جامعة الملك سعود King Saud University	كلية العلوم – قسم الرياضيات	الاختبار الشهري الأول للمقرر 111 ريض للفصل الأول 1437-1438 هـ
الإسم: .... الرقم الجامعي:.................................. أستاذ المقرر:..................................		الزمن: ساعة ونصف. الدرجة:

ملاحظات : 1. عدد الورقات 3 و ورقة مسودّة 2. ممنوع استخدام الالة الحاسبة.

السؤال الأول (3 درجات): استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل $\int_1^2 (6x-5)\,dx$.

① $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

$a=1$; $b=2$; $f(x)=6x-5$

$\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$; $x_k = 1+\frac{k}{n}$; $0\le k\le n$

① $$\int_1^2 (6x-5)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[6(1+k/n)-5\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)+6/n\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)\right)$$

① $$\int_1^2 (6x-5)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{6}{\cancel{n}}\left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right)\right] = 1+3=4.$$

السؤال الثاني (3 درجات): أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=\sqrt{x+1}$ على الفترة $[-1,8]$.

بما أن f متصلة على $[-1,8]$ إذن يوجد $c\in(-1,8)$ التي تحقق

① $$\int_{-1}^{8}\sqrt{x+1}\,dx = (8-(-1))\,f(c)$$

$$\int_{-1}^{8}(x+1)^{1/2}\,dx = 9\sqrt{c+1}$$

① $$\frac{2}{3}\left[(x+1)^{3/2}\right]_{-1}^{8} = 9\sqrt{c+1}$$

$$\frac{2}{3}\left[(3^2)^{3/2}-0\right] = 9\sqrt{c+1}$$

$$\sqrt{c+1} = 2$$

$$c+1 = 4$$

① $$c = 3 \in (-1,8)$$

السؤال الثالث (3 درجات): إذا كانت $F(x)=\int_{\cos x}^{1+\sin x}\sqrt{2+t}\,dt$ فأوجد $F'(0)$.

② $F'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_{\cos x}^{1+\sin x}\sqrt{2+t}\,dt\right)=\sqrt{3+\sin x}\,\cos x+\sqrt{2+\cos x}\,\sin x$

① $F'(0)=\sqrt{3}$; $\sin 0=0$ و $\cos 0=1$

السؤال الرابع (6 درجات): احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي:

(أ) $y=\sqrt{x}\,\ln(\cos x)$ (درجتان)

① + ① $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(\cos x)+\sqrt{x}\,\frac{-\sin x}{\cos x}$

$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\cos x-\sqrt{x}\tan x$

(ب) $y=5^{\ln x}$ (درجتان)

② $x>0;\ \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}5^{\ln x}=\frac{\ln 5}{x}\cdot 5^{\ln x}$

(ج) $y=(1+x^2)^{\sin x}$ (درجتان)

0,5 $\ln y=\ln\left[(1+x^2)^{\sin x}\right]=\sin x\ln(1+x^2)$

① $\frac{y'}{y}=\cos x\cdot\ln(1+x^2)+\sin x\,\frac{2x}{1+x^2}$

0,5 $\frac{dy}{dx}=\left[(\cos x)\ln(1+x^2)+\frac{2x\sin x}{1+x^2}\right](1+x^2)^{\sin x}$.

السؤال الخامس (10 درجات): احسب التكاملات التالية:

(1) $\int_2^4\frac{2x-3}{\sqrt{x}}\,dx$ (درجتان)

0,5 $\int_2^4\frac{2x-3}{\sqrt{x}}\,dx=2\int_2^4\sqrt{x}\,dx-3\int_2^4\frac{dx}{\sqrt{x}}$

① $=\frac{4}{3}\left[x^{3/2}\right]_2^4-6\left[\sqrt{x}\right]_2^4$

0,5 $=\frac{4}{3}\left[8-2\sqrt{2}\right]-6\left[2-\sqrt{2}\right]=-\frac{4}{3}+\frac{10}{3}\sqrt{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx \quad \textbf{(2)}$$

(درجتان)

نضع $u = \sin x$ فإن $du = \cos x\,dx$

0,5

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \left[\tan^{-1} u\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

1   0,5

$$\int_0^1 x\sqrt{8+x^2}\,dx \quad \textbf{(3)}$$

(درجتان)

نأخذ $u=8+x^2$ فإن $du=2x\,dx$ وبالتالي $x\,dx=\frac{du}{2}$

1,5

$$\int_0^1 x\sqrt{8+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_8^9 u^{1/2}\,du = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3}\left[u^{3/2}\right]_8^9$$

0,5

$$= \frac{1}{3}\left[27-16\sqrt{2}\right]$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \quad \textbf{(4)}$$

(درجتان)

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\sqrt{4-x^2} + \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + cst$$

1   1

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\log_5 x}} \quad \textbf{(5)}$$

(درجتان)

نضع $u = \log_5 x$ فإن $du = \frac{1}{\ln 5}\frac{1}{x}\,dx$

1

وبالتالي $\frac{dx}{x} = \ln 5\,du$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\log_5 x}} = (\ln 5)\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\ln 5\sqrt{\log_5 x} + cst$$

1