(4.1) فصول خاصة من مجموعات $\mathbb{R}$ الجزئية

تمارين 4.1

1. إذا كانت $\mathcal{A}$ مجموعة غير خالية من المجموعات الجزئية فأثبت أن $\mathcal{A}$ جبر إذا وفقط إذا كانت $\mathcal{A}$ مغلقة تحت التتميم والاتحادات المنتهية.
2. في المثال 4.1
   (أ) متى تكون المجموعة (iv) جبرًا؟
   (ب) متى تكون المجموعة في (v) حلقة سيجما؟
   (ج) متى تكون المجموعة في (vii) جبر سيجما؟
3. لتكن $E, F \subset \Omega$. عين الجبر المولد من $\{E, F\}$.

(4.1) فصول خاصة من مجموعات $\mathbb{R}$ الجزئية

4. لتكن $\Omega=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ وافرض أن $\mathcal{D}$ تتكون من كل المجموعات على شاكلة $[a,b]\cap\mathbb{Q}$ حيث $0\le a<b\le 1$. أثبت أن
$$\mathcal{A}(\mathcal{D})=\mathcal{P}(\Omega).$$
5. لتكن $\mathcal{D}\subset\mathcal{P}(\Omega)$. إذا كان $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ هي الحلقة المولدة من $\mathcal{D}$ فأثبت أن كل $E\in\mathcal{R}(\mathcal{D})$ محتواة في اتحاد منته من عناصر $\mathcal{D}$. اذكر تقريرًا مناظرًا لعناصر حلقة سيجما المولدة من $\mathcal{D}$.
6. لتكن $\mathcal{R}$ حلقة بولية في Ω. إذا عرفنا العمليتين الثنائيتين $+$ وَ $\cdot$ على $\mathcal{R}$ على النحو التالي
$$A+B=A\Delta B$$
$$A\cdot B=A\cap B$$
فأثبت أن $(\mathcal{R},+,\cdot)$ حلقة جبرية.
7. اجر التعديلات اللازمة على النظرية 4.2 لتثبت وجود أصغر حلقة، أصغر جبر، وأصغر جبر سيجما يحتوي $\mathcal{D}$.
8. إذا كانت $\mathcal{S}$ حلقة سيجما فأثبت أن
$$\mathcal{A}(\mathcal{S})=\mathcal{S}\cup\left\{E^c:E\in\mathcal{S}\right\}$$
9. اعط مثالاً لمجموعة جزئية من $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ مغلقة تحت Δ والتقاطعات القابلة للعد ومع ذلك ليست حلقة سيجما.
10. أثبت أن $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{Q}^c\in\mathcal{B}$.
11. إذا كان $\Gamma\subset\Omega$ و $\mathcal{D}\subset\mathcal{P}(\Omega)$، فإننا نعرف
$$\Gamma\cap\mathcal{D}=\{\Gamma\cap D:D\in\mathcal{D}\}.$$
أثبت أن
$$\mathcal{A}(\Gamma\cap\mathcal{D})=\Gamma\cap\mathcal{A}(\mathcal{D}).$$

(4.1) فصول خاصة من مجموعات $\mathbb{R}$ الجزئية

إرشاد: استخدم الدالة

$$i:\Gamma\to\Omega,\ i(x)=x$$

والنظرية 4.4.

الحلول:

1. إذا كانت $\mathcal{A}$ مجموعة غير خالية من المجموعات الجزئية فأثبت أن $\mathcal{A}$ جبر إذا وفقط إذا كانت $\mathcal{A}$ مغلقة تحت التتميم والاتحادات المنتهية.

(1) $\mathcal{A}$ جبر ⇐ تعريف 4.1 إذا كانت $A\in\mathcal{A}$ ولدينا $\Omega\in\mathcal{A}$ (تعريف 4.3)

⇐ $\Omega - A = A^c \in \mathcal{A}$ (تعريف 4.1)

⇐ $\mathcal{A}$ مغلقة تحت التتميم

لتكن $A_i\in\mathcal{A}$ لكل $1\le i\le n$

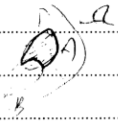
بالاستقراء، فإن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i\in\mathcal{A}$ (واستنادًا لتعريف 4.1)

⇐ $\mathcal{A}$ مغلقة تحت الاتحادات المنتهية

الاتجاه الآخر: لتكن $\mathcal{A}$ مغلقة تحت التتميم والاتحادات المنتهية

لتكن $A\in\mathcal{A}$ ⇐ $A^c\in\mathcal{A}$ ⇐ $\Omega = A\cup A^c\in\mathcal{A}$

لتكن $A,B\in\mathcal{A}$ ⇐ $A\cup B\in\mathcal{A}$ (من المعطيات)



$$(A-B)^c = \underbrace{B}_{\in\mathcal{A}}\cup\underbrace{A^c}_{\in\mathcal{A}}\in\mathcal{A}$$

$$A-B = \left[(A-B)^c\right]^c\in\mathcal{A}\quad \text{(من المعطى 1)}$$

إذن من تعريف 4.1 و تعريف 4.3: $\mathcal{A}$ جبر.

(4.1) فصول خاصة من مجموعات $\mathbb{R}$ الجزئية

2. في المثال 4.1

(أ) متى تكون المجموعة (iv) جبرًا؟

(ب) متى تكون المجموعة في (v) حلقة سيجما؟

(ج) متى تكون المجموعة في (vii) جبر سيجما؟

(٢) (أ) إذا كان $A \cup B$ هي Ω (ب) إذا كانت Ω منتهية
(جـ) إذا كانت Ω قابلة للعد

---

3. لتكن $E, F \subset \Omega$. عين الجبر المولد من $\{E, F\}$.

(٣) لتكن S هي المجموعة المكونة من كل جبر A في Ω يحوي $\{E, F\}$
بما أن $P(\{E,F\})$ جبر في Ω يحتوي $\{E, F\}$ فإن S ليست خالية
ونستطيع أن نعرف

$$A(\{E,F\}) = \cap\{A : A \in S\}$$

$$\Rightarrow A(\{E,F\}) = \{\phi, E, F, E\cup F, E\cap F, E\setminus F, F\setminus E, E\Delta F, \Omega\}$$

---

4. لتكن $\Omega = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ وافرض أن $\mathcal{D}$ تتكون من كل المجموعات على شاكلة $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ حيث $0 \le a < b \le 1$. أثبت أن

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}(\Omega).$$

(4) نكتب $A \in A(D)$ ~~$E \in A \; \forall A \in S \Leftarrow$~~

~~$E \in A(D)$~~

$F \in A \; \forall A \in S \Leftarrow$

(4.1) فصول خاصة من مجموعات $\mathbb{R}$ الجزئية

5. لتكن $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. إذا كان $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ هي الحلقة المولدة من $\mathcal{D}$ فأثبت أن كل $E \in \mathcal{R}(\mathcal{D})$ محتواة في اتحاد منته من عناصر $\mathcal{D}$. اذكر تقريرًا مناظرًا لعناصر حلقة سيجما المولدة من $\mathcal{D}$.

5 مجموعة كل المحتويات المحتواة في اتحاد منته من محتويات D تشكل حلقة.
حيث إن هذه الحلقة تحوي D
فإنها أيضاً تحتوي $R(D)$ (بتعريف $R(D)$)

(4.1) فصول خاصة من مجموعات $\mathbb{R}$ الجزئية

6. لتكن $\mathcal{R}$ حلقة بولية في Ω. إذا عرفنا العمليتين الثنائيتين $+$ وَ $\cdot$ على $\mathcal{R}$ على النحو التالي

$$A+B=A\Delta B$$
$$A\cdot B=A\cap B$$

فأثبت أن $(\mathcal{R},+,\cdot)$ حلقة جبرية.

(6) اثبات: $(R,+)$ زمرة إبدالية:

(i) $A,B\in R: A+B=A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)\in R$ (تعريف R)

(ii) $A,B,C\in R: A+(B+C)=A\Delta(B\Delta C)$

$=(A\Delta B)\Delta C$ (من خواص Δ)

$=(A+B)+C$

(iii) $A\in R: \exists\,\phi\in R$ s.t. $A+\phi=A\Delta\phi=A$

(iv) $A\in R: A\Delta A=(A-A)\cup(A-A)=\phi\cup\phi=\phi$

(v) $A,B\in R: A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(B-A)\cup(A-B)=B\Delta A$

إثبات أن $(R,\cdot)$ شبه زمرة:

(i) $A,B\in R: A\cdot B=A\cap B\in R$ (من ملاحظة 4.1)

(ii) $A,B,C\in R: A\cdot(B\cdot C)=A\cap(B\cap C)$

$=(A\cap B)\cap C$ (من خواص $\cap$)

$=(A\cdot B)\cdot C$

إثبات أن $(\cdot)$ تتوزع على $(+)$ من اليمين واليسار:

$A,B,C\in R: A\cdot(B+C)=A\cap(B\Delta C)$

$=A\cap[(B-C)\cup(C-B)]$

$=[A\cap(B-C)]\cup[A\cap(C-B)]$

$=[A\cap(B\cap C^c)]\cup[A\cap(C\cap B^c)]$

$=[(A\cap B)\cap C^c]\cup[(A\cap C)\cap B^c]$

$=[A\cap B-C]\cup[A\cap C-B]$

$(A\cap B)\Delta(A\cap C)=[A\cap B-A\cap C]\cup[A\cap C-A\cap B]$

$=[(A\cap B)\cap(A\cap C)^c]\cup[(A\cap C)\cap(A\cap B)^c]$

$=[(A\cap B)\cap(A^c\cup C^c)]\cup[(A\cap C)\cap(A^c\cup B^c)]$

$=[\phi\cup(A\cap B)\cap C^c]\cup[\phi\cup(A\cap C)\cap B^c]$

$=[(A\cap B)\cap C^c]\cup[(A\cap C)\cap B^c]$

واضح التوزيع وبالمثل تثبت أن

$(B+C)A=B\cdot A+C\cdot A$

(4.1) فصول خاصة من مجموعات $\mathbb{R}$ الجزئية

7. اجر التعديلات اللازمة على النظرية 4.2 لتثبت وجود أصغر حلقة، أصغر جبر، وأصغر جبر سيجما يحتوي $\mathcal{D}$.

---

8. إذا كانت $\mathcal{S}$ حلقة سيجما فأثبت أن

$$\mathcal{A}(\mathcal{S})=\mathcal{S}\cup\{E^c : E\in\mathcal{S}\}$$

(8) ليكن $E\in A(S) \Leftarrow$ إما $E\in S$

---

9. اعط مثالاً لمجموعة جزئية من $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ مغلقة تحت Δ والتقاطعات القابلة للعد ومع ذلك ليست حلقة سيجما.

---

10. أثبت أن $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{Q}^c\in\mathcal{B}$.

(10) ليكن $a\in\mathbb{R}$:

$a=\bigcap_{n=1}^{\infty}[a,a+\frac{1}{n})\in B$ ، $\in I$ (لأن B حلقة سيجما لكونها جبر سيجما)

كل من N و Z و Q مجموعات قابلة للعد

وبالتالي يمكن ~~...~~ كل منها اتحاد قابل للعد من الأعداد المفردة

وبالتالي فهي تنتمي إلى B (لأنها جبر سيجما)

$Q^c\in B$ (لأن B جبر سيجما)

(4.1) فصول خاصة من مجموعات $\mathbb{R}$ الجزئية

11. إذا كان $\Gamma \subset \Omega$ و $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$، فإننا نعرف

$$\Gamma \cap \mathcal{D} = \{\Gamma \cap D : D \in \mathcal{D}\}.$$

أثبت أن

$$\mathcal{A}(\Gamma \cap \mathcal{D}) = \Gamma \cap \mathcal{A}(\mathcal{D}).$$

إرشاد: استخدم الدالة

$$i : \Gamma \to \Omega, \;\; i(x) = x$$

والنظرية 4.4.

(4.2) قياس لبيق الخارجي

4.2 تمارين

1. تحقق من توفر خواص $l|_{\mathcal{I}}$ الواردة في التمهيد 4.2 في $l|_{\mathcal{E}}$.
2. أكمل برهان النتيجة 4.6.2 بتناول الحالات

$$(a,b],(a,b),[a,\infty),(a,\infty),(-\infty,b],(-\infty,b),(-\infty,\infty).$$

3. إذا كانت $\{I_1,\cdots,I_n\}$ مجموعة منتهية من الفترات في $\mathcal{I}$ بحيث $\bigcup_{i=1}^{n} I_i \supset \mathbb{Q}\cap[0,1]$ فأثبت أن $\sum_{i=1}^{n} l(I_i)\geq 1$.
4. إذا كان $m^*(E)=0$ فأثبت أن

$$m^*(E\cup F)=m^*(F) \quad \forall F\subset\mathbb{R}.$$

5. لكل $E\subset\mathbb{R}$ ولكل $\varepsilon>0$ أثبت أن هناك مجموعة مفتوحة G تحتوي E بحيث $m^*(G)\leq m^*(E)+\varepsilon$.
6. أثبت أن اختيار الفترات I_i في التعريف 4.6 من $\mathcal{I}_0$ أو $\mathcal{I}_1$ بدلاً عن $\mathcal{I}$ لا يغير من تعريف القياس الخارجي m^*.

الحلول:

1. تحقق من توفر خواص $l|_{\mathcal{I}}$ الواردة في التمهيد 4.2 في $l|_{\mathcal{E}}$.

1 (i) واضح ان $0=l(\phi)$

(ii) $E_1\subset E_2,\ E_1,E_2\in\mathcal{E}$ ، $E_2=\bigcup_{i=1}^{n} I_i$ ، $E_1=\sum_{j=1}^{m} J_j$

حيث $J_j\subset E_2$ لكل $1\leq j\leq m$

(4.2) قياس لبيق الخارجي

2. أكمل برهان النتيجة 4.6.2 بتناول الحالات

$$(a,b],(a,b),[a,\infty),(a,\infty),(-\infty,b],(-\infty,b),(-\infty,\infty).$$

(٤) عندما تكون E فترة غير محدودة لدينا أربع نماذج :

$E=(-\infty,a]$ ، $E=(-\infty,a)$ ، $E=[a,\infty)$ ، $E=(a,+\infty)$

لنفرض أن $E=(-\infty,a]$. لكل $M>0$ يوجد $k\in\mathbb{Z}$ بحيث يكون

$$I_M=[k,k+M)\subset E$$

ومنه $M=\ell(I_M)=m^*(I_M)\le m^*(E)\le\infty$

لكل $M>0$ وعندما $M\to\infty$ نجد

$$m^*(E)=\infty=\ell(E).$$

بنفس الطريقة نبرهن أن $m^*(E)=\ell(E)=\infty$ ، حيث $E=(-\infty,a)$

أما إذا فرضنا $E=(a,+\infty)$. إذاً لدينا $E\supset(a,a+n]$ لكل $n\in\mathbb{N}$

ومنه $\infty\ge m^*(E)\ge m^*(a,a+n]$
$=\ell(a,a+n]=n$

لكل $n\in\mathbb{N}$ ، وعندما $n\to\infty$ نجد $m^*(E)=\infty=\ell(E)$

(4.2) قياس لبيق الخارجي

وبنفس الطريقة نبرهن ان $m^*(E) = l(E) = \infty$ ، حيث $E = [a, +\infty)$

2

Case : $I = (a, b]$

اولاً نفرض ان $a > b$: إذا كان $a = b$ ←

$m^*(I) = 0 = l(I)$

إذا كان $a < b$: افترض ان $0 < \varepsilon < b - a$

ونكتب $I' = [a+\varepsilon, b]$

$$m^*(I) \geq m^*(I') = l(I) - \varepsilon$$

كما ان $I \subseteq I'' = (a, b+\varepsilon)$

لذلك :

$$m^*(I) \leq l(I'') = l(I) + \varepsilon$$

لدينا :

$$l(I) - \varepsilon \leq m^*(I) \leq l(I) - \varepsilon$$

صحيحة لكل $\varepsilon > 0$ (صغيرة)

$$\Rightarrow m^*(I) = l(I)$$

Case : $I = (a, b)$ بنفس الطريقة

Case : $I = [a, b)$ بنفس الطريقة

Case : $I = (-\infty, a]$

لأي $M > 0$ يوجد K بحيث الفترة المنتهية $I_M = [K, K+M)$ محتواة في I

لذلك

$$m^*(I) > M$$

$$\Rightarrow m^*(I) = \infty = l(I)$$

الحالات الأخرى مشابهة

(4.2) قياس لبيق الخارجي

3. إذا كانت $\{I_1,\cdots,I_n\}$ مجموعة منتهية من الفترات في $\mathcal{I}$ بحيث $\bigcup_{i=1}^{n} I_i \supset \mathbb{Q}\cap[0,1]$ فأثبت أن $\sum_{i=1}^{n} l(I_i)\geq 1$.

بالعكس بما أن $[0,1]$ متراصة ، إذاً توجد مجموعة منتهية $I_1,\dots,I_n \in \mathcal{I}$ تغطي $[0,1]$ ...

$[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i \Rightarrow m^*[0,1] \leq \sum_{i=1}^{n} m^*(I_i)$

$1 = l([0,1]) \leq \sum_{i=1}^{n} l(I_i)$

(3) يكفي أن نثبت أن $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$

بالتناقض: لنفرض أن $x \in [0,1]$ و $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} I_i$

ولتكن a أقرب نهاية يسرى للفترة I_i للعدد x (نقطة)

حيث $a > x$ عندئذ

تحوي $[x, a)$ أعداداً نسبية غير مغطاة بأي من I_i

وهذا تناقض مع الفرض

(لاحظ أن حالة $x = 1$ لا تظهر)

$\Rightarrow m^*([0,1]) \leq m^* \bigcup_{i=1}^{n} I_i$

$l[0,1] \leq \sum_{i=1}^{n} m^*(I_i)$

$1 \leq \sum_{i=1}^{n} l(I_i)$

حل ←

5. Let A be the set of rational numbers between 0 and 1. Also let $\{I_n\}$ be a finite collection of open intervals covering A. Then $1 = m^*([0,1]) = m^*\overline{A} \leq m^*(\overline{\bigcup I_n}) = m^*(\bigcup \overline{I_n}) \leq \sum m^*\overline{I_n} = \sum l(\overline{I_n}) = \sum l(I_n)$.

(4.2) قياس لبيق الخارجي

4. إذا كان $m^*(E)=0$ فأثبت أن

$$m^*(E\cup F)=m^*(F) \quad \forall F\subset \mathbb{R}.$$

الحل: $F\subset F\cup E \Rightarrow \quad m^*(F) \le m^*(F\cup E) \le m^*(F)+m^*(E)$

$= m^*(F)$

بمعنى $m^*(F\cup E)=m^*(F)$

(4) $m^*(F) \le m^*(E\cup F) \le m^*(E)+m^*(F)=m^*(F)$

$\Rightarrow \quad m^*(E\cup F)=m^*(F)$

4 س ← 8. Suppose $m^*A=0$. Then $m^*(A\cup B)\le m^*A+m^*B=m^*B$. Conversely, since $B\subset A\cup B$, $m^*B\le m^*(A\cup B)$. Hence $m^*(A\cup B)=m^*B$.

---

5. لكل $E\subset\mathbb{R}$ ولكل $\varepsilon>0$ أثبت أن هناك مجموعة مفتوحة G تحتوي E بحيث $m^*(G)\le m^*(E)+\varepsilon$.

البرهان: لتكن $\varepsilon>0$، إذن توجد $I_n=[a_n,b_n) \ni J$ بحيث $E\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ وأن

$$m^*(E) > \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) - \varepsilon/2$$

ولتكن $I_n^- = (a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b_n)$. لاحظ أن $I_n \subset I_n^- \ \forall n$ وأن

$E\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^- = G$ وبالتالي G مفتوحة وحيث

$$m^*(G) \le \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< m^*(E) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= m^*(E) + \varepsilon$$

(4.2) قياس لبيق الخارجي

5 حس

6. Given any set A and any $\varepsilon > 0$, there is a countable collection $\{I_n\}$ of open intervals covering A such that $\sum l(I_n) \leq m^*A + \varepsilon$. Let $O = \bigcup I_n$. Then O is an open set such that $A \subset O$ and $m^*O \leq \sum m^*I_n = \sum l(I_n) \leq m^*A + \varepsilon$. Now for each n, there is an open set O_n such that $A \subset O_n$ and $m^*O_n \leq m^*A + 1/n$. Let $G = \bigcap O_n$. Then G is a G_δ set such that $A \subset G$ and $m^*G = m^*A$.

7. Let E be a set of real numbers and let $y \in \mathbb{R}$. If $\{I_n\}$ is a countable collection of open intervals such that $E \subset \bigcup I_n$, then $E + y \subset \bigcup (I_n + y)$ so $m^*(E+y) \leq \sum l(I_n + y) = \sum l(I_n)$. Thus $m^*(E+y) \leq m^*E$. Conversely, by a similar argument, $m^*E \leq m^*(E+y)$. Hence $m^*(E+y) = m^*E$.

Example 2: Show that, for any set A and any $\epsilon > 0$, there is an open set O containing A and such that $m^*(O) \leqslant m^*(A) + \epsilon$.

Solution: Choose a sequence of intervals I_n such that $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) - \epsilon/2 \leqslant m^*(A)$. If $I_n = [a_n, b_n)$, let $I_n' = (a_n - \epsilon/2^{n+1}, b_n)$ so that $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n'$.

Hence if $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n'$, O is an open set and

$$m^*(O) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n') = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) + \epsilon/2 \leqslant m^*(A) + \epsilon.$$

6. أثبت أن اختيار الفترات I_i في التعريف 4.6 من $\mathcal{I}_0$ أو $\mathcal{I}_1$ بدلاً عن $\mathcal{I}$ لا يغير من تعريف القياس الخارجي m^*.

(σ) وذلك لأن $b-a = l((a,b))$ و $l([a,b)) = b-a$
و $l([a,b]) = b-a$

(4.2) قياس لبيق الخارجي

$n=1$ $\quad n=1$

Example 3: Suppose that in the definition of outer measure, $m^*(E) = \inf \Sigma\, l(I_n)$ for sets $E \subseteq \mathsf{R}$, we stipulate (i) I_n open, (ii) $I_n = [a_n, b_n)$, (iii) $I_n = (a_n, b_n]$, (iv) I_n closed, or (v) mixtures are allowed, for different n, of the various types of interval. Show that the same m^* is obtained.

Solution: In case (ii) we obtain the m^* of Definition 1, p. 27. Write the corresponding m^* as m_o^* in case (i), m_{oc}^* in case (iii), m_c^* in case (iv), m_m^* in case (v). We show that each equals m_m^*. Consider m_o^*, the proof in the other cases being similar. From the definition, $m_m^*(E) \leqslant m_o^*(E)$. To prove the converse: for each $\epsilon > 0$ and each interval I_n let I_n' be an open interval containing I_n with $l(I_n') = (1+\epsilon)\, l(I_n)$. Suppose that the sequence $\{I_n\}$ is such that $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ and $m_m^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) - \epsilon$. Then $m_m^*(E) + \epsilon \geqslant (1+\epsilon)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n')$. But $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n'$, a union of open intervals, so $m_o^*(E) \leqslant (1+\epsilon)\, m_m^*(E) + \epsilon(1+\epsilon)$, for any $\epsilon > 0$, so $m_o^*(E) \leqslant m_m^*(E)$, as required.

(4.3) قياس لبيق

تمارين 4.3

1. إذا كانت $E,F\in\mathcal{M}$ فأثبت أن
$$m(E)+m(F)=m(E\cup F)+m(E\cap F)$$
2. إذا كانت $E\in\mathcal{M}$ فأثبت أن
$$m^*(E)+m^*(F)=m^*(E\cup F)+m^*(E\cap F)\ \forall F\subset\mathbb{R}$$
واستنتج من ذلك نتيجة التمرين 4.3.1.
3. إذا كانت المجموعة $E\subset[0,1]$ مكونة من الأعداد التي لا يظهر العدد 5 في مفكوكها العشري فأثبت أن $E\in\mathcal{M}$ وأن $m(E)=0$.
4. لأي متتالية (E_n) من مجموعات Ω الجزئية أثبت أن
$$\limsup\chi_{E_n}=\chi_{E^*}$$
$$\liminf\chi_{E_n}=\chi_{E_*}$$
حيث χ_E هي الدالة الذاتية للمجموعة E المعرفة بأنها
$$\chi_E=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E,\end{cases}$$

(4.3) قياس لبيق

5. إذا كانت (E_n) متتالية في $\mathcal{M}$ فأثبت أن

$$m(\liminf E_n) \leq \liminf m(E_n).$$

وإذا علمت أن هناك N بحيث $m\left(\bigcup_{i=N}^{\infty} E_i\right) < \infty$ فأثبت أن

$$m(\limsup E_n) \leq \limsup m(E_n).$$

6. لتكن $\mathcal{G}$ مجموعة المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ و $\mathcal{F}$ مجموعة المجموعات المغلقة. ولتكن $\mathcal{G}_\delta$ هي المجموعة المكونة من تقاطع جميع المتتاليات في $\mathcal{G}$، أي أن $G \in \mathcal{G}_\delta$ إذا وفقط إذا وجدت متتالية (G_i) في $\mathcal{G}$ بحيث $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$. كما نعرف $\mathcal{F}_\sigma$ بأنها مكونة من اتحادات جميع المتتاليات في $\mathcal{G}$، بمعنى أن $F \in \mathcal{G}_\sigma$ إذا وفقط إذا كان هناك متتالية (F_i) في $\mathcal{G}$ بحيث $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$.

(i) أثبت أن كلاً من $\mathcal{G}_\delta$، $\mathcal{F}_\sigma$ مجموعة جزئية من مجموعة بوريل $\mathcal{B}$.

(ii) اعط مثالاً لعنصر من $\mathcal{G}_\delta$ وآخر من $\mathcal{F}_\sigma$ لا ينتميان إلى $\mathcal{G} \cup \mathcal{F}$.

(iii) أثبت أن لكل $E \subset \mathbb{R}$ يوجد $G \in \mathcal{G}_\delta$، $F \in \mathcal{F}_\sigma$ بحيث $F \subset E \subset G$، $m(G \setminus F) = 0$.

7. إذا كانت G مجموعة مفتوحة وغير خالية، فأثبت أن $m(G) > 0$.

8. أثبت أن مقصور الدالة m^* على مجموعات بوريل $\mathcal{B}$ دالة قياس (تسمى **قياس بوريل**)، وبالتالي فإن قياس بوريل $m^*\big|_{\mathcal{B}}$ يحقق الشروط الثلاثة في نظرية 4.8. سنرى فيما بعد (تمرين 4.4.8) أن قياس بوريل لا يحقق خاصة التمام (راجع ملحوظات 4.6).

الحلول:

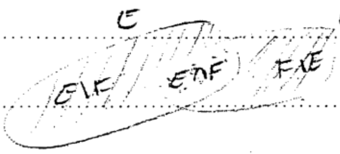
1. إذا كانت $E, F \in \mathcal{M}$ فأثبت أن

$$m(E) + m(F) = m(E \cup F) + m(E \cap F)$$

(4.3) قياس لبيق

تمرين: إذا كانت $E, F \in \mathcal{M}$ برهن أن

$$m(E) + m(F) = m(E \cup F) + m(E \cap F)$$



نلاحظ أن

$$E \cup F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) \cup (F \cap E)$$

وأن $E \setminus F$ ، $F \setminus E$ ، $F \cap E$ مجموعات

منفصلة. إذاً لدينا

$$m(E \cup F) = m(E \setminus F) + m(F \setminus E) + m(F \cap E)$$ ∵ m جمعي

$$m(E \cup F) + m(E \cap F) = m(E \setminus F) + m(E \cap F) + m(F \setminus E) + m(F \cap E)$$

$$= m((E \setminus F) \cup (E \cap F)) + m((F \setminus E) \cup (F \cap E))$$

$$= m(E) + m(F).$$

$E = (E \setminus F) \cup (E \cap F)$

---

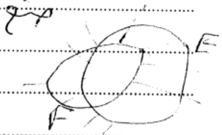
(1) — $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ $\Leftarrow E \in \mathcal{M}$ (1)

(2) — $m^*(A) = m^*(A \cap F) + m^*(A \cap F^c)$ $\Leftarrow F \in \mathcal{M}$

نضع $A = E \cup F$ في (1) $\Leftarrow$

$$m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F - E)$$

$$m^*(E \cup F) = \cancel{m^*(E)} + m^*(F) - \cancel{m^*(E)}$$



نضع $A = E \cap F$ في (2) $\Leftarrow$

$$m^*(E \cap F) = m^*(E \cap F)$$

(5)

$$m(\liminf E_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} E_j\right)$$

F_n

$$= \sum_{n=1}^{\infty} m\left(\bigcap_{j=n}^{\infty} E_j\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

(4.3) قياس لبيق

س 1

10. Suppose E_1 and E_2 are measurable. Then $m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = mE_1 + m(E_2 \setminus E_1) + m(E_1 \cap E_2) = mE_1 + mE_2$.

11. For each n, let $E_n = (n, \infty)$. Then $E_{n+1} \subset E_n$ for each n, $\bigcap E_n = \emptyset$ and $mE_n = \infty$ for each n.

12. Let $\langle E_i \rangle$ be a sequence of disjoint measurable sets and let A be any set. Then $m^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap E_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i)$ by countable subadditivity. Conversely, $m^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq m^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$ for all n by Lemma 9. Thus $m^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i)$. Hence $m^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i)$.

13a. Suppose $m^*E < \infty$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Suppose E is measurable. Given $\varepsilon > 0$, there is a countable collection $\{I_n\}$ of open intervals such that $E \subset \bigcup I_n$ and $\sum l(I_n) < m^*E + \varepsilon$. Let $O = \bigcup I_n$. Then O is an open set, $E \subset O$ and $m^*(O \setminus E) = m(O \setminus E) = m(\bigcup I_n) - mE = m^*(\bigcup I_n) - m^*E \leq \sum l(I_n) - m^*E < \varepsilon$.

$(ii) \Rightarrow (vi)$. Given $\varepsilon > 0$, there is an open set O such that $E \subset O$ and $m^*(O \setminus E) < \varepsilon/2$. O is the union of a countable collection of disjoint open intervals $\{I_n\}$ so $\sum l(I_n) = m(\bigcup I_n) < mE + \varepsilon/2$. Thus there exists N such that $\sum_{n=N+1}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon/2$. Let $U = \bigcup_{n=1}^{N} I_n$. Then $m^*(U \Delta E) = m^*(U \setminus E) + m^*(E \setminus U) \leq m^*(O \setminus E) + m^*(O \setminus U) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

$(vi) \Rightarrow (ii)$. Given $\varepsilon > 0$, there is a finite union U of open intervals such that $m^*(U \Delta E) < \varepsilon/3$. Also there is an open set O such that $E \setminus U \subset O$ and $m^*O \leq m^*(E \setminus U) + \varepsilon/3$. Then $E \subset U \cup O$ and $m^*((U \cup O) \setminus E) = m^*((U \setminus E) \cup (O \setminus E)) \leq m^*((O \setminus (E \setminus U)) \cup (E \setminus U) \cup (U \setminus E)) < \varepsilon$.

13b. $(i) \Rightarrow (ii)$. Suppose E is measurable. The case where $m^*E < \infty$ was proven in part (a). Suppose $m^*E = \infty$. For each n, let $E_n = [-n, n] \cap E$. By part (a), for each n, there exists an open set $O_n \supset E_n$ such that $m^*(O_n \setminus E_n) < \varepsilon/2^n$. Let $O = \bigcup O_n$. Then $E \subset O$ and $m^*(O \setminus E) = m^*(\bigcup O_n \setminus \bigcup E_n) \leq m^*(\bigcup(O_n \setminus E_n)) < \varepsilon$.

(4.3) قياس لبيق

2. إذا كانت $E \in \mathcal{M}$ فأثبت أن

$$m^*(E)+m^*(F)=m^*(E\cup F)+m^*(E\cap F)\ \forall F\subset\mathbb{R}$$

واستنتج من ذلك نتيجة التمرين 4.3.1.

الحل: بما أن $E\in\mathcal{M}$ فإنه لدينا

① $m^*(E)=m^*(F\cap E)+m^*(F\cap E^c)\quad \forall F\subset\mathbb{R}$

$m^*(E)+m^*(F)=m^*(F\cap E)+m^*(E)+m^*(F\cap E^c)$

نأخذ المجموعة $F\cup E$ بدلاً من F في المتراجحة ① فنجد

$m^*(F\cup E)=m^*((F\cup E)\cap E)+m^*((E\cup F)\cap E^c)$

$=m^*(E)+m^*(\underbrace{(E\cap E^c)}_{\emptyset}\cup(F\cap E^c))$

$=m^*(E)+m^*(F\cap E^c)$

وبالتالي فإنه $m^*(E)+m^*(F)=m^*(F\cap E)+m^*(F\cup E)$

$\forall F\subset\mathbb{R}$ #

ملاحظة: إذا كانت $F\in\mathcal{M}$ فإن $F\cap E, F\cup E\in\mathcal{M}$ وحسب التمرين 5 لدينا

$m^*(E)+m^*(F)=m^*(F\cap E)+m^*(F\cup E)$

أي

$m(E)+m(F)=m(F\cap E)+m(F\cup E)$

وهذه العلاقة تم برهانها في التمرين 6 أي أن التمرين 6 نتيجة مباشرة من التمرين 5

(4.3) قياس لبيق

3. إذا كانـــت المجموعة $E \subset [0,1]$ مكونة من الأعداد التي لا يظهر العدد 5 في مفكوكها العشري فأثبت أن $E \in \mathcal{M}$ وأن $m(E)=0$.

الحل: للحصول على المجموعة E:

أولاً: الفترة $\left[\frac{5}{10}, \frac{6}{10}\right]$ نزيلها من $[0,1]$

ثانياً: الفترة $\left[\frac{5}{100}, \frac{6}{100}\right)$ = = =

ثالثاً: الفترة $\left(\frac{15}{100}, \frac{16}{100}\right)$ = = =

إلى ... $\left(\frac{95}{100}, \frac{96}{100}\right)$

... إلخ

لنحصل على المجموعة المتبقية التي لها القياس

$$1-\left(\frac{1}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9^2}{10^3}+\dots\right)=0$$

4. لأي متتالية (E_n) من مجموعات Ω الجزئية أثبت أن

$$\limsup \chi_{E_n} = \chi_{E^*}$$

$$\liminf \chi_{E_n} = \chi_{E_*}$$

حيث χ_E هي الدالة الذاتية للمجموعة E المعرفة بأنها

$$\chi_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E, \end{cases}$$

(4.3) قياس لبيق

5. إذا كانت (E_n) متتالية في $\mathcal{M}$ فأثبت أن

$$m(\liminf E_n) \leq \liminf m(E_n).$$

وإذا علمت أن هناك N بحيث $m\left(\bigcup_{i=N}^{\infty} E_i\right) < \infty$ فأثبت أن

$$m(\limsup E_n) \leq \limsup m(E_n).$$

البرهان: ليكن $E_* = \lim\inf E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \right)$

نأخذ

نضع $F_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$. إذاً لدينا

$$F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots \subset F_n \subset F_{n+1} \subset \cdots$$

ومنه $F_n \to E_*$ ، حيث نهايتها $E_* \in \mathcal{M}$ ، F_n ، وحسب المبرهنة (5) صفحة 31 ، فقرة (1)

نجد $m\left(\lim_{n\to\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(F_n)$

$$m(E_*) = \lim_{n\to\infty} m(F_n)$$

(4.3) قياس لبيق

لكن لدينا أيضاً $\forall k \geq n$ ؛ $F_n \subset E_k \Leftarrow m(F_n) \leq m(E_k)$

ومنه $m(F_n) \leq \inf_{k \geq n} m(E_k)$

ومنه

$$m(F_n) \leq \sup_n \inf_{k \geq n} m(E_k) \Leftarrow m(F_n) \leq \inf_{k \geq n} m(E_k)$$

$$m(F_n) \leq \liminf (m(E_n)) = \sup_n \inf_{k \geq n} m(E_k)$$

$= m(\lim_{n\to\infty} F_n) = m(\liminf E_n)$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} m(F_n) = \boxed{m(E_*) \leq \liminf_{n} m(E_n)}$$

وهنا أعطينا التعريف التالي:

إذا كانت (x_n) متتالية عددية $\in \mathbb{R}$ فلدينا التعريف الآتي:

$$\underline{\lim}\, x_n = \liminf_{n \to \infty} (x_n) = \sup \{ \inf_{k \geq n} x_k ,\ n \in \mathbb{N} \}$$

أو

$$= \sup_n \inf_{k \geq n} x_k$$

أيضاً لدينا تعريف آخر:

$$\overline{\lim}\, x_n = \limsup_{n \to \infty} x_n = \inf \{ \sup_{k \geq n} x_k \ ;\ n \in \mathbb{N} \}$$

أو

$$= \inf_n \sup_{k \geq n} x_k$$

طبعاً نقول إن (x_n) متقاربة نحو x إذا كانت

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = x$$

$$\limsup E_n = E^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \right) \qquad (2)$$

لنضع الآن $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$ ومنه لدينا

(4.3) قياس لبيق

حيث في المثال السابق نلاحظ أن $\alpha_n = \sup_{k \geq n} x_k$ متتالية عددية متناقصة (أي أن ...... $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots$)

$$\liminf_{n \to \infty} (x_n) = \sup_n \inf_{k \geq n} x_k = \sup_n \beta_n \quad ; \quad \beta_n = \inf_{k \geq n} x_k$$

ومنه

$$\beta_1 = \inf_{k \geq 1} x_k = \inf \{-1, +1, -1, \dots\} = -1$$

$$\beta_2 = \inf_{k \geq 2} x_k = \inf \{1, -1, +1, \dots\} = -1$$

وهكذا ...

ومنه

$$\liminf_{n \to \infty} (x_n) = \sup_n \beta_n = \sup \{-1, -1, \dots\} = -1$$

وفي المثال السابق تكون المتتالية العددية (β_n) متزايدة أي أن $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n \leq \beta_{n+1}$

نلاحظ أن $\limsup_{n \to \infty} x_n = 1 \neq \liminf_{n \to \infty} x_n = -1$ ومنه فإن المتتالية $(-1)^n$ متباعدة

حيث هذه طريقة أخرى لبرهان تباعد أو تقارب المتتالية (x_n).

الآن إذا كانت لدينا متتالية عددية (x_n) نلاحظ أن

$$\beta_n = \inf_{k \geq n} x_k = \inf \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

$$\leq \sup \{x_n, x_{n+1}, \dots\} = \sup_{k \geq n} x_k = \alpha_n \leq \alpha_1$$

ومنه

ومنه $\sup_n \inf_{k \geq n} x_k \leq \sup_{k \geq n} x_k \Leftarrow \sup_n \inf_{k \geq n} x_k \leq \inf_n \sup_{k \geq n} x_k$

وبالتالي $\boxed{\liminf_{n \to \infty} x_n \leq \limsup_{n \to \infty} x_n}$

$$m(\liminf E_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{j=n}^{\infty} E_j}_{F_n}\right)$$ (5)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} m\left(\bigcap_{j=n}^{\infty} E_j\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} m(F_n)$$

(4.3) قياس لبيق

6. لتكن $\mathcal{G}$ مجموعة المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ وَ $\mathcal{F}$ مجموعة المجموعات المغلقة. ولتكن $\mathcal{G}_\delta$ هي المجموعة المكونة من تقاطع جميع المتتاليات في $\mathcal{G}$، أي أن $G\in\mathcal{G}_\delta$ إذا وفقط إذا وجدت متتالية (G_i) في $\mathcal{G}$ بحيث $G=\bigcap_{i=1}^{\infty}G_i$. كما نعرف $\mathcal{F}_\sigma$ بأنها مكونة من اتحادات جميع المتتاليات في $\mathcal{G}$، بمعنى أن $F\in\mathcal{G}_\sigma$ إذا وفقط إذا كان هناك متتالية (F_i) في $\mathcal{G}$ بحيث $F=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$.

(i) أثبت أن كلاً من $\mathcal{G}_\delta$، $\mathcal{F}_\sigma$ مجموعة جزئية من مجموعة بوريل $\mathcal{B}$.

(ii) اعط مثالاً لعنصر من $\mathcal{G}_\delta$ وآخر من $\mathcal{F}_\sigma$ لا ينتميان إلى $\mathcal{G}\cup\mathcal{F}$.

(iii) أثبت أن لكل $E\subset\mathbb{R}$ يوجد $G\in\mathcal{G}_\delta$، $F\in\mathcal{F}_\sigma$ بحيث $F\subset E\subset G$، $m(G\setminus F)=0$.

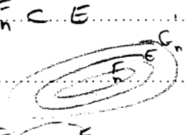
① برهن أن كلاً من $\mathcal{G}_\delta$ و $\mathcal{F}_\sigma$ مجموعة جزئية من مجموعة بوريل $\mathcal{B}$.

بالعودة نعلم أن كل مجموعة مفتوحة A في $\mathbb{R}$ هي اجتماع (اتحاد) لعدد من الفترات المفتوحة في $\mathbb{R}$، أي أن
(وهذا ما يعني أن $\mathcal{B}=\mathcal{A}(\mathcal{O})$ حيث $\mathcal{O}$ المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$)
$A\in\mathcal{B}$ ومنه فإن $\mathcal{B}$ تحتوي المجموعات المفتوحة وبالتالي $G=\bigcap_{i=1}^{\infty}G_i\in\mathcal{B}$
حيث (G_i) متتالية من المجموعات المفتوحة، وحيث إن $\mathcal{B}$ تحتوي أيضاً على المجموعات
المغلقة وبالتالي $F=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\in\mathcal{B}$ حيث (F_i) متتالية من المجموعات المغلقة.

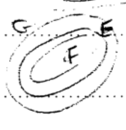
② اعط مثالاً لعنصر من $\mathcal{G}_\delta$ وآخر من $\mathcal{F}_\sigma$ لا ينتميان الى $\mathcal{G}\cup\mathcal{F}$.

③ أثبت أنه لكل $E\in\mathcal{M}$ يوجد $G\in\mathcal{G}_\delta$، $F\in\mathcal{F}_\sigma$ بحيث أن $F\subset E\subset G$
بحيث يكون $m(G\setminus F)=0$

الحل: حسب نظرية التقريب لأي $n\in\mathbb{N}$ توجد مفتوحة $G_n\supset E$، ومغلقة $F_n\subset E$
بحيث يكون $m(G_n\setminus E)<\frac{1}{n}$، $m(E\setminus F_n)<\frac{1}{n}$، ومنه $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\supset E$، $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\subset E$



إذاً $G\in\mathcal{G}_\delta$، $F\in\mathcal{F}_\sigma$، $F\subset E\subset G$، $G_n\supset E\supset F_n$



ولدينا $G\setminus F\subset G_n\setminus F_n\ \forall n$

$0\le m(G\setminus F)\le m(G_n\setminus E)+m(E\setminus F_n) \Leftarrow =(G_n\setminus E)\cup(E\setminus F_n)$
$<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n}\ \forall n$

وعندما $n\to\infty$ نجد $m(G\setminus F)=0$

إذا كانت $m(E)<\infty \Rightarrow m(F)\le m(E) \Rightarrow m(G\setminus F)=m(G)-m(F)=0$
$\Rightarrow m(F)=m(G)=m(E)<\infty$

(4.3) قياس لبيق

7. إذا كانت G مجموعة مفتوحة وغير خالية، فأثبت أن $m(G) > 0$.

بالعكس بما أن $G \neq \emptyset$ مفتوحة، إذاً لتكن $x \in G$ وبالتالي يوجد فترة $I = (a, b)$
تحتوي x بحيث أن $x \in (a,b) \subset G$ ومنه $0 < b - a = m((a,b)) < m(G)$
ومنه $m(G) > 0$، حيث أن المعلوم أن $G \in \mathcal{M}$

هامش

7 G مفتوحة غير خالية $\Longleftarrow$ G عبارة عن اتحاد ~~مجموعة~~ فترات مفتوحة منفصلة على الأكثر قابلة للعد
العدد

$G = \bigcup_i (a_i, b_i)$ ، (a_i, b_i) منفصلة

$m(G) = m\left(\bigcup (a_i, b_i)\right)$

$= \sum m(a_i, b_i) > 0$

8. أثبت أن مقصور الدالة m^* على مجموعات بوريل $\mathcal{B}$ دالة قياس (تسمى **قياس بوريل**)، وبالتالي فإن قياس بوريل $m^*|_{\mathcal{B}}$ يحقق الشروط الثلاثة في نظرية 4.8. سنرى فيما بعد (تمرين 4.4.8) أن قياس بوريل لا يحقق خاصة التمام (راجع ملحوظات 4.6).

(4.4) الدوال القابلة للقياس

تمارين 4.4

1. اعط مثالاً لدالة غير قابلة لقياس لبيق ومثالاً لدالة ليست قابلة لقياس بوريل.

2. لتكن E مجموعة غير قابلة للقياس والدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة

$$f(x)=\begin{cases} e^{x} & x\in E \\ e^{-x} & x\notin E \end{cases}$$

أثـــبت أن $\{x:f(x)=c\}$ قابلة للقياس لكل $c\in\mathbb{R}$، ولكن f ليست قابلة للقياس.

(4.4) الدوال القابلة للقياس

3. تنص النظرية 4.17 على أن $|f|$ قابلة للقياس متى كانت f قابلة للقياس. أثبت أن العكس غير صحيح بإبراز دالة غير قابلة للقياس f بحيث تكون $|f|$ قابلة للقياس.

4. أثبت ما يلي:

(i) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$

(ii) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$

(iii) $\chi_{A\Delta B} = |\chi_A - \chi_B|$

(iv) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$

5.

(i) إذا كانت $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{M}$ و $f:\Omega_1 \cup \Omega_2 \to \mathbb{R}$ فأثبت أن f قابلة للقياس إذا وفقط إذا كان كل من $f|_{\Omega_1}$ و $f|_{\Omega_2}$ قابلة للقياس.

(ii) إذا كانت $f:\Omega \to \mathbb{R}$ قابلة للقياس و $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة بالشكل

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$

فأثبت أن g قابلة للقياس. هذا يعني أنه كان بالإمكان اعتبار مجال كل دالة في البند السابق هو $\mathbb{R}$ بدلاً عن Ω دون إخلال بعمومية المعالجة.

6. لكل $x \in [0,1]$، اكتب المفكوك الثنائي $x = \sum_{i=1}^{\infty} s_i/2^i$، حيث نختار لكل $x > 0$ مفكوكًا لا ينتهي بسلسلة 1. إذا عرَّفنا $\Psi:[0,1] \to \mathbb{R}$ بأنها

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2s_i}{3^i}$$

فإن المجموعة $\Psi(I)$ محتواة في مجموعة كانتور F (راجع المثال 3.17 في [1]).

(i) أثبت أن Ψ متباينة وقابلة للقياس.

(ii) أثبت أن $\Psi(E)$ قابلة للقياس لكل $E \subset [0,1]$.

(4.4) الدوال القابلة للقياس

(iii) باختيار $E \notin \mathcal{M}$ أثبت أن $\mathcal{B} \neq \mathcal{M}$.

تسمى Ψ **دالة كانتور**.

7. لتكن Ψ دالة كانتور المعرفة في التمرين 6. خذ $E \notin \mathcal{M}$ ثم ضع $\varphi = \chi_{\Psi(E)}$. أثبت أن φ قابلة للقياس ولكن $\varphi \circ \Psi$ ليست كذلك.

8. تؤكد النتيجة في التمرين (7) أن مجموعة كانتور تحتوي مجموعة غير قابلة للقياس. استخدم هذه الحقيقة لتثبت أن $m|_{\mathcal{B}}$ ليس قياسًا تامًا.

9. أثبت أن تقارب (φ_n) من f في النظرية 4.20 تقارب منتظم.

الحلول:

1. اعط مثالاً لدالة غير قابلة لقياس لبيق ومثالاً لدالة ليست قابلة لقياس بوريل.

Example 4. Let be A a non-measurable Lebesgue set. We take the function $f(x) = x + \lambda_A$, where λ_A is characteristic function of A.

Then $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in A \\ x, & x \in CA. \end{cases}$ Therefore $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ can be A or CA or $\mathbb{R}$. Since A is not Lebesgue measurable set it follows that f is not Lebesgue measurable function, but $f^{-1}(c) = \{c\}$ or $\{c-1\}$, points which are Lebesgue measurable sets.

Example 5. Let $A \subseteq \mathbb{R}$, the set which is not Lebesgue measurable and $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ -1, & x \in CA. \end{cases}$ Then this function is not Lebesgue measurable.

Proof. Indeed $\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) > 0\} = A$, which is not Lebesgue measurable set. Therefore from Proposition 2 it follows that the function h is not Lebesgue measurable. □

Example 6. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, A non-measurable Lebesgue set, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ -x, & x \in CA. \end{cases}$ Then f is not Lebesgue measurable function.

Proof. We have that $f = x \cdot h$, where h is the above function. If f were Lebesgue measurable, then $f_1 = f \mid \mathbb{R} \setminus \{0\}$ were measurable. □

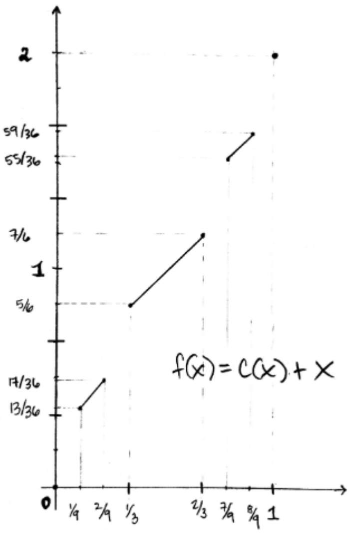
We denote by $h_1 = h \setminus \{0\}$. We have $f_1 = x \cdot h_1$. If f_1 were measurable it follows that h_1 measurable, hence h is Lebesgue measurable, contradicting with the example above.

(4.4) الدوال القابلة للقياس

Begin by defining a function $f : [0,1] \to [0,2]$ by

$$f(x) = c(x) + x$$

where $c : [0,1] \to [0,1]$ is the Cantor function. The graph of f looks much like that of c, except the horizontal lines are now all tilted with a slope of 1. I've drawn the graph for the first two iterations. This function has the following properties:



f is strictly increasing

- since $f' = 1$ almost everywhere (recall $c' = 0$ almost everywhere)

f is continuous

- since both c and x are continuous

f^{-1} exists

- f is 1-1 since it's strictly increasing; it's onto by the Intermediate Value Theorem: since $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ and f is continuous, it assumes all values in between 0 and 2!

f^{-1} is continuous (hence f is a homeomorphism)

- see footnote *

We should also observe that f maps the intervals of $[0,1]$ which are removed during the construction of the Cantor set $\mathscr{C}$ to intervals of $[0,2]$ of the *same length***. This implies

$$\mu(f([0,1] \setminus \mathscr{C})) = \mu([0,1] \setminus \mathscr{C}) = 1.$$

But since $[0,2] = f(\mathscr{C}) \sqcup f([0,1] \setminus \mathscr{C})$, we see that $2 = \mu([0,2]) = \mu(f(\mathscr{C})) + \mu(f([0,1] \setminus \mathscr{C})) = \mu(f(\mathscr{C})) + 1$ whence

$$\mu(f(\mathscr{C})) = 1.$$

From this we deduce that $f(\mathscr{C}) \subset [0,2]$ contains a non-measurable subset, say N (see fact #1 in the introduction). And here is where we make our

Claim: $f^{-1}(N)$ is Lebesgue measurable but *not* Borel.

This is easy to prove, but its substance lies in the following

Lemma: A strictly increasing function defined on an interval maps Borel sets to Borel sets.

Proof of Lemma

We follow exercises #45-47 of ch. 2 in Royden's *Real Analysis* (4ed). Let f be any strictly increasing function defined on some interval. By our analysis above, we know that such a function is a homeomorphism. This fact enables us to show that f maps Borel sets to Borel sets. To do so, it suffices to show that for any continuous function g the set

$$\mathscr{A} = \{E : g^{-1}(E) \text{ is Borel}\}$$

is a σ-algebra containing the open sets. Once we show this, we can conclude $\mathscr{A}$ contains all the Borel sets and therefore, taking g to be f^{-1} (which we know is continuous!), we'll have $(f^{-1})^{-1}(E) = f(E)$ is Borel for any Borel set E, which is what we want.

Showing $\mathscr{A}$ is a σ-algebra (the first two bullets) which contains the open sets (the third bullet) is simple enough (recall that $\mathscr{B}$ denotes the Borel sets):

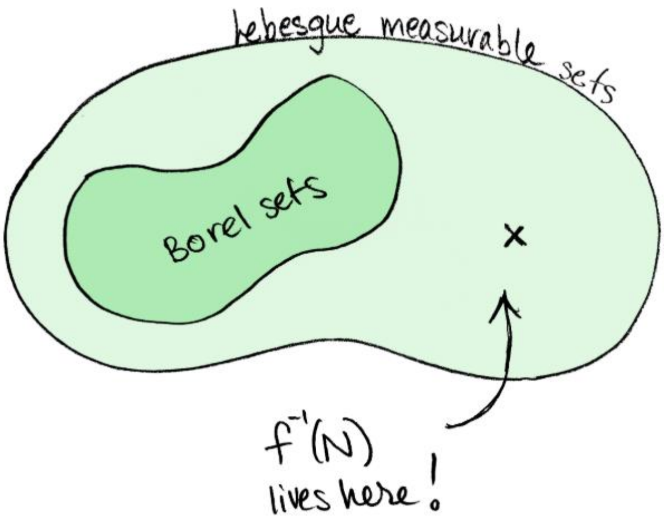
- If $\{E_i\} \subset \mathscr{A}$ then $f^{-1}(\cup E_i) = \cup f^{-1}(E_i) \in \mathscr{B}$ since $\mathscr{B}$ is a σ-algebra, hence $\cup E_i \in \mathscr{A}$.
- If $E \subset \mathscr{A}$ then $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c \in \mathscr{B}$ since $\mathscr{B}$ is a σ-algebra, hence $E^c \in \mathscr{A}$.
- If U is open, then $f^{-1}(U)$ is open and thus an element of $\mathscr{B}$. Hence $U \in \mathscr{A}$.

We are now ready for the

Proof of Claim

Since $N \subset f(\mathscr{C})$, we know that $f^{-1}(N) \subset \mathscr{C}$ is measurable (and has measure zero) since it is a subset of a zero set and the Lebesgue measure is complete. Moreover, $f^{-1}(N)$ is *not* Borel! If it were, then since f maps Borel sets to Borel sets by our Lemma, we'd have that $f(f^{-1}(N)) = N$ is Borel. But that's impossible since N isn't even measurable! This proves the claim.

measurable! This proves the claim.



Footnotes

(4.4) الدوال القابلة للقياس

*Proof: Let $h = f^{-1} : [0,2] \to [0,1]$ and suppose $U \subset [0,1]$ is open. Then $[0,1] \setminus U$ is compact and hence closed (and bounded). Since f is continuous, $f([0,1] \setminus U)$ is also closed. But we can rewrite this as

$$\begin{aligned} f([0,1] \setminus U) &= f([0,1]) \setminus f(U) \\ &= [0,2] \setminus f(U) \\ &= [0,2] \setminus h^{-1}(U) \end{aligned}$$

which allows us to conclude $h^{-1}(U)$ is open.

**Proof: This follows simply because c is constant on any interval in $[0,1] \setminus \mathscr{C}$. Indeed for any interval $(a,b) \subset [0,1] \setminus \mathscr{C}$, we have $c(a) = c(b)$ and so

$$\begin{aligned} \mu((f(a), f(b))) &= f(b) - f(a) \\ &= c(b) + b - c(a) - a \\ &= b - a. \end{aligned}$$

---

2. لتكن E مجموعة غير قابلة للقياس والدالة $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} & x \in E \\ e^{-x} & x \notin E \end{cases}$$

أثبت أن $\{x : f(x) = c\}$ قابلة للقياس لكل $c \in \mathbb{R}$، ولكن f ليست قابلة للقياس.

البرهان: بالعكس

لتكن $c \in \mathbb{R}$ فإن $\{x: f(x)=c\} = \{x \in E: f(x)=c\} \cup \{y \notin E: f(y)=c\}$

نفرض أنه يوجد $f(x)=c=f(y)$ بحيث $x \in E$, $y \notin E$

$e^{x} = -e^{y} \Rightarrow e^{x}+e^{y}=0$ وحيث أن $e^{x}>0$, $e^{y}>0$ [illegible] $e^{x}+e^{y}=0$ مستحيل.

مستحيل علاقة لا يوجد حل لهذه المعادلة وبالتالي

$\{x: f(x)=c\} = \emptyset \in \mathcal{M}$

الآن نفرض أن f قابلة للقياس لذا المجموعة $\{x: f(x)>0\} \in \mathcal{M}$

$\{x: f(x)>0\} = \{x \in E: f(x)>0\} \cup \{x \notin E: f(x)>0\} \in \mathcal{M}$

$= \{x \in E: e^{x}>0\} \cup \{x \notin E: -e^{x}>0\}$

$= E \cup \{\emptyset\} = E$

ولكن E ليست قابلة للقياس وهذا مستحيل إذن f ليست قابلة للقياس

(4.4) الدوال القابلة للقياس

3. تنص النظرية 4.17 على أن $|f|$ قابلة للقياس متى كانت f قابلة للقياس. أثبت أن العكـــس غير صحيح بإبراز دالة غير قابلة للقياس f بحيث تكون $|f|$ قابلة للقياس.

ولكن العكس ليس صحيحاً. ولتوضيح ذلك، نأخذ المثال المعطى في التمرين (8) حيث وجدنا أن الدالة

$f(x) = \begin{cases} e^x & x \in E \\ -e^x & x \notin E \end{cases}$ ، حيث E غير قابلة للقياس، هي دالة غير قابلة للقياس

ولكن $|f(x)| = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$ وحيث إن $|f|$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ فإن $|f|$ قابلة للقياس. إذاً قابلية القياس للدالة $|f|$ لا تقتضي قابلية القياس لـ f.

(3) لتكن E مجموعة غير قابلة للقياس،

الدالة $(\chi_E - \frac{1}{2})$ غير قابلة للقياس

لكن $\left|\chi_E(x) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \quad \forall x$

دالة قابلة للقياس

(4.4) الدوال القابلة للقياس

4. أثبت ما يلي:

(i) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$

(ii) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$

(iii) $\chi_{A\Delta B} = |\chi_A - \chi_B|$

(iv) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$

(4.4) الدوال القابلة للقياس

بالعكس ① نفرض أن $x \in A\cap B \Leftarrow x\in A$ و $x \in B$ ومنه

$$\chi_{A\cap B}(x) = 1 = \chi_A(x)\chi_B(x)$$

إذا كان $x\notin A\cap B \Leftarrow x\notin A$ أو $x\notin B$

ومنه $$\chi_{A\cap B}(x)=0=\chi_A(x)\chi_B(x)$$

ومنه $$\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B$$

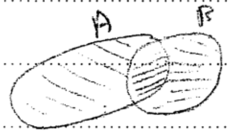
② نفرض أن $A\cap B=\emptyset$. إذا كان $x\in A\cup B \Leftarrow x\in A$ و $x\notin B$ أو $x\in B$, $x\notin A$

ومنه $$\chi_{A\cup B}(x)=1=\chi_A(x)+\chi_B(x)$$

إذا كان $x\notin A\cup B \Leftarrow x\notin A$, $x\notin B$

ومنه $$\chi_{A\cup B}(x)=0=\chi_A(x)+\chi_B(x)$$

إذن $$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B$$



إذا كان $A\cap B\neq\emptyset$ [illegible]

$$A\cup B=(A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)$$

$$\chi_{A\cup B}=\chi_{A\setminus B}+\chi_{A\cap B}+\chi_{B\setminus A}$$

$$B=(B\setminus A)\cup(A\cap B) \qquad A=(A\setminus B)\cup(B\cap A)$$

$$\chi_A=\chi_{A\setminus B}+\chi_{A\cap B}\ ,\quad \chi_B=\chi_{B\setminus A}+\chi_{A\cap B}$$

ومنه $$\chi_{A\cup B}=\chi_A-\chi_{A\cap B}+\chi_B-\cancel{\chi_{A\cap B}}+\cancel{\chi_{A\cap B}}$$

$$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$$

$$\chi_A+\chi_B=\chi_{A\setminus B}+\chi_{B\setminus A}+\chi_{A\cap B}+\chi_{A\cap B}$$
$$=\chi_{A\cup B}+\chi_{A\cap B}$$
$$\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}=\chi_{A\cup B}$$

③ نفرض أن $x\in A\,\Delta\, B \Leftarrow x\in A\setminus B$ أو $x\in B\setminus A$

$\Leftarrow x\in A$, $x\notin B$ أو $x\in B$, $x\notin A$

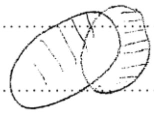
(4.4) الدوال القابلة للقياس

ومنه $\chi_{A\Delta B}(x) = 1 = \chi_A(x) - \chi_B(x)$

أو

$$\chi_{A\Delta B}(x) = \chi_B(x) - \chi_A(x)$$

نحصل على $\chi_{A\Delta B} \geq 0$ بما أن $\chi_{A\Delta B}(x) = |\chi_A(x) - \chi_B(x)|$



صحيحة كذلك $\Leftarrow x \notin A\Delta B$ $x \notin A\setminus B$ و $x \notin B\setminus A$

ملاحظة دائما $x \in A\cap B$ أو $x \notin A\cup B$ أي خلال الرسم

$$\chi_A(x) - \chi_B(x) = 0$$

أي أن $\chi_{A\Delta B} = |\chi_A - \chi_B|$

(6) نفرض $\Leftarrow x \in A^c$ $\Leftarrow x \notin A$ $\chi_A(x) = 0$ ومنه

$$\chi_{A^c}(x) = 1 = 1 - \chi_A(x)$$

أيضا إذا كانت $x \notin A^c$ $\Leftarrow x \in A$ $\Leftarrow$ $\chi_A(x) = 1$ ومنه:

$$\chi_{A^c}(x) = 0 = 1 - \chi_A(x)$$

أي أن $\boxed{\chi_{A^c} = 1 - \chi_A}$

(4.4) الدوال القابلة للقياس

$$\chi_{A\cap B}(x)=\begin{cases}1 & , x\in A\cap B\\ 0 & , x\in (A\cap B)^c\end{cases}$$ (i) 4

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & , x\in A\\ 0 & , x\in A^c\end{cases}$$

$$\chi_B(x)=\begin{cases}1 & , x\in B\\ 0 & , x\in B^c\end{cases}$$

$x\in A\cap B \Rightarrow x\in A \;\&\; x\in B$

$\Rightarrow \chi_{A\cap B}(x)=1 = (1)(1) = \chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$

$x\notin A\cap B \Rightarrow x\notin A \text{ or } x\notin B$

$\Rightarrow \chi_A(x)=0 \text{ or } \chi_B(x)=0$

$\Rightarrow \chi_A(x)\cdot\chi_B(x)=0$

$= \chi_{A\cap B}(x)$

$x\in A\cup B \Rightarrow \begin{cases} x\in A \;\&\; x\notin B\\ x\notin A \;\&\; x\in B\\ x\in A \;\&\; x\in B\end{cases}$ (ii)

$$\Rightarrow \begin{cases}\chi_A(x)=1 \;\&\; \chi_B(x)=0\\ \chi_A(x)=0 \;\&\; \chi_B(x)=1\\ \chi_A(x)=1 \;\&\; \chi_B(x)=1\end{cases}$$

$\Rightarrow \cancel{\chi_A(x)+\chi_B(x)}$

(4.4) الدوال القابلة للقياس

هذا الهامش

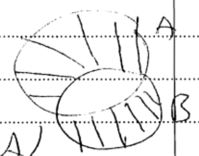
$$\Rightarrow \chi_{A\cup B}(x) = 1 = \begin{cases} (1) + 0 - 0 \\ 0 + 1 - 0 \\ 1 + 1 - 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) \\ \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) \\ \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) \end{cases}$$

$x \notin A\cup B \Rightarrow x \notin A \;\&\; x \notin B \;\&\; x \notin A\cap B$

$$\Rightarrow \chi_{A\cup B}(x) = 0 = 0 + 0 - 0$$
$$= \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$$

(iii) $A \Delta B = (A-B)\cup(B-A)$



$x \in A\Delta B \Rightarrow x \in (A-B)$ or $x \in B-A$

$\Rightarrow (x\in A \;\&\; x \notin B)$ or $(x \in B \;\&\; x \notin A)$

$\Rightarrow [\chi_A(x) = 1, \chi_B(x) = 0]$ or $[\chi_B(x) = 1 \;\&\; \chi_A(x) = 0]$

$\Rightarrow (\chi_A(x) - \chi_B)(x) = 1$ or $(\chi_A - \chi_B)(x) = -1$

$\Rightarrow |(\chi_A - \chi_B)(x)| = 1$

$x \notin A\Delta B \Rightarrow x \in A\cap B$ or $x \in (A\cup B)^c$

$\Rightarrow \chi_{A\cap B}(x) = 1$ or $\chi_{A\cup B}(x) = 0$

$\chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$ $\qquad$ $\chi_A(x) = 0$

$\chi_B(x) = 0$

$\Rightarrow (\chi_A - \chi_B)(x) = 0$ $\qquad$ $(\chi_A - \chi_B)(x) = 0$

$\chi_{A\Delta B}(x) = 0$ $\qquad$ $\chi_{A\Delta B}(x) = 0$

(4.4) الدوال القابلة للقياس

(17) $\chi_{A^c}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A^c \\ 0 & x \notin A^c \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 & ; x \notin A \\ 0 & ; x \in A \end{cases}$

$= \begin{cases} 1-0 & ; x \notin A \\ 1-1 & ; x \in A \end{cases}$

$= 1 - \chi_A(x)$

is measurable and f is measurable.

س4 ← **20.** Let $\varphi_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \chi_{A_i}$ and let $\varphi_2 = \sum_{i=1}^{n_2} \beta_i \chi_{B_i}$. Then $\varphi_1 + \varphi_2 = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \chi_{A_i} + \sum_{i=1}^{n_2} \beta_i \chi_{B_i}$ is a simple function. Also $\varphi_1\varphi_2 = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \chi_{A_i} \chi_{B_j}$ is a simple function. $\chi_{A\cap B}(x) = 1$ if and only if $x \in A$ and $x \in B$ if and only if $\chi_A(x) = 1 = \chi_B(x)$. Thus $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$. If $\chi_{A\cup B}(x) = 1$, then $x \in A \cup B$. If $x \in A \cap B$, then $\chi_A(x) + \chi_B(x) + \chi_A\chi_B(x) = 1 + 1 - 1 = 1$. If $x \notin A \cap B$, then $x \in A \setminus B$ or $x \in B \setminus A$ so $\chi_A(x) + \chi_B(x) = 1$ and $\chi_A\chi_B(x) = 0$. If $\chi_{A\cup B}(x) = 0$, then $x \notin A \cup B$ so $\chi_A(x) = \chi_B(x) = \chi_A\chi_B(x) = 0$. Hence $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B + \chi_A\chi_B$. If $\chi_{A^c}(x) = 1$, then $x \notin A$ so $\chi_A(x) = 0$. If $\chi_{A^c}(x) = 0$, then $x \in A$ so $\chi_A(x) = 1$. Hence $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

(4.4) الدوال القابلة للقياس

.5

(i) إذا كانت $\Omega_1,\Omega_2 \in \mathcal{M}$ و $f:\Omega_1 \cup \Omega_2 \to \mathbb{R}$ فأثبت أن f قابلة للقياس إذا وفقط إذا كان كل من $f|_{\Omega_1}$ و $f|_{\Omega_2}$ قابلة للقياس.

(ii) إذا كانت $f:\Omega \to \mathbb{R}$ قابلة للقياس و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالشكل

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\Omega \\ 0, & x\notin\Omega \end{cases}$$

فأثبت أن g قابلة للقياس. هذا يعني أنه كان بالإمكان اعتبار مجال كل دالة في البند السابق هو $\mathbb{R}$ بدلاً عن Ω دون إخلال بعمومية المعالجة.

الحل: نفرض أن $f|_{\Omega_1}$ و $f|_{\Omega_2}$ قابلتان للقياس $\Leftarrow$ $\{x\in\Omega_1 ; f(x)>\alpha\}\in\mathcal{M}$

$\{x\in\Omega_2 , f(x)>\alpha\}\in\mathcal{M} \quad \forall \alpha$

وبما أن $\{x\in\Omega \; f(x)>\alpha\} = \{x\in\Omega_1 , f(x)>\alpha\}\cup\{x\in\Omega_2 ; f(x)>\alpha\}$

إذاً $\{x\in\Omega ; f(x)>\alpha\}\in\mathcal{M} \Leftarrow f$ قابلة للقياس

بالعكس، نفرض أن f قابلة للقياس، وبما أن $f^{-1}((-\infty,\alpha]) = \{x\in\Omega ; f(x)\le\alpha\}_{\in\mathcal{M}}$

$f^{-1}((-\infty,\alpha])\cap\Omega_1 = \{x\in\Omega , f(x)\le\alpha\}\cap\Omega_1$

$= \{x\in\Omega_1 ; f(x)\le\alpha\}$

وبما أن $f^{-1}((-\infty,\alpha])\in\mathcal{M}$ (لأن f قابلة للقياس على Ω) و $\Omega_1\in\mathcal{M}$

إذاً $f^{-1}((-\infty,\alpha])\cap\Omega_1 = \{x\in\Omega_1 , f(x)\le\alpha\}_{\in\mathcal{M}}$ وبالتالي $f|_{\Omega_1}$ قابلة للقياس وبنفس الطريقة $f|_{\Omega_2}$ قابلة للقياس

(b) إذا كانت $f:\Omega\to\mathbb{R}$ قابلة للقياس و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة كالتالي

$\mathbb{R}\supset\Omega$, $g(x)=\begin{cases} f(x) ; & x\in\Omega \\ 0 ; & x\notin\Omega \end{cases}$

برهن أن g قابلة للقياس (أي أننا نستطيع اعتبار مجال f هو $\mathbb{R}$)

$\{x ; g(x)>\alpha\} = \underbrace{\{x\in\Omega ; f(x)=g(x)>\alpha\}}_{\in\mathcal{M}\;\forall\alpha}\cup\{x\notin\Omega ; g(x)>\alpha\}$

إذا كانت $\alpha>0 \Leftarrow \{x\notin\Omega ; g(x)=0>\alpha\}=\phi\in\mathcal{M}$

أما إذا كانت $\alpha\le 0$ فإن $\{x\notin\Omega ; g(x)=0 \ge\alpha\} = \Omega^c \in\mathcal{M}$

ومن اتحاد المجموعتين $\{x ; g(x)>\alpha\}_{\in\mathcal{M}} \Leftarrow g$ قابلة للقياس.

(4.4) الدوال القابلة للقياس

$\chi_A(x) = 1$. Hence $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

5(i) **21a.** Let D and E be measurable sets and f a function with domain $D \cup E$. Suppose f is measurable. Since D and E are measurable subsets of $D \cup E$, $f|_D$ and $f|_E$ are measurable. Conversely, suppose $f|_D$ and $f|_E$ are measurable. Then for any $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) > \alpha\} = \{x \in D : f|_D(x) > \alpha\} \cup \{x \in E : f|_E(x) > \alpha\}$. Each set on the right is measurable so $\{x : f(x) > \alpha\}$ is measurable and f is measurable.

5(ii) **21b.** Let f be a function with measurable domain D. Let g be defined by $g(x) = f(x)$ if $x \in D$ and $g(x) = 0$ if $x \notin D$. Suppose f is measurable. If $\alpha \geq 0$, then $\{x : g(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \alpha\}$, which is measurable. If $\alpha < 0$, then $\{x : g(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \alpha\} \cup D^c$, which is measurable. Hence g is measurable. Conversely, suppose g is measurable. Then $f = g|_D$ and since D is measurable, f is measurable.

---

6. لكل $x \in [0,1]$، اكتب المفكوك الثنائي $x = \sum_{i=1}^{\infty} s_i / 2^i$، حيث نختار لكل $x > 0$ مفكوكًا لا ينتهي بسلسلة 1. إذا عرَّفنا $\Psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ بأنها

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2s_i}{3^i}$$

فإن المجموعة $\Psi(I)$ محتواة في مجموعة كانتور F (راجع المثال 3.17 في [1]).

(i) أثبت أن Ψ متباينة وقابلة للقياس.

(ii) أثبت أن $\Psi(E)$ قابلة للقياس لكل $E \subset [0,1]$.

(iii) باختيار $E \notin \mathcal{M}$ أثبت أن $\mathcal{B} \neq \mathcal{M}$.

تسمى Ψ **دالة كانتور**.

① برهن أن $\Psi(E) \in \mathcal{M}$ لكل $E \subset [0,1]$.

بالعكس بما أن $m(F) = 0$ وحيث أن $\Psi(E) \subset F \Leftarrow m(\Psi(E)) \leq \underset{=0}{m(F)} \Leftarrow$

$\Leftarrow m(\Psi(E)) = 0 \Leftarrow \Psi(E) \in \mathcal{M}$

② لتكن $x \in [0,1]$ ولنفرض أن $x = 0.x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \ldots$ بالنسبة للنظام العشري أو الثنائي أو الثلاثي

لنعرف الدالة $f(x) = x_n$. برهن أن f دالة قابلة للقياس.

(4.4) الدوال القابلة للقياس

نفرض ان $x \in F$ (F مجموعة كانتور) اذن $x = 0.x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$ بالنسبة للنظام الثلاثي

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{3^i} \; ; \quad s_i \in \{0, 2\}$$

واذا $f(x) = x_n = \frac{s_n}{3^n}$ معناه

$$f_n(0) = 0 , \quad f_n(x) = \sum_{r=0}^{3-1=2} \sum_{k=0}^{3^{n-1}-1} r \chi_{I_{r,k}} \; ; \quad x \neq 0$$

$$= \sum_{k=1}^{3^{n-1}-1} 0 \chi_{I_{0,k}} + \sum_{k=0}^{3^{n-1}-1} \chi_{I_{1,k}} + \sum_{k=0}^{3^{n-1}-1} 2 \chi_{I_{2,k}}$$

$$I_{r,k} = \left(r 3^{-n} + k 3^{-n+1} , \; (r+1) 3^{-n} + k 3^{-n+1} \right) \in \mathcal{M}$$

ومنه f_n قابلة للقياس

③ نعود مرة ثانية لتعريف الدالة ψ

$$\psi(x) = \psi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{2^i} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 s_i}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{3^i} \qquad s_i \in \{0, 1\}$$

حيث $t_i \in \{0, 2\}$

$$\psi(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \; ; \quad f_i(x) = \frac{t_i}{3^i} , \; t_i \in \{0, 2\}$$

وحسب المبرهنة ② حيث f_i قابلة للقياس ، لدينا $S_n = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ متتالية متزايدة متقاربة نحو الدالة ψ

وحسب ψ_n قابلة للقياس $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \inf f_n = \lim_{n\to\infty} \sup f_n = \psi$ ، ψ قابلة للقياس

(4.4) الدوال القابلة للقياس

(6) حيث أنه يمكن $\psi(x)$ بتعريف المتتالية $\{S_i\}$ (i)
من المفكوك $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2S_i}{3^i}$ بشكل وحيد، تماماً X محددة بشكل
وحيد، لذا فإن $\psi(x)$ متباينة

حيث إن S_i دالة قابلة للقياس في x فإن ψ قابلة للقياس
(انظر مبرهنة 36 الفصل الثاني G. de Barra)

(ii) $V = f(E)$ تقع في مجموعة كانتور P
ولذلك لها القياس صفر. وهكذا V قابلة للقياس
لكن f أحادية، ولذلك $E = f^{-1}(V)$ التي هي غير قابلة
للقياس، لذا نستنتج $\mathcal{B} \neq \mathcal{M}$

(4.4) الدوال القابلة للقياس

Proposition 21 *Let φ be the Cantor-Lebesgue function and define the function ψ on* $[0, 1]$ *by*

$$\psi(x) = \varphi(x) + x \text{ for all } x \in [0, 1].$$

Then ψ is a strictly increasing continuous function that maps $[0, 1]$ *onto* $[0, 2]$,

6(ii) س (i) *maps the Cantor set C onto a measurable set of positive measure and*

(ii) *maps a measurable set, a subset of the Cantor set, onto a nonmeasurable set.*

Proof The function ψ is continuous since it is the sum of two continuous functions and is strictly increasing since it is the sum of an increasing and a strictly increasing function. Moreover, since $\psi(0) = 0$ and $\psi(1) = 2$, $\psi([0, 1]) = [0, 2]$. For $\mathcal{O} = [0, 1] \sim C$, we have the disjoint decomposition

$$[0, 1] = \mathbf{C} \cup \mathcal{O}$$

which ψ lifts to the disjoint decomposition

$$[0, 2] = \psi(\mathcal{O}) \cup \psi(\mathbf{C}). \tag{18}$$

A strictly increasing continuous function defined on an interval has a continuous inverse. Therefore $\psi(C)$ is closed and $\psi(\mathcal{O})$ is open, so both are measurable. We will show that $m(\psi(\mathcal{O})) = 1$ and therefore infer from (18) that $m(\psi(C)) = 1$ and thereby prove (i).

Let $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ be an enumeration (in any manner) of the collection of intervals that are removed in the Cantor removal process. Thus $\mathcal{O} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Since φ is constant on each I_k, ψ maps I_k onto a translated copy of itself of the same length. Since ψ is one-to-one, the collection $\{\psi(I_k)\}_{k=1}^{\infty}$ is disjoint. By the countable additivity of measure,

$$m(\psi(\mathcal{O})) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(\psi(I_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = m(\mathcal{O}).$$

But $m(\mathbf{C}) = 0$ so that $m(\mathcal{O}) = 1$. Therefore $m(\psi(\mathcal{O})) = 1$ and hence, by (18), $m(\psi(\mathbf{C})) = 1$. We have established (i).

To verify (ii) we note that Vitali's Theorem tells us that $\psi(\mathbf{C})$ contains a set W, which is nonmeasurable. The set $\psi^{-1}(W)$ is measurable and has measure zero since it is a subset of the Cantor set. The set $\psi^{-1}(W)$ is a measurable subset of the Cantor set, which is mapped by ψ onto a nonmeasurable set. □

6(iii) س

Section 2.7 The Cantor Set and the Cantor-Lebesgue Function 53

Proposition 22 *There is a measurable set, a subset of the Cantor set, that is not a Borel set.*

Proof The strictly increasing continuous function ψ defined on $[0, 1]$ that is described in the preceding proposition maps a measurable set A onto a nonmeasurable set. A strictly increasing continuous function defined on an interval maps Borel sets onto Borel sets (see Problem 47). Therefore the set A is not Borel since otherwise its image under ψ would be Borel and therefore would be measurable. □

7. لتكن Ψ دالة كانتور المعرفة في التمرين 6. خذ $E \notin \mathcal{M}$ ثم ضع $\varphi = \chi_{\Psi(E)}$. أثبت أن φ قابلة للقياس ولكن $\varphi \circ \Psi$ ليست كذلك.

(4.4) الدوال القابلة للقياس

8. تــؤكد النتــيجة في التمرين (7) أن مجموعة كانتور تحتوي مجموعة غير قابلة للقياس. استخدم هذه الحقيقة لتثبت أن $m|_{\mathcal{B}}$ ليس قياسًا تامًا.

---

9. أثبت أن تقارب (φ_n) من f في النظرية 4.20 تقارب منتظم.