تمارين مقرر 481 ريض (التحليل الحقيقي 2)

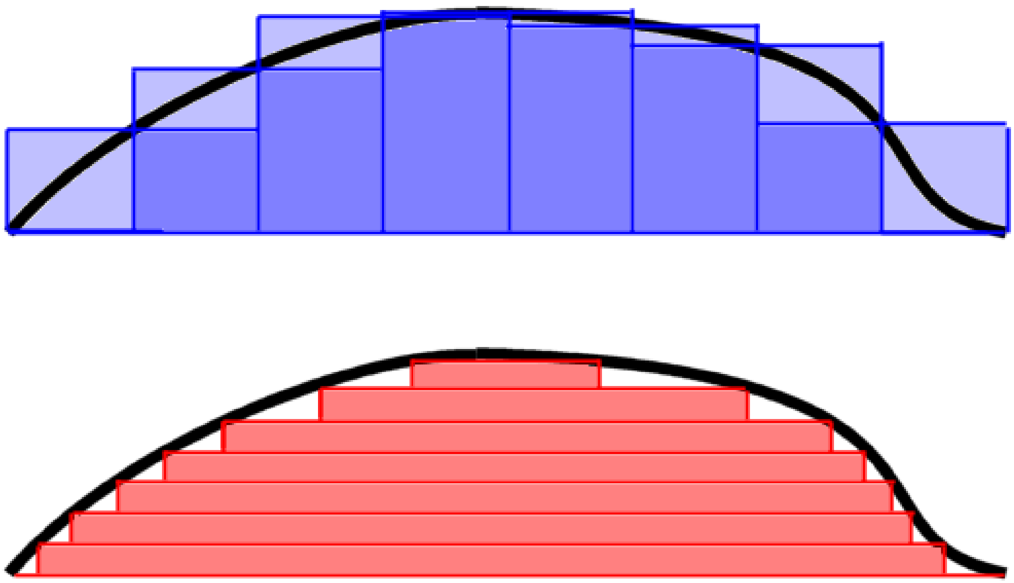
حل تمارين كتاب:

مبادئ التحليل الحقيقي- الجزء الثاني (القياس و التكامل)-الطبعة الثانية

إعداد:

أ. فواز بن سعود العتيبي

- قسم الرياضيات – جامعة الملك سعود



Riemann-Darboux's integration (in blue), and Lebesgue integration (in red).

الفصل الثاني: متسلسلات الأعداد الحقيقية

(2.1) الخواص الأساسية للمتسلسلات

تمارين 2.1

1. افــرض أن $\sum y_n$ هــي المتسلــسلة الناتجة من حذف الحدود الصفرية من المتسلــسلة $\sum x_n$. أثــبت أن $\sum x_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت $\sum y_n$ متقاربة، وأن $\sum x_n = \sum y_n$ في حالة التقارب.
2. أثبت أن تغيير عدد منته من حدود المتسلسلة لا يؤثر على تقاربها.
3. إذا كان $x_n \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فأثبت أن المتسلسلة $\sum x_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت المتتالية $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ محدودة من أعلى.
4. اعط مثالاً لمتسلسلة متباعدة

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \cdots$$

بحيث تكون المتسلسلة

$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6) + \cdots$$

متقاربة.

5. إذا كانت المتسلسلة $\sum x_n$ متقاربة فأثبت أن المتسلسلة

$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6) + \cdots$$

أيضًا متقاربة، ولها النهاية نفسها.

(2.1) الخواص الأساسية للمتسلسلات

6. افرض أن المتسلسلة $\sum x_n$ متقاربة شرطيًا، وأن (a_n) متتالية الحدود الموجبة في (x_n) وَ (b_n) متتالية الحدود السالبة، حسب ترتيب كل منهما في (x_n).
   (i) أثبت أن كلا من $\sum a_n$ وَ $\sum b_n$ متباعدة.
   (ii) عرِّف إعادة ترتيب لـ $\sum x_n$ يمثل متسلسلة غير متقاربة في $\overline{\mathbb{R}}$.
7. أثبت أن
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)(n+1+a)}=\frac{1}{a}\quad \forall a>0.$$
8. إذا كانت $x_n\geq 0$ فأثبت أن تقارب $\sum x_n$ يقتضي تقارب $\sum x_n^2$ ولكن العكس غير صحيح.
9. افرض أن $x_n>0$ لكل $n\in\mathbb{N}$ وأن $y_n=\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)$. أثبت أن المتسلسلة $\sum y_n$ متباعدة.
10. بإعادة ترتيب المتسلسلة $\sum(-1)^{n+1}/n$ (المتقاربة شرطيًا) للحصول على الصورة
$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$$
أثبت أن هذه المتسلسلة الأخيرة أيضًا متقاربة ولكن من نهاية تختلف عن $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$.
11. إذا كانت المتسلسلة $\sum x_n$ متقاربة مطلقًا فأثبت أن
$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=(x_1+x_3+x_5+\cdots)+(x_2+x_4+x_6+\cdots)$$

الحلول:

(2.1) الخواص الأساسية للمتسلسلات

1. افــرض أن $\sum y_n$ هــي المتسلــسلة الناتجة من حذف الحدود الصفرية من المتسلــسلة $\sum x_n$. أثــبت أن $\sum x_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت $\sum y_n$ متقاربة، وأن $\sum y_n = \sum x_n$ في حالة التقارب.

1) حسب نظرية 2.2 (معيار كوشي لتقارب المتسلسلات)

$\sum x_n$ متقاربة $(\Leftrightarrow)$ لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ بحيث

$n > m \geq N \Rightarrow |S_n - S_m| = |x_{m+1} + \dots + x_n| < \varepsilon$

ومن حسب تعريف $\sum y_n$ فإنه:

$S_n = S'_n \quad , \quad S_m = S'_m$

$n > m \geq N \Rightarrow |S'_n - S'_m| < \varepsilon \quad (\Leftrightarrow)$

$\lim S'_n \Leftarrow$ متقاربة $\sum y_n \quad (\Leftrightarrow)$

$= \lim S_n = \sum x_n$

---

2. أثبت أن تغيير عدد منته من حدود المتسلسلة لا يؤثر على تقاربها.

3.1.9 Theorem *Let $X = (x_n : n \in \mathbb{N})$ be a sequence of real numbers and let $m \in \mathbb{N}$. Then the m-tail $X_m = (x_{m+n} : n \in \mathbb{N})$ of X converges if and only if X converges. In this case,* $\lim X_m = \lim X$.

Let $S = \sum_{i=1}^{\infty} x_n$ be an arbitrary series. Let $A = \{n : x_n \text{ is changed }\}$ be a finite set, and let $S' = \sum_{i=1}^{\infty} x'_n$ be a new series, created by the changes from A.

Since A is a finite set, $n_0 = \max\{n : x_n \in A\}$ exists. So, for $n > n_0$, x_n is not changed, which means that $S'' = \sum_{i=n_0+1}^{\infty} x_n$ is the n_0-tail of S' **and** S.

Now Theorem 3.1.9 states that S converges $\iff$ S'' converges, and that S' converges $\iff$ S'' converges. These two statements together say that:

$$S \text{ converges} \iff S' \text{ converges}$$

which is what we needed to prove.

(2.1) الخواص الأساسية للمتسلسلات

Let $\sum a_n$ be a convergent series. Let $\sum b_n$ be any series with $a_n = b_n$ for all $n \geq n_0$, for some $n_0 \in \mathbb{N}$. So, $\sum b_n$ is a series obtained by changing finitely many terms of $\sum a_n$.

Let $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ and $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Therefore,

For $n \geq n_0$, we have,

$$S_n - T_n = \sum_{k=1}^{n_0} (a_k - b_k) + \sum_{k=n_0+1}^{n} (a_k - b_k)$$

$$\Rightarrow S_n - T_n = \sum_{k=1}^{n_0} (a_k - b_k) + 0 = \sum_{k=1}^{n_0} (a_k - b_k) - \text{Constant}.$$

$\Rightarrow (S_n - T_n)$ is an eventually constant sequence, hence is convergent. Also, by given condition (S_n) is convergent.

So, $(T_n) = (S_n) - (S_n - T_n)$. (T_n) being difference of two convergent sequences is convergent.

So, $\sum b_n$ is convergent. This establishes the result.

(2.1) الخواص الأساسية للمتسلسلات

Suppose $x_n \to x$. This means for all $\epsilon > 0$ there exists some N such that if $n \geq N$, then $|x_n - x| < \epsilon$.

Now suppose x'_n is a sequence such that for $n \geq M$, then $x'_n = x_n$.

Let $\epsilon > 0$, there exists some N that 'works' for the original sequence x_n. Now take $N' = \max(N, M)$. Then if $n \geq N'$, we have $|x'_n - x| < \epsilon$. Hence $x'_n \to x$.

Now consider a convergent series $\sum_n x_n$. If we let $s_n = x_1 + ... + x_n$, then we have $s_n \to s$.

Now consider the series $\sum_n x'_n$, where for $n \geq M$, then $x'_n = x_n$. Let $s'_n = x'_1 + ... + x'_n$. Note that for $n \geq M$, we have $s'_n - s'_{M-1} = x'_M + ... x'_n = x_M + ... x_n$ and so $s'_n - s'_{M-1} = s_n - s_{M-1} \to s - s_{M-1}$.

Hence $s'_n \to (s - s_{M-1} + s'_{M-1})$.

Cauchy's criterion for convergence (assuming we're dealing with $\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$, technically a complete space in complete generality) says that a series $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ with $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$ converges if and only if for every $\epsilon > 0$, there is an $N > 0$ so that for all $m > n \geq N$, we have

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \epsilon.$$

The key thing to realize is the "there is an $N > 0$ so that for all $m > n \geq N$." This is basically saying that it doesn't matter what happens for a finite number of terms before we get to a

So, suppose we change a finite number of terms in a series and say that K is the largest a_K that we change in the series. If we take $N_0 > \max(K, N)$, where N is given as in the equivalence above (since we know the original series converges), we still obtain

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \epsilon.$$

for all $m > n \geq N_0$. Therefore, the convergence of the series is not affected in the sense that one converges if and only if the other does also. However, they may in fact converge to different limits because the Cauchy Criterion does not give any information about the limit itself.

(2.1) الخواص الأساسية للمتسلسلات

3. إذا كان $x_n \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فأثبت أن المتسلسلة $\sum x_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت المتتالية $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ محدودة من أعلى.

(م) $\sum x_n$ متقاربة $\Leftarrow$ (S_n) متقاربة

$\Leftarrow$ (S_n) ~~[illegible]~~ ومحدودة (مقرر التحليل الحقيقي 1)

لكن (S_n) متزايدة لأن (x_n) غير سالبة لكل $n \in \mathbb{N}$

$\Leftarrow$ $\lim S_n = \sup\{S_n : n\}$ (مقرر التحليل الحقيقي 1)

$\Leftarrow$ (S_n) محدودة من أعلى و $\sum x_n = \lim S_n$

---

4. اعط مثالاً لمتسلسلة متباعدة

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \cdots$$

بحيث تكون المتسلسلة

$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6) + \cdots$$

متقاربة.

لنأخذ المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} x_n = \sum_{1}^{\infty} (-1)^n$ وهي متباعدة، لكن

$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \cdots + (x_n + x_{n+1}) + \cdots$

$= \sum_{1}^{\infty} (x_n + x_{n+1}) = 0$ وهي متقاربة $x_n + x_{n+1} = 0 \ \forall n \sim N$

(ع) خذ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ متباعدة

لكن $(-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots$

$= 0 + 0 + 0 + \cdots$ متقاربة

(2.1) الخواص الأساسية للمتسلسلات

5. إذا كانت المتسلسلة $\sum x_n$ متقاربة فأثبت أن المتسلسلة

$$(x_1+x_2)+(x_3+x_4)+(x_5+x_6)+\cdots$$

أيضًا متقاربة، ولها النهاية نفسها.

لاحظ $(x_1+x_2)+\cdots+(x_n+x_{n+1})+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n+x_{n+1})$

ليكن $S_n = x_1+x_2+\cdots+x_n$

ونعتبر $T_n = (x_1+x_2)+(x_3+x_4)+\cdots+(x_n+x_{n+1})$

$= S_n + x_{n+1}$

وبما أن $\sum_1^{\infty} x_n$ متقاربة فإن $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ومعلوم أنه $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = 0$

ومنه $\lim T_n = \lim_{n\to\infty}(S_n + x_{n+1})$

$= S+0 = S$ أي أن $\sum_1^{\infty}(x_n+x_{n+1})$ متقاربة ومجموعها $= S$

ح) $\sum x_n$ متقاربة $\Leftarrow$ (S_n) متقاربة حيث $S_n = x_1+x_2+\cdots+x_n$

$\tilde{S}_n = y_1+y_2+\cdots+y_n$

$= (x_1+x_2)+(x_3+x_4)+\cdots+(x_{2n-1}+x_{2n})$

$= S_n + x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n-1}+x_{2n}$

$= S_n + (S_{2n}-S_n) = S_{2n}$

لكن S_{2n} متتالية جزئية من (S_n) المتقاربة

فنهاية S_{2n} هي نهاية (S_n) (مبرهنة، التحليل الحقيقي 1)

$\Rightarrow \sum y_n = \lim \tilde{S}_n = \lim S_n = \sum x_n$

(2.1) الخواص الأساسية للمتسلسلات

6. افرض أن المتسلسلة $\sum x_n$ متقاربة شرطيًا، وأن (a_n) متتالية الحدود الموجبة في (x_n) وَ (b_n) متتالية الحدود السالبة، حسب ترتيب كل منهما في (x_n).

(i) أثبت أن كلا من $\sum a_n$ وَ $\sum b_n$ متباعدة.

(ii) عرِّف إعادة ترتيب لــ $\sum x_n$ يمثل متسلسلة غير متقاربة في $\overline{\mathbb{R}}$.

6 (i) $\sum x_n$ متقاربة و $\sum |x_n|$ متباعدة

$\Leftarrow S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ متقاربة

$S_n = |x_1| + \cdots + |x_n|$ متباعدة

$T_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \sum a_n$

$= |x_{k_1} + x_{k_2} + \cdots + x_{n_k}$

واضح أن (T_n) متتالية جزئية من (S_n)

(2.1) الخواص الأساسية للمتسلسلات

.7 أثبت أن

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)(n+1+a)}=\frac{1}{a}\qquad \forall a>0.$$

الحل:

$$\frac{1}{(n+a)(n+1+a)}=\frac{A}{n+a}+\frac{B}{n+1+a}$$

$$1=A(n+1)+Aa+Bn+aB=n(A+B)+Aa+aB-A$$

$$1=(A+B)n+Aa+Ba+A$$

منه $A+B=0$ ، $Aa+Ba+A=1 \Leftarrow A=-B$ ، $A=1$ ، $B=-1$

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)(n+1+a)}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+1+a}$$

$$S_n=\left(\frac{1}{a}-\cancel{\frac{1}{1+a}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{1+a}}-\cancel{\frac{1}{2+a}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2+a}}-\cancel{\frac{1}{3+a}}\right)+\dots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1+a}}-\cancel{\frac{1}{n+a}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+a}}-\frac{1}{n+1+a}\right)$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{n+1+a}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{a}=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)(n+1+a)}$$

(شاهد مستوى المعرفة (2,1) صعب)

(8) : نفرض أن $x_n>0$ لكل $n\in\mathbb{N}$ وأن $y_n=\frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n)$. برهن أن $\sum y_n$ متباعدة.

بالعكس

$$y_1=\frac{x_1}{1}$$

$$y_2=\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$y_3=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dots\dots,\ y_n=\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$$

منه

$$S_n=y_1+\dots+y_n=\frac{x_1}{1}+\frac{x_1+x_2}{2}+\dots+\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$$

$$>\frac{x_1}{1}+\frac{x_1}{2}+\frac{x_1}{3}+\frac{x_1}{4}+\dots+\frac{x_1}{n}$$

$$S_n>x_1\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$$

وبما أن $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$ إذاً $\sum_{1}^{\infty}y_n$ متباعدة

(2.1) الخواص الأساسية للمتسلسلات

$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$

$x_n = \frac{1}{(n+a)(n+1+a)} = \frac{A}{n+a} + \frac{B}{n+1+a}$

$\Rightarrow A(n+1+a) + B(n+a) = 1$

$(A+B)n + A + Aa + Ba = 1$

$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A+Aa+Ba=1 \end{array}\right\} \Rightarrow B=-A \Rightarrow A + \cancel{Aa} - \cancel{Aa} = 1$

$A = 1 \Rightarrow B = -1$

$x_n = \frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+1+a}$

$S_n = \frac{1}{0+a} - \cancel{\frac{1}{1+a}} + \cancel{\frac{1}{1+a}} - \frac{1}{2+a} + \dots + \frac{1}{n-1+a} - \frac{1}{n+a}$

$= \frac{1}{0+a} - \frac{1}{n+a}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n+a}\right) = \frac{1}{a} \Rightarrow \sum \frac{1}{(n+a)(n+1+a)} = \frac{1}{a}$

---

8. إذا كانـــت $x_n \geq 0$ فأثبت أن تقارب $\sum x_n$ يقتضي تقارب $\sum x_n^2$ ولكن العكس غير صحيح.

هذا غير صحيح. لنعتبر المتسلسلة $\sum_1^\infty a_n = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ نعلم أنها متقاربة

ولكن $\sum a_n^2 = \sum_1^\infty \frac{1}{n}$ متباعدة

(2.1) الخواص الأساسية للمتسلسلات

(٨) إذا كان $a_n \geq 0$ فإن:

$0 \leq a_n^2 \leq a_n \leq 1$ لقيمة كبيرة بكفاية لـ n

المثال: خذ $\sum (-1)^n n^{\frac{1}{4}}$ م

$\sum \left[(-1)^n n^{\frac{1}{4}}\right]^2 = \sum n$ متباعدة

Since $\sum a_n$ is convergent, 3.7.3. The nth Term Test states that $\lim(a_n) = 0$. This means that for $\epsilon = 1 > 0$ there exists a $N \in \mathbb{N}$ so that for $n \geq N$ following is true:

$$|a_n - 0| < \epsilon$$
$$|a_n| < 1$$
$$0 < a_n < 1, \qquad (a_n > 0, \forall n)$$

Since we know that $x^2 < x$ for $0 < x < 1$, we have:

$$0 < a_n^2 < a_n < 1, \forall n \geq N$$

Finally, 3.7.7 Comparison Test (a) states that $\sum a_n^2$ is convergent.

---

9. افرض أن $x_n > 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وأن $y_n = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$. أثبت أن المتسلسلة $\sum y_n$ متباعدة.

بالتعويض

$y_1 = \frac{x_1}{1}$

$y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$y_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \ldots, y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

حيث

$S_n = y_1 + \cdots + y_n = \frac{x_1}{1} + \frac{x_1 + x_2}{2} + \cdots + \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

$> \frac{x_1}{1} + \frac{x_1}{2} + \frac{x_1}{3} + \frac{x_1}{4} + \cdots + \frac{x_1}{n}$

$S_n > x_1\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$

بما أن $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ متباعدة $\Leftarrow$ $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$ إذاً $\sum_1^\infty y_n$ متباعدة

(9) نثبت أن :

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \geq x_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} y_i \geq x_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

متباعدة

باختبار المقارنة $\sum y_i$ متباعدة

Let $s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ be n-th partial sum. Since $a_n > 0$, we know that (s_n) is an increasing sequence, therefore $s_n > s_1 = a_1$.

From the definition of b_n, we get:

$$s_1 < s_n \quad \Big| \cdot \frac{1}{n}$$
$$\frac{s_1}{n} < \frac{s_n}{n}$$
$$\frac{a_1}{n} < b_n$$

Since we know that the harmonic series $\sum \frac{1}{n}$ diverges, which means that $\sum \frac{a_1}{n} = a_1 \sum \frac{1}{n}$ also diverges, the 3.7.7 Comparison test (b) states that: $\sum b_n$ diverges as well.

(2.1) الخواص الأساسية للمتسلسلات

10. بإعادة ترتيب المتسلسلة $\sum (-1)^{n+1}/n$ (المتقاربة شرطيًا) للحصول على الصورة

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$$

أثبت أن هذه المتسلسلة الأخيرة أيضًا متقاربة ولكن من نهاية تختلف عن $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$.

(2.1) الخواص الأساسية للمتسلسلات

هذا الهامش

(1) لتكن

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdots$$

$$S^* = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = S \qquad (2)$$

وبشكل مشابه

$$\frac{1\cdot 2 + 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{5\cdot 6 + 7\cdot 8}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \cdots =$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right) = S \qquad (3)$$

$$S^* = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

بضرب المتسلسلة (2) بـ $\frac{1}{2}$ وإضافة المتسلسلة الناتجة والمتسلسلة (3) حداً حداً نحصل على:

$$\frac{3S}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} + \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right] = S^*$$

لاحظ أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ من $\log(1-x) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (بوضع $x = -1$)

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \cdots = \frac{3}{2} \ln 2$$

(2.1) الخواص الأساسية للمتسلسلات

(f) The **alternating harmonic series,** given by

$$(7)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$$

is convergent.

The reader should compare this series with the harmonic series in (b), which is divergent. Thus, the subtraction of some of the terns in (7) is essential if this series is to converge. Since we have

$$s_{2n} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right),$$

it is clear that the "even" subsequence (s_{2n}) is increasing. Similarly, the "odd" subsequence (s_{2n+1}) is decreasing since

$$s_{2n+1} = \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Since $0 < s_{2n} < s_{2n} + 1/(2n+1) = s_{2n+1} \le 1$, both of these subsequences are bounded below by 0 and above by 1. Therefore they are both convergent and to the same value. Thus

the sequence (s_n) of partial sums converges, proving that the alternating harmonic series (7) converges. (It is far from obvious that the limit of this series is equal to $\ln 2$.) □

---

11. إذا كانت المتسلسلة $\sum x_n$ متقاربة مطلقًا فأثبت أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = (x_1 + x_3 + x_5 + \cdots) + (x_2 + x_4 + x_6 + \cdots)$$

بالعكس لدينا $\sum_1^\infty |x_{2n}| \le \sum_1^\infty |x_n|$ متقاربة ⇐ $\sum_1^\infty x_{2n}$ متقاربة مطلقاً إذاً هي متقاربة

أيضاً لدينا $\sum_1^\infty |x_{2n-1}| \le \sum_1^\infty |x_n|$ متقاربة ⇐ $\sum_1^\infty x_{2n-1}$ = ⇐ إذاً هي متقاربة

ومنه يكون $\sum_1^\infty x_n = \sum_1^\infty x_{2n-1} + \sum_1^\infty x_{2n}$ متقاربة

(2.2) اختبارات التقارب

تمارين 2.2

1. اختبر المتسلسلات التالية من حيث التقارب والتباعد

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n^2}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

(2.2) اختبارات التقارب

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2/n!$ (vi) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$

(vii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ (viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

(ix) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ (x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(xi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ (xii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

2. أثبت أن المتسلسلة

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\cdots$$

متقاربة باختبار الجذر وأن اختبار النسبة لا يعطي نتيجة.

3. إذا كان $x_n \le y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فأثبت أن

$$\limsup x_n \le \limsup y_n$$
$$\liminf x_n \le \liminf y_n$$
$$\liminf x_n \le \limsup y_n$$

ثم أعط مثالاً فيه $\limsup x_n > \liminf y_n$.

4. (i) أثبت أن تقارب المتسلسلتين $\sum a_n^2$ وَ $\sum b_n^2$ يقتضي تقارب $\sum a_n b_n$.

(ii) أثبت أن تقارب $\sum a_n^2$ يقتضي تقارب $\sum a_n/n$.

5. افرض أن المتتالية (a_n) موجبة ومتناقصة. إذا كانت $\sum a_n$ متقاربة فأثبت أن $\lim n a_n = 0$.

6. إذا كانت المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة فأثبت أن $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ أيضًا متباعدة.

(2.2) اختبارات التقارب

7. احسب $\liminf \sqrt[n]{x_n}$ للمتسلسلة المعطاة في المثال 2.11.

8. أثبت أن المتتالية

$$\gamma_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$$

متقاربة. تسمى نهايتها **ثابت أويلر** Euler's constant ويرمز لها بـــ γ، حيث $\gamma = 0.577215665\cdots$.

الحلول:

1. اختبر المتسلسلات التالية من حيث التقارب والتباعد

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sqrt{n}}{n^2}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n}$ (vi) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2/n!$ (vi) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$

(vii) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$ (viii) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$

(ix) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ (x) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

(xi) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ (xii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

(2.2) اختبارات التقارب

(أ) (i) $x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right] = \frac{1}{2}$

إذن المتسلسلة متقاربة من $\frac{1}{2}$

(ii) نختبر $\sum y_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ متقاربة لأن $p = \frac{3}{2} > 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{1+\sqrt{n}}{n^2} \cdot n^{3/2} = \lim \frac{n^{3/2}+n^2}{n^2}$

$= \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}+1}{1} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum \frac{1+\sqrt{n}}{n^2}$ متقاربة

(بحسب اختبار النهاية للنسبة)

(iii) $x_n = \frac{\log n}{n}$ موجبة لكل $n \geq 1$ والمشتقة $\frac{n\cdot\frac{1}{n} - \log n \cdot 1}{n^2}$

$= \frac{1-\log n}{n^2} < 0 \quad \forall\, n > e$ $\Leftarrow$ x_n متناقصة

$\lim x_n = \lim \frac{\log n}{n} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$

$\Leftarrow$ المتسلسلة المتناوبة $\sum (-1)^n \frac{\log n}{n}$ متقاربة

(بحسب اختبار المتسلسلة المتناوبة)

(iv) نختبر $\sum y_n = \sum \frac{1}{n^{2/3}}$ متباعدة لأن $p = \frac{2}{3} < 1$

$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} \cdot \sqrt[3]{n^2} = \lim \sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2+1}}$

$= \lim \sqrt[3]{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ متباعدة (باختبار النسبة)

(v) $\sum \frac{n^2}{n!}$

$\lim \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \lim \frac{n^2+2n+1}{(n+1)n^2} = 0 < 1$

$\Leftarrow$ $\sum \frac{n^2}{n!}$ متقاربة باختبار النسبة

(vi) $\lim \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\log n}\right)^n} = \lim \frac{1}{\log n} = 0 < 1$

$\Leftarrow$ المتسلسلة متقاربة باختبار الجذر

(2.2) اختبارات التقارب

(ix) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ ، $f:[2,\infty) \to (0,\infty)$ متناقصة لأن

$f'(n) = \frac{-1(n\frac{1}{n}+\log n)}{n\log n} < 0 \Rightarrow f(n) = \frac{1}{n\log n}$ is ↓

$b>2$ لكل $f \in R[2,b]$

لأن: $\int_2^{\infty} \frac{1}{n\log n} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{n\log n} = \lim \left[\log(\log n)\right]_2^b$

$= \lim_{b\to\infty} \left[\log(\log b) - \log(\log 2)\right] = \infty$

$\Leftarrow \int_2^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ غير موجود $\Leftarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ غير متقاربة

(x) باختبار النسبة

$\lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim \frac{(n+1)}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$= \lim \frac{(n+1)}{n+1} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$

$= 1 \cdot e = e > 1$

∴ المتسلسلة متباعدة

(xi) باختبار النسبة:

$\lim \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \lim \frac{2(n+1)}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$= \lim 2 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = 2 \cdot e > 1$

المتسلسلة متباعدة

(xii) باختبار النسبة:

$\lim \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \lim \frac{3(n+1)}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$= \lim 3 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = 3e > 1$

∴ المتسلسلة متباعدة

(xiii) $\sum \sin(\frac{1}{n}) \geq \sum -1$ متباعدة

باختبار المقارنة $\sum \sin\frac{1}{n}$ متباعدة

(2.2) اختبارات التقارب

(٧) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, $a_n = \frac{n!}{n^n} > 0$

$$\boxed{e^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})} \sim e^{-\frac{n}{n+1}}}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$= e^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})} \sim e^{-\frac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1} < 1$$

∴ مج متقارب

(٨) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$, $a_n = \frac{2^n n!}{n^n} > 0$ موجبة

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2e^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})}$$

$$\sim 2e^{-\frac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{e} < 1 \quad (\text{لأن } e > 2)$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ متقاربة

(٩) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$, $a_n = \frac{3^n n!}{n^n} > 0$ موجب

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} > 1 \quad (\text{لأن } 3 > e)$$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة

بصفة عامة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, \quad a > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{e}$$

لدينا ثلاث حالات:

(أ) إذا كان $a < e$ فإن $\frac{a}{e} < 1$ وبالتالي $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

(أأ) إذا كان $a > e$ فإن $\frac{a}{e} > 1$ وبالتالي $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

(أأأ) إذا كان $a = e$ فإن $\frac{a}{e} = 1$ وبالتالي $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارب ونحسبه

(2.2) اختبارات التقارب

2. أثبت أن المتسلسلة

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\cdots$$

متقاربة باختبار الجذر وأن اختبار النسبة لا يعطي نتيجة.

$a_{2n-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^n,\ a_{2n}=\left(\frac{1}{7}\right)^n,\ n=1,2,3,\ldots$ (2)

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup(a_n)^{\frac{1}{n}}=\sqrt{\frac{1}{5}}<1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\inf\frac{a_{n+1}}{a_n}=0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sup\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$

3. إذا كان $x_n \le y_n$ لكل $n\in\mathbb{N}$ فأثبت أن

$$\limsup x_n \le \limsup y_n$$
$$\liminf x_n \le \liminf y_n$$
$$\liminf x_n \le \limsup y_n$$

ثم أعط مثالاً فيه $\limsup x_n > \liminf y_n$.

البرهان: (a) نعلم أن $\limsup x_n=\inf\limits_n \sup\{x_k ; k\ge n\}$

بما أن $x_n\le y_n$ لكل n فإن $\overset{B_n}{\sup\{x_k ; k\ge n\}}\le \sup\{y_k ; k\ge n\}\ \forall n$

$\Rightarrow \inf\limits_n \sup\{x_k , k\ge n\}\le \sup\{y_k , k\ge n\}$

(2.2) اختبارات التقارب

$\underbrace{\inf_n \sup \{x_k ; k \geq n\} \leq \inf_n \sup \{y_k ; k \geq n\}}$ ⇐ حسب تعريف inf

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup y_n$$

(b) أثبت أن $\liminf x_n = \sup_n \inf \{x_k ; k \geq n\}$

بما أن $x_n \leq y_n \ \forall n$ فإن $\inf \{x_k ; k \geq n\} \leq \inf \{y_k ; k \geq n\}$

$$\inf \{x_k ; k \geq n\} \leq \sup_n \inf \{y_k ; k \geq n\}$$

حسب تعريف sup ⇐

$$\underbrace{\sup_n \inf \{x_k ; k \geq n\} \leq \sup \inf \{y_k ; k \geq n\}}$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} y_n$$

(c) نفرض أن $\underbrace{\inf \{x_k ; k \geq n\}}_{g_n} \leq \underbrace{\sup \{y_k ; k \geq n\}}_{s_n}$ ⇐

(حل) $x_n \leq y_n$

$$z_1 = \sup\{x_k : k \geq 1\} = \sup\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

(2.2) اختبارات التقارب

س٣ (**Theorem 8.4**)Assume that $a_n \le b_n$ for each $n = 1, 2, \dots$. Then we have:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n \text{ and } \limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Proof: If $\liminf_{n\to\infty} b_n = +\infty$, there is nothing to prove it. So, we may assume that $\liminf_{n\to\infty} b_n < +\infty$. That is, $\liminf_{n\to\infty} b_n = -\infty$ or b, where b is finite.

For the case, $\liminf_{n\to\infty} b_n = -\infty$, it means that the sequence $\{a_n\}$ is not bounded below. So, $\{b_n\}$ is also not bounded below. Hence, we also have $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

For the case, $\liminf_{n\to\infty} b_n = b$, where b is finite. We consider three cases as follows.

(i) if $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$, then there is nothing to prove it.

(ii) if $\liminf_{n\to\infty} a_n = a$, where a is finite. Given $\varepsilon > 0$, then there exists a positive integer N such that as $n \ge N$

$$a - \varepsilon/2 < a_n \le b_n < b + \varepsilon/2$$

which implies that $a \le b$ since ε is arbitrary.

(iii) if $\liminf_{n\to\infty} a_n = +\infty$, then by **Theorem 8.3 (a) and (c)**, we know that $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ which implies that $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Also, by **Theorem 8.3 (c)**, we have $\liminf_{n\to\infty} b_n = +\infty$ which is absurb.

So, by above results, we have proved that $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n$.

Similarly, we have $\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n$.

8.4 If each $a_n > 0$, prove that

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Proof: By **Theorem 8.3 (a)**, it suffices to show that

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \text{ and } \limsup_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

We first prove

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

which implies that

$$c \leq a + b$$

since ε is arbitrary. So,

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq \left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right)\left(\limsup_{n\to\infty} b_n\right).$$

Remark: (1) The equality may **NOT** hold. For example,

$$a_n = 1/n \text{ if } n \text{ is odd and } a_n = 1 \text{ if } n \text{ is even.}$$

and

$$b_n = 1 \text{ if } n \text{ is odd and } b_n = 1/n \text{ if } n \text{ is even.}$$

(2) The reader should noted that the finitely many terms does **NOT** change the relation of order. The fact is based on the process of the proof.

(3) The reader should be noted that if letting $A_n = \log a_n$ and $B_n = \log b_n$, then by (a) and $\log x$ is an increasing function on $(0, +\infty)$, we have proved (b).

8.3 Prove that Theorem 8.3 and 8.4.

حل

(**Theorem 8.3**) Let $\{a_n\}$ be a sequence of real numbers. Then we have:

(a) $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Proof: If $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$, then it is clear. We may assume that $\limsup_{n\to\infty} a_n < +\infty$. Hence, $\{a_n\}$ is bounded above. We consider two cases: (i) $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$, where a is finite and (ii) $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

For case (i), if $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$, then there is nothing to prove it. We may assume that $\liminf_{n\to\infty} a_n = a'$, where a' is finite. By definition of limit superior and limit inferior, given $\varepsilon > 0$, there exists a positive integer N such that as $n \geq N$, we have

$$a' - \varepsilon/2 < a_n < a + \varepsilon/2$$

which implies that $a' \leq a$ since ε is arbitrary.

For case (ii), since $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$, we have $\{a_n\}$ is not bounded below. If $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$, then there is nothing to prove it. We may assume that $\liminf_{n\to\infty} a_n = a'$, where a' is finite. By definition of limit inferior, given $\varepsilon > 0$, there exists a positive integer N such that as $n \geq N$, we have

$$a' - \varepsilon/2 < a_n$$

which contradicts that $\{a_n\}$ is not bounded below.

So, from above results, we have proved it.

(b) The sequence converges if and only if, $\limsup_{n\to\infty} a_n$ and $\liminf_{n\to\infty} a_n$ are both finite and equal, in which case $\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Proof: ($\Rightarrow$)Given $\{a_n\}$ a convergent sequence with limit a. So, given $\varepsilon > 0$, there exists a positive integer N such that as $n \geq N$, we have

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

By definition of limit superior and limit inferior, $a = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

($\Leftarrow$)By definition of limit superior, given $\varepsilon > 0$, there exists a positive integer N_1 such that as $n \geq N_1$, we have

$$a_n < a + \varepsilon$$

and by definition of limit superior, given $\varepsilon > 0$, there exists a positive integer N_2 such that as $n \geq N_2$, we have

(2.2) اختبارات التقارب

Remark: In order to show the series $\sum \sin \frac{1}{n}$ diverges, we consider Cauchy Criterion as follows.

$$n \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \leq \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{1}{n+n}\right)$$

and given $x \in R$, for $n = 0, 1, 2, \ldots$, we have

$$|\sin nx| \leq n|\sin x|.$$

So,

$$\sin \frac{1}{2} \leq \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{1}{n+n}\right)$$

for all n. Hence, $\sum \sin \frac{1}{n}$ diverges.

Note: There are many methods to show the divergence of the series $\sum \sin \frac{1}{n}$. We can use **Cauchy Condensation Theorem** to prove it. Besides, by (11), it also owrks.

(9) **O-Stolz's Theorem.**

Proof: Let $S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ and $X_n = \log n$. Then by **O-Stolz's Theorem,** it is easy to see

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

(10) Since $\Pi_{k=1}^{n} 1 + \frac{1}{k}$ diverges, the series $\sum 1/k$ diverges by **Theorem 8.52**.

---

4. (i) أثبت أن تقارب المتسلسلتين $\sum a_n^2$ وَ $\sum b_n^2$ يقتضي تقارب $\sum a_n b_n$.

(ii) أثبت أن تقارب $\sum a_n^2$ يقتضي تقارب $\sum a_n/n$.

(8) أ ثبت ان تقارب $\sum a_n^2$ تؤدي الى تقارب $\sum \frac{a_n}{n}$

نعرف $S_n = |\frac{a_1}{1}| + |\frac{a_2}{2}| + \dots + |\frac{a_n}{n}|$

$= \sum_{i=1}^{n} |a_i| \frac{1}{i} \leq (\sum a_i^2)^{1/2} (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2})^{1/2}$ (وحسب متباينة كوشي شوارز)

$S_n = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \frac{1}{i} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2)^{1/2} (\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2})$ حيث

متقاربة حسب الفرض — متقاربة اصلا

اذا (S_n) ↗ محدودة $\Leftarrow$ (S_n) متقاربة $\Leftarrow$ $\sum_{1}^{\infty} |\frac{a_n}{n}|$

متقاربة $\Leftarrow$ $\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ متقاربة مطلقاً

(2.2) اختبارات التقارب

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ $\lim a_n = 0 \Leftarrow \sum a_n$ (C)

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$

$0 \leq a_{n+1} \leq a_n$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$0 \qquad\qquad 0$

لكل $\varepsilon > 0$ نجد عدد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$n \geq N \Rightarrow n a_n \leq \varepsilon$

convergence of $\sum a_n$ by **Limit Comparison Test.**

(ii) 4

(2) Suppose that $a_n \in R$, and the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converges. Prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converges absolutely.

Proof: By $A.P. \geq G.P.$, we have

$$\frac{a_n^2 + \frac{1}{n^2}}{2} \geq \left| \frac{a_n}{n} \right|$$

which implies that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converges absolutely.

Remark: We metion that there is another proof by using **Cauchy-Schwarz inequality**. the difference of two proofs is that one considers a_n, and another considers the partial sums S_n.

Proof: By **Cauchy-Schwarz inequality,**

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_n|}{k} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right)$$

which implies that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converges absolutely.

Double sequences and series

8.28 Investigate the existence of the two iterated limits and the double limit of the

(2.2) اختبارات التقارب

5. افرض أن المتتالية (a_n) موجبة ومتناقصة. إذا كانت $\sum a_n$ متقاربة فأثبت أن $\lim na_n = 0$.

بما أن $a_n > 0$ فإن $na_n > 0$ لكل n وبالتالي $\lim_{n\to\infty} na_n \geq 0$

(من المحتمل أن تكون $\lim_{n\to\infty} na_n = \infty$) لذلك نفرض أن $\lim_{n\to\infty} na_n = \alpha$ حيث $\alpha > 0$

نأخذ $\epsilon = \frac{\alpha}{2}$ ⇐ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $|na_n - \alpha| < \frac{\alpha}{2}$ لكل $n \geq N$ ⇐

$\frac{\alpha}{2} < na_n < \frac{3\alpha}{2}$ ⇐ $a_n > \frac{\alpha}{2}\frac{1}{n}$ وبما أن $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة ⇐ $\sum a_n$ متباعدة

وهذا تناقض مع تقارب $\sum a_n$ ⇐ $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ (أين تم استخدام تناقص a_n؟)

س5 (11) **Lemma:** If $\{a_n\}$ is a decreasing sequence and $\sum a_n$ converges. Then $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

Proof: Since $a_n \to 0$ and $\{a_n\}$ is a decreasing sequence, we conclude that $a_n \geq 0$. Since $\sum a_n$ converges, given $\varepsilon > 0$, there exists a positive integer N such that as $n \geq N$, we have

$$a_n + .. + a_{n+k} < \varepsilon/2 \text{ for all } k \in N$$

which implies that

$$(k+1)a_{n+k} < \varepsilon/2 \text{ since } a_n \searrow.$$

Let $k = n$, then as $n \geq N$, we have

$$(n+1)a_{2n} < \varepsilon/2$$

which implies that as $n \geq N$

$$2(n+1)a_{2n} < \varepsilon$$

which implies that

$$\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0 \text{ since } \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \quad *$$

Similarly, we can show that

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1} = 0. \quad **$$

So, by (*) adn (**), we have proved that $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

---

6. إذا كانت المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة فأثبت أن $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ أيضًا متباعدة.

الحل: نفرض أن $\sum_1^\infty \frac{a_n}{1+a_n}$ متقاربة ⇐ $\frac{a_n}{1+a_n} \to 0$

لذلك من أجل $\epsilon = \frac{1}{2}$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث أن $\frac{a_n}{1+a_n} < \frac{1}{2}$ لكل $n \geq N$ ⇐

$2a_n < 1 + a_n$ ⇐ $a_n < 1$ لكل $n \geq N$ ومنه $1 + a_n \leq 2$ ⇐ $\frac{1}{1+a_n} \geq \frac{1}{2}$

إذن $\frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{a_n}{2}$ وحيث $\sum_1^\infty \frac{a_n}{1+a_n}$ متقاربة ⇐ $\sum_1^\infty a_n$ متقاربة وهذا

مستحيل لأن $\sum_1^\infty a_n$ متباعدة، حسب الفرضية المسألة. لذا فإن تباعد $\sum_1^\infty a_n$ يؤدي

إلى $\sum_1^\infty \frac{a_n}{1+a_n}$ متباعدة.

(2.2) اختبارات التقارب

7. احسب $\liminf \sqrt[n]{x_n}$ للمتسلسلة المعطاة في المثال 2.11.

7 $\cancel{\lim \frac{a_n}{1+a_n} = 0}$

$\liminf \sqrt[n]{x_n}$

$2n-1 = m$

$n = \frac{m+1}{2}$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^{\frac{n+1}{2}}}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{3^{n/2} \cdot 3^{1/2}}}$

$= \lim \sqrt[n]{\frac{1}{3^{n/2}}} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \lim \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(2.2) اختبارات التقارب

8. أثبت أن المتتالية

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

متقاربة. تسمى نهايتها **ثابت أويلر** Euler's constant ويرمز لها بـــ γ، حيث

$\gamma = 0.577215665\cdots$.

(٨) نبين أن γ_n متتالية متناقصة من الأعداد الحقيقية

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} - \log(n+1) - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} + \log(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \log\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

أعتبر نضع $b_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n}$

$$b_n \longrightarrow \log 2$$

تلميح: ~~ضع~~ أن $b_n = \gamma_{2n} - \gamma_n + \log 2$

One elegant way to show that the sequence converges is to show that it's both decreasing and bounded below.

It's decreasing because $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \log n + \log(n-1) = \frac{1}{n} + \log(1 - \frac{1}{n}) < 0$ for all n. (The inequality is valid because $\log(1-x)$ is a concave function, hence lies beneath the line $-x$ that is tangent to its graph at 0; plugging in $x = \frac{1}{n}$ yields $\log(1 - \frac{1}{n}) \le -\frac{1}{n}$.)

It's bounded below because

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} > \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \log(n+1) > \log n,$$

and so $u_n > 0$ for all n. (The inequality is valid because the sum is a left-hand endpoint Riemann sum for the integral, and the function $\frac{1}{t}$ is decreasing.)

(2.2) اختبارات التقارب

Suppose that f is positive, decreasing, and locally integrable on $[1, \infty]$, and let

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx.$$

(a) Show that $\{a_n\}$ is nonincreasing and nonnegative, and

$$0 < \lim_{n\to\infty} a_n < f(1).$$

(b) Deduce from (a) that

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

exists, and $0 < \gamma < 1$. (γ is *Euler's constant;* $\gamma \approx 0.577$.)

https://www.youtube.com/watch?v=E9z1mCpjRCo

https://www.youtube.com/watch?v=JL6C6Gj1QMo