جامعة الملك سعود King Saud University	كلية العلوم – قسم الرياضيات	الاختبار الشهري الثاني للمقرر 111 ريض للفصل الاول 1439-1440 هـ الزمن: ساعة ونصف

ملاحظات : ممنوع استخدام الالة الحاسبة

السؤال الأول (4 درجات): احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y=\sinh(\ln(x))+\operatorname{sech}^{-1}x$. (درجتان)

(2) $y=x^3\tanh^2\sqrt{x}$. (درجتان)

السؤال الثاني (21 درجة): احسب التكاملات التالية :

(1) $\int\frac{\cosh(x)}{e^{2x}}\,dx$ (درجتان)

(2) $\int\frac{dx}{e^{-x}\sqrt{e^{2x}-1}}$ (درجتان)

(3) $\int_1^e x^6\ln x\,dx$ (درجتان)

(4) $\int\sin^3 x\,\cos^5 x\,dx$ (درجتان)

(5) $\int\frac{dx}{x^2+2x-3}$ (درجتان)

(6) $\int\tan^5(x)\sec^4(x)\,dx$ (3 درجات)

(7) $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ (3 درجات)

(8) $\int\frac{x+4}{x^3+4x}\,dx$ (3 درجات)

(9) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ (درجتان)

د ابرهان

تصحيح الاختبار الشهري الثاني

111 ريض للفصل الأول ١٤٣٩-١٤٤٠ هـ

السؤال الأول (4 درجات)

① $y = \sinh(\ln x) + \operatorname{sech}^{-1} x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\cosh(\ln x) - \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

1 1

② $y = x^3 \tanh^2(\sqrt{x})$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \tanh^2(\sqrt{x}) + \frac{2x^3}{2\sqrt{x}} \tanh(\sqrt{x})\operatorname{sech}^2(\sqrt{x})$$

1 1

السؤال الثاني: (١٢ درجة)

①
$$\int \frac{\cosh(x)}{e^{2x}}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-2x}(e^x + e^{-x})\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int [e^{-x} + e^{-3x}]\,dx \quad 1$$
$$= \frac{1}{2}\left[-e^{-x} - \frac{1}{3}e^{-3x}\right] + c \quad 1$$

②
$u = e^x$ نضع 1/2

$$\int \frac{dx}{e^{-x}\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{e^x}{\sqrt{(e^x)^2-1}}\,dx \quad 1/2$$
$$= \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \cosh^{-1}(u) + c$$
$$= \cosh^{-1}(e^x) + c$$

1

③
$$I = \int_1^e x^6 \ln x\,dx = \left[\frac{x^7}{7}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{7}\int_1^e x^6\,dx$$

1,5 $u(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 1/x$

$v'(x) = x^6 \qquad v(x) = \frac{x^7}{7}$

0,5 $I = \frac{e^7}{7} - \frac{1}{49}[x^7]_1^e = \frac{e^7}{7} - \frac{1}{49}[e^7 - 1].$

$$\int \sin^3 x \cos^5 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^5 x \sin x \, dx \quad (4)$$

$$= \int (1-\cos^2 x) \cos^5 x \sin x \, dx$$

1/2 $u = \cos x$ &

$du = -\sin x \, dx$

1 $$= -\int (1-u^2) u^5 \, du$$

$$= \int [u^7 - u^5] \, du$$

1/2 $$= u^8/8 - \frac{u^6}{6} + C = \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + C$$

(5)

$$\int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1-4}$$

1 $$= \int \frac{dx}{(x+1)^2 - 2^2}$$

1 $$= -\int \frac{dx}{2^2-(x+1)^2} = -\frac{1}{2} \tanh^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

$$\int \tan^5 x \sec^4(x) \, dx = \int \tan^5 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx \quad (6)$$

0,5

$$= \int \tan^5 x (1+\tan^2 x) \sec^2 x \, dx$$

0,5

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x \, dx$ 0,5

$$= \int u^5 (1+u^2) \, du$$

$$= \int [u^5 + u^7] \, du \quad 0,5$$

1 $$= u^6/6 + u^8/8 + C$$

$$= \frac{\tan^6 x}{6} + \frac{\tan^8 x}{8} + C$$

$$\int \sqrt{4-x^2} \, dx = \int 2^2 \cos^2\theta \, d\theta = 4 \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \quad (7)$$

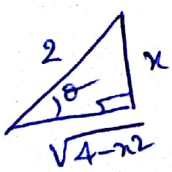
$x = 2\sin\theta$

$dx = 2\cos\theta \, d\theta$ 1

$\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$

$\sin(2\theta) = 2\cos\theta \sin\theta$

$= 2\frac{x\sqrt{4-x^2}}{4} = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$



1 $$= 2\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + C$$

$$= 2\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4}\right] + C$$

1

⑧

$$\int \frac{x+4}{x^3+4x}\,dx = \int \frac{x+4}{x(x^2+4)}\,dx$$

0,5

$$= \int \left[\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}\right] dx$$

$$= A\ln|x| + \frac{B}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + C\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= A\ln|x| + \frac{B}{2}\ln(x^2+4) + \frac{C}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + cst$$

1,5

حسب الثوابت A , B و C :

$$f(x) = \frac{x+4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

1

$$A = \lim_{x\to 0} x f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x+4}{x^2+4} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} x f(x) = A + B = 0 \Rightarrow B = -1$$

$$f(1) = \frac{5}{5} = A + \frac{B+C}{4} = 1 + \frac{B+C}{4}$$

$$C = 1$$

⑨

عوض

$$u = \sqrt{1+\sqrt{x}}$$

$$u^2 = 1+\sqrt{x}$$

$$u^2 - 1 = \sqrt{x}$$

$$(u^2-1)^2 = x$$

$$2(u^2-1)\,2u\,du = dx$$

1,5

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \int \frac{4\cancel{u}(u^2-1)\,du}{\cancel{u}}$$

$$= 4\int (u^2-1)\,du$$

$$= 4\left[\frac{u^3}{3} - u\right] + c$$

$$= \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} - 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + cst$$

0,5