المساحات والتكامل المحدد

الاختبار الشهري 1
السبت 18/2 الاختبار 2
البت 16/3 الاختبار 3

مبرهنة: لتكن: $a_1+a_2+\dots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$

لتكن $c\in\mathbb{R}$;

(1) $\sum_{k=1}^{n} c = c+c+\dots+c = nc$; $\sum_{k=0}^{n} c = (n+1)c$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

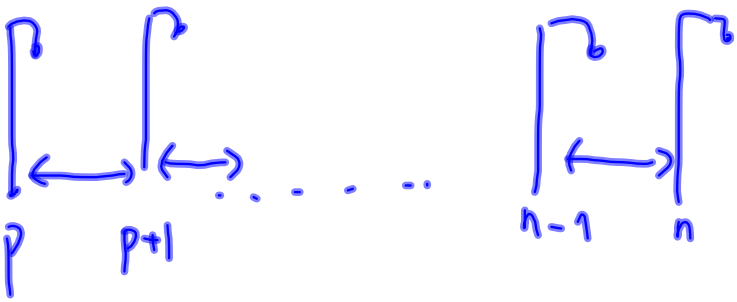
(4) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(5) $\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{p-1} a_k$ $\quad 1<p<n$

$$a_p+a_{p+1}+\dots+a_n = (a_1+a_2+\dots+a_{p-1}+a_p+a_{p+1}+\dots+a_n)-(a_1+a_2+\dots+a_{p-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{p-1} a_k$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0+(a_1+a_2+\dots+a_n) = a_0+\sum_{k=1}^{n} a_k$$



عدد الأعمدة هو: $(n-p+1)$

عدد الفترات بين الأعمدة هو: $(n-p)$

خاصيات :

لتكن $c \in \mathbb{R}$

(1) $$\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n$$
$$= c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$$
$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

(3) من القاعدة (1) و القاعدة (2) نستنتج أن :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

مثال: (1) احسب قيمة:

$$\sum_{k=1}^{n} k(4k^2-3)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(4k^2-3) = \sum_{k=1}^{n}(4k^3-3k) = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 - 3\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 3\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(4\,\frac{n(n+1)}{2} - 3\right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(2n(n+1)-3\right) = \frac{n(n+1)}{2}\left(2n^2+2n-3\right)$$

مثال (2): احسب قيمة $\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+3)$

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+3)=\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\,\frac{n(n+1)}{2}+3n$$

$$=n\cdot\frac{(n+1)(2n+1)-6(n+1)+18n}{6}$$

$$=n\,\frac{2n^2+n+2n+1-6n-6+18n}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+3)=n\,\frac{2n^2+15n-5}{6}$$

مثال 3: احسب القيمة:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} (k^2+k)(k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k^3+2k^2+k^2+2k) = \sum_{k=1}^{n} (k^3+3k^2+2k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + 3\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1) = n(n+1)\,\frac{n(n+1)+2(2n+1)+4}{4}$$

$$= n(n+1)\,\frac{n^2+n+4n+2+4}{4} = n(n+1)\,\frac{n^2+5n+6}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4}$$

$$x^2+5x+6=0 \;;\; \Delta = b^2-4ac = 5^2-4(1)(6) = 1$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-1}{2} = -3 \;;\; x_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$$

$$x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$$

وبالتالي

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

مبرهنة:

$a \neq 0 \quad , \quad ax^2+bx+c=0$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \; , \; x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \; ; \; \Delta = b^2-4ac$

$$\boxed{ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)}$$

مثال:

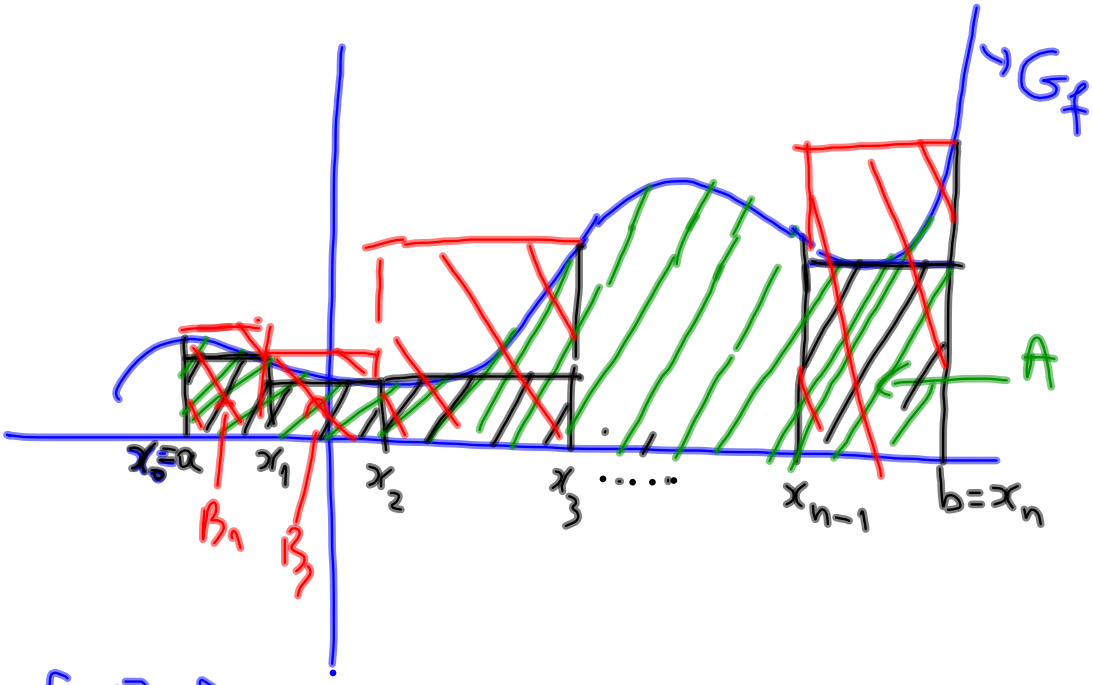
$2x^2-3x+1=0$

$a+b+c = 2+(-3)+1=0$

بما أن

$\{\alpha_1,\alpha_2\}=\{x_1,x_2\} \quad , \quad \alpha_1=1 \; , \; \alpha_2 = \frac{-c}{a} = \frac{1}{2}$ فإن

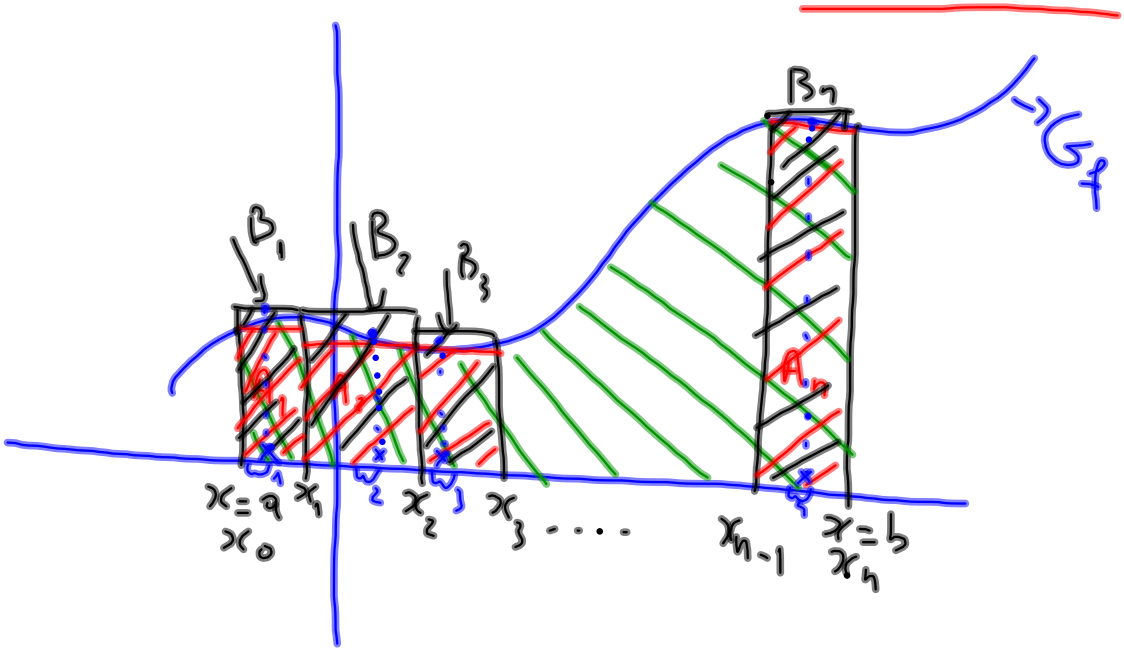
$2x^2-3x+1 = 2(x-1)(x-\frac{1}{2}) = (x-1)(2x-1)$



$$[a,b]=[x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\cdots\cup[x_{n-1},x_n]$$

$$A_1+A_2+\cdots+A_n \leq A \leq B_1+B_2+\cdots+B_n$$

المساحات:



$$[a,b]=[x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\dots\cup[x_{n-1},x_n]$$

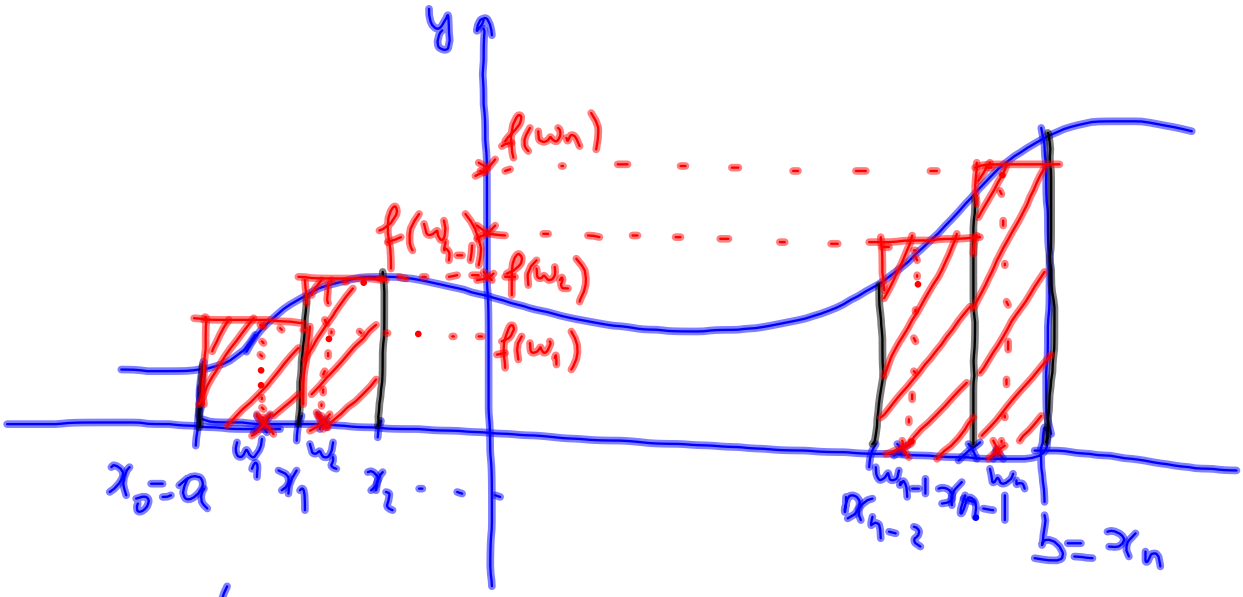
$$A_1+A_2+\dots+A_n\leq A\leq B_1+B_2+\dots+B_n$$

مبرهنة: لتكن $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزيء للفترة المغلقة $[a,b]$ ، $w=(w_1, w_2, \dots, w_n)$ علامة للتجزيء P ، ولتكن f دالة على $[a,b]$

مجموع ريمان للدالة f حسب التجزيء P والعلامة w هي القيمة:

$$\boxed{R(f,P,w)=\sum_{k=1}^{n} f(w_k)(x_k-x_{k-1})}$$

ملاحظة: $w_k \in [x_{k-1}, x_k]$



$$w=(w_1,w_2,\dots,w_n)\ ;\ w_k\in[x_{k-1},x_k]$$

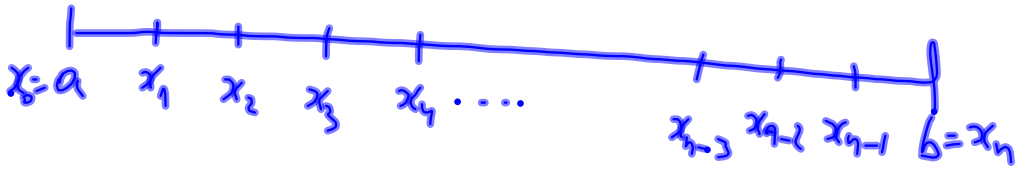
$$\boxed{R(f,P,w)=\sum_{k=1}^{n} f(w_k)(x_k-x_{k-1})}$$

مجموع ريمان للدالة f
حسب التجزئة P والعلامة w

وضعية خاصة وهامة

P تجزيء منتظم ، $P=\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$

لكل $k\in\{1,\dots,n\}$ $\quad x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$



$k\in\{0,1,2,\dots,n\}$ ، $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$

$w=(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\boxed{R(f,P,w) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)}$$

مجموع ريمان للدالة f حسب التجزيء المنتظم

تعريف: (1) P تجزئة منتظمة حيث $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$

إذا كان $x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}$ لكل $k\in\{1,2,\dots,n\}$

و P تجزئة.

وبالتالي $\forall k\in\{0,1,\dots,n\}$, $x_k=a+k\frac{b-a}{n}$

و مجموع ريمان هو:

$$\boxed{S_f=\frac{b-a}{n}\sum f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)}$$

(2) A المساحة المحدودة برسم f والمحور x والمستقيمين $x=a$, $x=b$ هي القيمة إن وجدت حيث

$$A=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

$f(x)\geq 0$

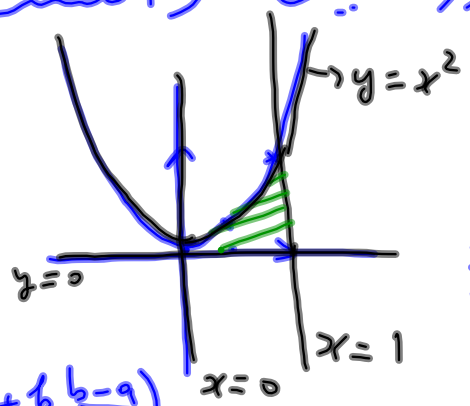
$a<b$

ونرمز: $A=\int_a^b f(x)dx$

التكامل المحدد من $x=a$ إلى $x=b$: $\int_a^b f(x)dx$

مثال: احسب المساحة المحصورة بالمنحني $y=x^2$ و محور السينات و المستقيم $x=1$

الحل:



$y=x^2$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
y	0	$\frac{1}{4}$	1

$$\int_0^1 x^2\,dx = A = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(0+k\frac{1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{6n^3}$$

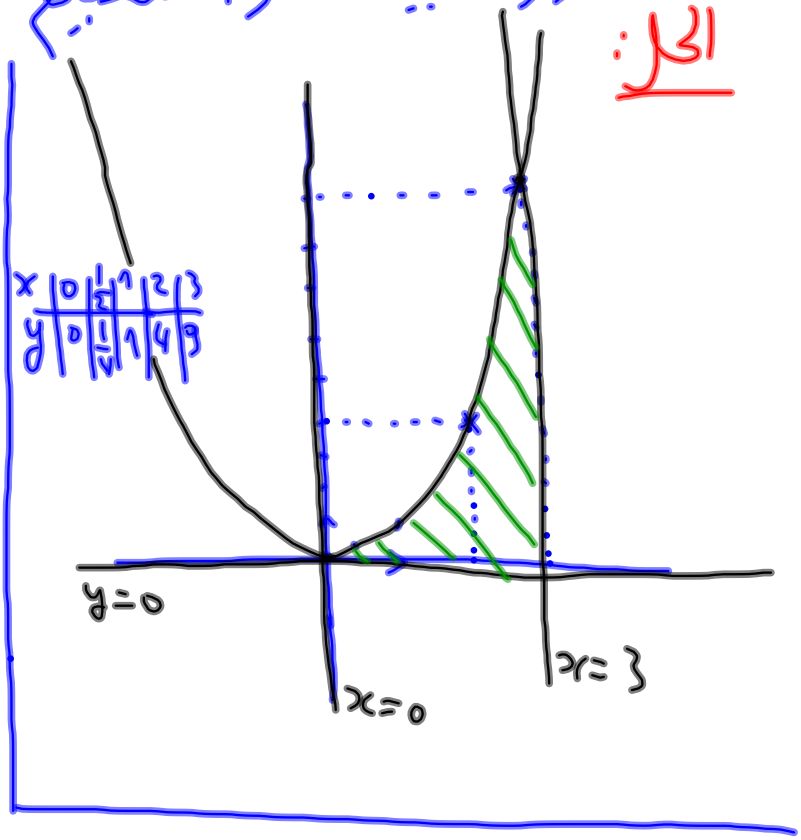
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{3}}$$

س1) احسب المساحة المحصورة بالمنحني $y=x^2$

و محور السينات والمستقيم $x=3$

الحل:



x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

$$A=\int_0^3 x^2\,dx$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3-0}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(0+k\frac{3}{n}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{n^2}k^2$$

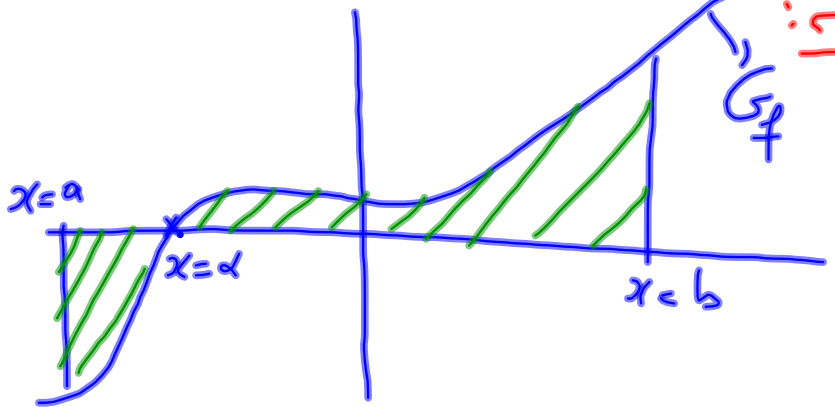
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{27}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{27}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\lim_{n\to+\infty}\frac{9}{2n^2}(n+1)(2n+1)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{9}{2n^2}n^2\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(2+\frac{1}{n}\right)}_{\to 2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{9}{2}\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)\left(2+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)=9$$

$$\boxed{A=\int_0^3 x^2\,dx=9}$$

ملاحظة:



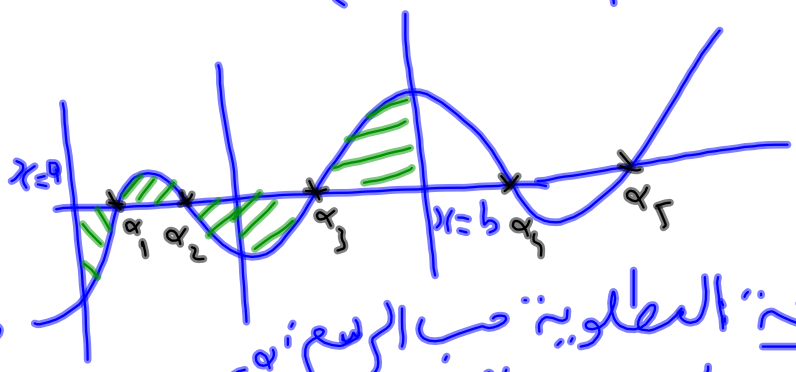
التكامل المحدد للدالة f من $x=a$ الى $x=b$

و محدد ببيان الدالة هو $\int_a^b f(x)\,dx$

المساحة المحدودة بين $x=a$ و $x=b$ وبيان

الدالة f هي القيمة (المنسبية)

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx=\int_a^{\alpha} -f(x)\,dx+\int_{\alpha}^b f(x)\,dx$$



المساحة المطلوبة حسب الرسم:

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx=\int_a^{\alpha_1} -f(x)\,dx+\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,dx=\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} -f(x)\,dx+\int_{\alpha_3}^{b} f(x)\,dx$$

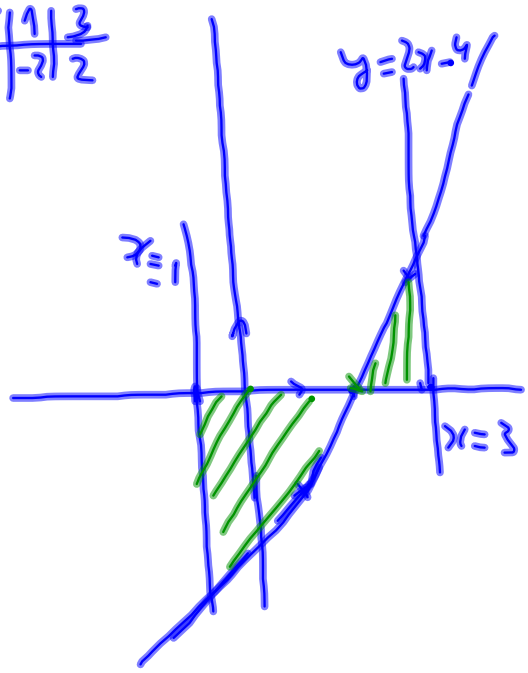
مثال: جد المساحة المحدودة بين المستقيمين $x=-1$, $x=3$, وبيان الدالة f حيث $y=2x-4$

الحل:

$y=0 \Leftrightarrow 2x-4=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{4}{2}=2$

x	1	3
y	-2	2



المساحة المطلوبة:

$$A=\int_{-1}^{3}|f(x)|dx=\int_{-1}^{2}-f(x)dx+\int_{2}^{3}f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{2}-(2x-4)dx+\int_{2}^{3}(2x-4)dx$$

$$=\left[-x^2+4x\right]_{-1}^{2}+\left[x^2-4x\right]_{2}^{3}$$

$$A=\left(-2^2+4(2)\right)-\left(-(-1)^2+4(-1)\right)+\left(3^2-4(3)\right)-\left(2^2-4(2)\right)$$

$$=-4+8+1+4+9-12-4+8$$

$$\boxed{A=10}$$