - S_{n-1}$
2. إذا كانت $u_n = 0$ $\lim_{n\longrightarrow+\infty}$ فإن المتسلسلة ليست بالضرورة متقاربة. المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ متباعدة لأنّ $S_n = \sqrt{n+1} - 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و لكن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

مبرهنة

[إختبار كوشي]

لتكن $(u_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية. المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة إذا و فقط إذا

$$\forall \ \ \varepsilon > 0 \ \ \exists \ N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \ \forall \ q \geq p \geq N_\varepsilon ; \ |\sum_{n=p}^{q} u_n| \leq \varepsilon.$$

هذا معيار كوشي بالنسبة للمتتالية $(S_n)_n$.

تعريف

نقول إن المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ متقاربة مطلقا إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ متقاربة.

ملاحظة

كل متسلسلة متقاربة مطلقا فهي متقاربة و العكس غير صحيح.

لتكن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. إذا كانت $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{p}$، فإن

$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$ ، $S_{2n+2} - S_{2n} = -\frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \leq 0$

و $S_{2n+1} - S_{2n-1} = \frac{1}{2n(2n+1)} \geq 0$. إذاً المتتالياتين $(S_{2n})_n$ و $(S_{2n+1})_n$ متجاورتين و هذا يثبت أنّ المتتالية $(S_n)_n$ متقاربة.

من ناحية أخرى $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. إذاً المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ليست متقاربة مطلقا.

يوجد العديد من إختبارات التقارب للمتسلسلات ذات الحد الموجب و يعتمد أهمها على أنّ كل متتالية تزايدية متقاربة إلا إذا كانت محدودة علويا.

مبرهنة

[إختبار المقارنة]
لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين من الأعداد الحقيقية الموجبة. نفترض أنه يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث، $v_n \leq u_n$ لكل $n \geq k$. إذاً إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} v_n$ متقاربة، فإنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة أيضا.

نتيجة

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين من الأعداد الحقيقية الموجبة. إذا وجد $a > 0$ و $b > 0$ بحيث $au_n \leq v_n \leq bu_n$ لكل $n \geq k$، فإنّ المتسلسلتين $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ و $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ متقاربتين أو متباعدتين معا.

نتيجة

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتن من الأعداد الحقيقية الموجبة. نفترض أنّ

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell$$

1. إذا كان $\ell > 0$ فإن المتسلسلتين $\sum_{n\geq 1} u_n$ و $\sum_{n\geq 1} v_n$ متقاربتين أو متباعدتين معا
2. إذا كان $\ell = 0$ فإنه إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} v_n$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة.
3. إذا كان $\ell = +\infty$ فإنه إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} v_n$ متقاربة.

مبرهنة

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين من الأعداد الموجبة. إذا وجد $m \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq m$، $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$، فإنّه إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} v_n$ متقاربة فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة.

إختبار التكامل

مبرهنة

[إختبار التكامل]

لتكن f دالة متصلة و تناقصية على الفترة $[1 \;\; +\infty[$ و $u_n = f(n)$، لكل $n \in \mathbb{N}$. إذاً التكامل $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ متقارب إذا و فقط إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة.

نتيجة

[متسلسلة ريمان]

المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ متقاربة إذا و فقط إذا كان $\alpha > 1$.

مبرهنة

[المقارنة بمتسلسلات ريمان]

لتكن $(u_n)_n$ متتالية من الأعداد الموجبة. لنفترض أنه يوجد $0 < a < b$ بحيث بعد حد $0 < a \leq n^\alpha u_n \leq b < +\infty$. إذاً المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة إذا و فقط إذا كان $\alpha > 1$.

هذه نتيجة المبرهة (1)

تمرين

أثبت أنّ متسلسلة $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}$ متقاربة إذا و فقط إذا كانت $\alpha > 1$ أو $\alpha = 1$ و $\beta > 1$.

(هذه المتسلسلة تسمى متسلسلة بارتران (Bertrand))

مبرهنة

لتكن $(u_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية بحيث $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = \ell$.

1. إذا كان $1 > \ell$ فإن المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ متقاربة مطلقا.
2. إذا كان $1 < \ell$ فإن الحد العام للمتسلسلة غير محدود و المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ متباعدة.
3. إذا كانت $\ell = 1$ فلا يمكن تحديد طبيعة المتسلسلة (متقاربة أم لا).

مبرهنة

[إختبار كوشي]

لتكن $(u_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية و $\ell = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$.

1. إذا كان $\ell < 1$، فإنّ المتسلسلة $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة مطلقا.
2. إذا كان $\ell > 1$ فإن الحد العام للمتسلسلة غير محدود و بالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متباعدة.
3. إذا كان $\ell = 1$ فلا يمكن أن نحدد طبيعة المتسلسلة (متقاربة أم لا).

ملاحظة

إذا كانت $\lim_{n\longrightarrow+\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = \ell$ ، فإن $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \ell$.

مثال

1. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ متقاربة مطلقا لكل $x\in\mathbb{R}$ و ذلك لأنّ $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|x^n|}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{n+1}=0$. و مجموع هذه المتسلسلة هي الدالة الأسية للأعداد الحقيقية $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$.
2. كذلك لكل $|x|<1$، المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$ متقاربة مطلقا.

مبرهنة

[إختبار آبل]
لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين من الأعداد الحقيقية بحيث

1. المتتالية $(v_n)_n$ تناقصية و نهايتها 0.
2. المتتالية $\left(S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k\right)_n$ محدودة.

إذًا المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n v_n$ متقاربة.

ملاحظة

النتيجة تبقى صحيحة إذا كانت المتتالية $(S_n)_n$ محدودة و المتتالية $(v_n)_n$ نهايتها 0 و المتسلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty}(v_n - v_{n+1})$ متقاربة.

مثال

1. لتكن $v_n = \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$، لكل $n \geq 1$ و $u_n = e^{in\theta}$، $0 < \theta < 2\pi$.
   و يمكن إثبات أنّ $|\sum_{n=p}^{q} u_n| \leq \dfrac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})}$
   $\sum_{n\geq 2} |v_n - v_{n-1}| \leq \sum_{n\geq 2} \dfrac{2}{(n-1)^2}$.
   و بالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]} e^{in\theta}}{n}$ متقاربة.
2. نريد أن نثبت أن المتتالية $(s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n)_n$ متقاربة.
   نعرف المتتالية $(u_n)_n$ كما يلي: $u_1 = S_1 = 1$ و لكل $n \geq 2$،

$$u_n = S_n - S_{n-1} \quad = \quad \frac{1}{n} + \ln \frac{n-1}{n}$$

تعريف

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين من الأعداد الحقيقية. لكل $n \in \mathbb{N}$، نعرف

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k}. \tag{1}$$

المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} c_n$ تسمى متسلسلة الضرب للمتسلسلتين $\sum_{n\geq 1} u_n$ و $\sum_{n\geq 1} v_n$.

سنبحث عن العلاقة بين تقارب متسلسلة الضرب و تقارب المتسلسلتين.
إذا كانت المتسلسلتين $\sum_{n\geq 1} u_n$ و $\sum_{n\geq 1} v_n$ متقاربتين هذا لا يضمن تقارب متسلسلة الضرب.

مثال

المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ متقاربة ولكن متسلسلة الضرب لهذه المتسالة مع نفسها ليست متقاربة.

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}.$$

وبالتالي $|c_n| \geq 1$.

المبرهنة التالية تؤكد تقارب متسلسلة الضرب تحت شروط على المتسلستين.

مبرهنة

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين من الأعداد الحقيقية.

1 إذا كانت المتسلسلتين $\sum_{n\geq 1} u_n$ و $\sum_{n\geq 1} v_n$ متقاربتين مطلقا، فإنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} c_n$ متقاربة مطلقا و $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n)(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n)$

2 إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة مطلقا و المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} v_n$ متقاربة، فإنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} c_n$ متقاربة و $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n)(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n)$