كليّة العلوم - قسم الرّياضيّات
الفصل الثّاني ١٤٣٨ هـ - ١٤٣٩ هـ
جامعة الملك سعود
King Saud University

الاختبار النّهائي - المدّة: ثلاثة ساعات

1- **الهندسة الاقليدية:** نعتبر في المستو الاقليدي $\mathbb{E}^2$، النّقط $A(1,2)$ ، $B(3,-1)$ ، $C(4,1)$ ، $A'(0,-2)$ ، $B'(-\frac{1}{5},\frac{8}{5})$ ، $C'(\frac{9}{5},\frac{3}{5})$.

١- اعط صيغة الانعكاس بالنّسبة للمستقيم (AB).

٢- بيّن أنّ المثلّثين ABC و $A'B'C'$ متطابقان وجد التّقايس بينهما.

٣- عيّن طبيعة وجد عناصر التّقايس الاقليدي المعرّف بالصّيغة

$$\mathcal{T} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2- **الهندسة الكرويّة:** نعتبر في الكرة $\mathbb{S}^2$، النّقط $E\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ ، $F\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ ، والتّحويلين الكرويّين:

$$\mathcal{T}_2 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_1 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & b \\ 1 & 2 & c \\ 2 & a & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

١- احسب مساحة المثلّث الكروي ABC الّذي طولا ضلعيه $\widehat{AB}$ ، $\widehat{AC}$ هما $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$ ، $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})$ وزاويته $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

٢- اعط صيغة الانعكاس الكروي Ω_{EF} بالنّسبة للمستقيم الكروي (EF).

٣- جد قيمة a ، b ، c ، d الّتي تجعل التّحويل $\mathcal{T}_1$ دورانا وحدّد مركزه.

٤- بيّن أنّ التّحويل $\mathcal{T}_2$ تقايس كروي، عيّن طبيعته، وحدّد عناصره.

3- **الهندسة الزّائدية:** نعتبر في السّطح الزّائدي $\mathbb{H}^2$، النّقط $X(0,0,1)$ ، $Y(2,2,3)$ ، $Z(8,4,9)$ ، والتّحويل الزّائدي:

$$\mathcal{T}_3 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 4 \\ -20 & -5 & 20 \\ -20 & -4 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

١- احسب الطّول YZ والزّاوية $\widehat{YXZ}$ الزّائديّين.

٢- جد متّجهين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ يجعلان الثّلاثي $(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{OY})$ أساسا زائديّا معيّرا للفضاء $\mathbb{R}^3$.

٣- اعط صيغة الانعكاس الزّائدي Ω_{XY} بالنّسبة للمستقيم الزّائدي (XY).

٤- بيّن أنّ التّحويل $\mathcal{T}_3$ تقايس زائديّ، عيّن طبيعته، وحدّد عناصره.

د. مالك طاله — الثّلاثاء ٢٢ شعبان ١٤٣٥ هـ

هندسة الإقليدية :

$(AB): 3x+2y=7 \quad \overrightarrow{AB}^{\perp}=\langle 3;2\rangle$ ، $\overrightarrow{AB}=\langle 2;-3\rangle$ 1

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$

الانعكاس

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2\,\frac{3x+2y-7}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 2$$

4

$$= \begin{pmatrix} \frac{13-18}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & \frac{13-8}{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 42/13 \\ 28/13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & 5/13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 42/13 \\ 28/13 \end{pmatrix} \quad 1$$

$AB=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{18^2}{25}}=A'B'$ $\frac{1}{2}$ 2

$BC=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}=\sqrt{4+1}=B'C'$ $\frac{1}{2}$

$CA=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}=\sqrt{\frac{81}{25}+\frac{13^2}{25}}=C'A'$ $\frac{1}{2}$

إذا هما متقايسان و التقايس بينهم :

$\overrightarrow{AC}=\langle 3;-1\rangle$ ، $\overrightarrow{AB}=\langle 2,-3\rangle$ $\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{A'C'}=\langle \frac{9}{5};\frac{13}{5}\rangle$ $\overrightarrow{A'B'}=\langle -1/5;\frac{18}{5}\rangle$

$$M_1^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

$$M_2M_1^{-1}=\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{35}\begin{pmatrix} 28 & 21 \\ 21 & -28 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$ 2

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3

$$\det \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1$$

1 إذاً A هو دوران

مركزه : 1

$$\begin{cases} 4x - 3y + 10 = 5x \\ 3x + 4y - 5 = 5y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 5/2 \end{cases}$$

زاويته تحقق 2

$\cos\theta = 4/5$; $\sin\theta = 3/5$.

هندسة الكروية

1/2 $\sin \widehat{AB} = \frac{\sqrt{8}}{3}$ إذ : $\cos \widehat{AB} = -\frac{1}{3}$ 1

1/2 $\sin \widehat{AC} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ إذ : $\cos \widehat{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos \widehat{BC} = \cos \widehat{AC} \cos \widehat{AB} + \cos \hat{A} \sin \widehat{AC} \sin \widehat{AB}$ و

1 $= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{6}}{3}\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

1/2 $\sin \widehat{BC} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ عليه و

لدينا

$$\cos \hat{B} = \frac{\cos \widehat{CA} - \cos \widehat{AB} \cos \widehat{BC}}{\sin \widehat{AB} \sin \widehat{BC}}$$

1/2

1 $$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\frac{\sqrt{8}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\cos \widehat{AB} - \cos \widehat{BC} \cos \widehat{CA}}{\sin \widehat{BC} \sin \widehat{CA}} = 0 \Rightarrow \hat{C} = \frac{\pi}{2}$$

1 1/2

مساحة المثلث ABC هي : $\left(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi\right)$ ر=

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - \pi = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

1 1/2

$$\overrightarrow{OE} \times \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{OE} \times \overrightarrow{OF}}{\|\overrightarrow{OE} \times \overrightarrow{OF}\|} = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

الانعكاس الركوي

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2\,\frac{2x - 3y + 2z}{4+9+4}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 2$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{17-8}{17} & +\frac{12}{17} & -\frac{8}{17} \\ \frac{12}{17} & \frac{17-18}{17} & \frac{12}{17} \\ -\frac{8}{17} & \frac{12}{17} & \frac{17-8}{17} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 9 & 12 & -8 \\ 12 & -1 & 12 \\ -8 & 12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

بما أن $\bar{u}, \bar{J}$ تعامديا فهذا يعني

① $2\times 1+1\times 2+2\times a=0$

$a=-2$ ن

وبما أنه دورانا يعني أن

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\times\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}b\\c\\d\end{pmatrix}$$

② $b=-2$ ن

$c=2$

$d=1$

$\boxed{3}$

---

④ * لدينا $^tT_2\,T_2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&2&-2\\2&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\1&-2&-2\end{pmatrix}=Id$

① إذاً هو تقايس كروي

$\det T_2=\frac{1}{27}(-8+1-8-4-4-4)=-1$ *

* وبما أن $^tT_2\neq T_2$ فإن T_2

① دوران مع انعكاس.

+ مركز الدوران :

$$\begin{cases}2x-y+2z=-3x\\2x+2y-z=-3y\\x-2y-2z=-3z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\z=3y\end{cases}$$

$A_0\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{11}}{11}\\+\frac{\sqrt{11}}{11}\\\frac{3\sqrt{11}}{11}\end{pmatrix}$ ①

Scanned by CamScanner

أولاً زاوية دوران

$$\cos\theta = \frac{tr\,T_2 + 1}{2} = \frac{\frac{2}{3}+1}{2} = \frac{5}{6}$$

(1)

إشارتها

$$T_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{11}}{3} A_0$$

بما أن $\frac{\sqrt{11}}{3} > 0$ فإن $0 < \theta < \pi$.

(1)

مستوي انعكاسها

$$\ell : \; x - y - 3z = 0.$$

(1)

ـة الزائدية :

$$\text{length}(\overline{YZ}) = \cosh^{-1}\left(-b(\overrightarrow{OY} | \overrightarrow{OZ})\right)$$

$$l_{\text{length}}(\overline{YZ}) = \cosh^{-1}\left(-\overrightarrow{OY} \cdot_h \overrightarrow{OZ}\right)$$

الحلول :

$$l(\overline{YZ}) = \cosh^{-1}\left(-(16+8-27)\right) = \cosh^{-1}(3). \quad 1$$

الزاوية : $Y\hat{X}Z = ?$

لدينا

- $\overrightarrow{OX} \cdot_h \overrightarrow{OY} = -3$
- $\overrightarrow{OY} + (\overrightarrow{OX} \cdot_h \overrightarrow{OY})\overrightarrow{OX} = (2;2;0) = \vec{u}_y \quad 1$
- $\|(2,2,0)\|_h = \sqrt{4+4-0} = 2\sqrt{2} \quad 1/2$

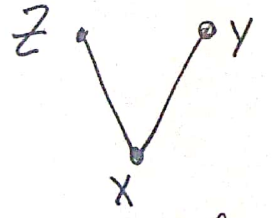
$\overrightarrow{OX} \cdot_h \overrightarrow{OZ} = 0+0-9 = 9$

- $\overrightarrow{OZ} + (\overrightarrow{OX} \cdot_h \overrightarrow{OZ})\overrightarrow{OX} = (8;4;0) = \vec{u}_z \quad 1$

$\|(8;4;0)\|_h = \sqrt{8^2+4^2-0^2} = 4\sqrt{5} \quad 1/2$

$$\Rightarrow \cos \widehat{YXZ} = \frac{\vec{u}_y \cdot_h \vec{u}_z}{\|\vec{u}_y\|_h \|\vec{u}_z\|_h} = \frac{16+8-0}{2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad 1$$

$$\widehat{YXZ} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$



$\boxed{5}$

طريقة ثانية

- line $XY \xrightarrow{h} \xi_1 = \dfrac{X \times_h Y}{\|X \times Y\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$
- line $XZ \xrightarrow{h} \xi_2 = \dfrac{X \times_h Z}{\|X \times Z\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$

$$\cos(Y\hat{X}Z) = b(\xi_1 | \xi_2) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$\cancel{\vec{k}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right.$, $\bullet\ \overrightarrow{OY}\ (2,2,3) \in H$

$\bullet\ \vec{u}\ (1\ ,\ 2\ ;\ 2) \in H^2$ $\quad$ 1

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OY} = 2+4-6=0$$

$$\vec{u} \cdot_h \vec{u} = 1+4-4=1 \quad \checkmark$$

$$\overrightarrow{OY} \times_h \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times_h \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\bullet\ \vec{v}\ (2\ ,1\ ,\ 2) \in H^2$ $\quad$ 1

وبالتالي $\{\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{OY}\}$ أساس عيادي زاوئي في R^3.

$$\bullet\ \xi = \frac{\overrightarrow{OX} \times_h \overrightarrow{OY}}{\| \overrightarrow{OX} \times_h \overrightarrow{OY} \|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times_h \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1 \quad 3$$

$\bullet\ \Omega_{XY} : \boxed{X' = X - 2\, b(X|\xi)\, \xi}$ الانعكاس

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2\, \frac{-x+y}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \boxed{3}$$

• ${}^t\tilde{\sigma}_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tilde{\sigma}_3 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

② إذاً هو تقايس زائدي

• ① $\det \tilde{\sigma}_3 = \frac{1}{125} \begin{pmatrix} 25\times 21 - 4\times 400 + 16\times 20 \\ -400 - 400 + 21\times 80 \end{pmatrix} = 1$

$\tilde{\sigma}_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 4y + 4z = 5x \\ -20x - 5y + 20z = 5y \\ -20x - 4y + 21z = 5z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3y = 2z \\ x^2 + y^2 - z^2 = -1 \\ z > 0 \end{cases} \Rightarrow A_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^2$ ①

مركز الدوران

$x^2+y^2-z^2=-1$

$\cancel{\$}$

إذاً $\tilde{\sigma}_2$ دوران ①

زاوية تحقق

$\cos\theta = \frac{tr\,\tilde{\sigma}_2 - 1}{2} = \frac{3}{5}$. ① $\Rightarrow \boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times_h \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

إشارتها: ①

$\tilde{\sigma}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -9 \\ -15 \\ -16 \end{pmatrix} ; \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times_h \begin{pmatrix} -9 \\ -15 \\ -16 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 24 \end{pmatrix} = \frac{8}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$