جامعة الملك سعود - كلية علوم الأغذية والزراعة
قسم الاقتصاد الزراعي
قصر ٤٠٥
إقتصاديات الإناج الزراعي

محاضرات

فـي

إقتصاديات الإنتاج الزراعي

قصر ٤٠٥

أ.د. خالد بن نهار الرويس

منهج مقرر SYLLABUS

قصر٤٢٨ " إقتصاديات الإنتاج الزراعي"

عضو هيئة التدريس:

الأسم:	**استاذ دكتور/ خالد بن نهار الرويس**
رقم المكتب:	**٢ أ ٥٥**
الهاتف:	**٤٦٧٨٥٠٧ السكرتارية ٤٦٧٨٥١٠**
عضو هيئة التدريس المساعد:	
الهاتف:	

مواعيد المادة:

اليوم:	
الوقت "نظري":	**(من الساعة إلى الساعة)**
الوقت " عملي":	**(من الساعة إلى الساعة)**
القاعة:	
الشعبة:	
الساعات المكتبية:	

تعريف المقرر:

دراسة العلاقة بين الموارد الزراعية و الإنتاج الزراعي و التطبيقات العملية لنظرية الإنتاج في القطاع الزراعي يضاف إلى ذلك دراسة تكاليف الإنتاج الزراعي و كفاءة استخدام الموارد في قطاع الزراعة

هدف المقرر:

١- تعريف الطالب بقطاع الإنتاج الزراعي والعلاقة بين الموارد والإنتاج ودالة الإنتاج الزراعي.
٢- تحليل تكاليف الإنتاج الزراعي وتطبيق قواعد الإستخدام الأمثل للموارد.

المراجع:

اقتصاديات الإنتاج الزراعي، الفيتوري، عامر و مراد موسى، الطبعة الأولى، جامعة الفاتح،٢٠٠٠م.(أساسي)
اقتصاديات الإنتاج الزراعي، سالم النجفي. جامعة الموصل، ١٩٨٢ (ثانوي)
اقتصاديات الإنتاج الزراعي، محمود صادق العضيمي،١٩٧٢م. (ثانوي)

الإمتحانات وتوزيع الدرجات:

الدرجة	الأختبار
٢٠	الاختبار الفصلي الأول.
٢٠	الاختبار الفصلي الثاني.
١٠	تقارير عملية تمارين.
١٠	حضور ومشاركة وإختبارات قصيرة.
٤٠	الاختبار النهائي.
١٠٠	**المجموع**

المنهج:

المحاضرة	الموضوع
الأولى	مبادئء أولية في إقتصاديات الإنتاج الزراعي، علم الإقتصاد الزراعي و مجال البحث فيه، المشاكل الإقتصادية الرئيسية، الإقتصاد الزراعي، تعريف إقتصاديات الإنتاج الزراعي، طبيعة الموارد الإنتاجية، عوامل الإنتاج الزراعي.
الثانية	المشتقات العليا، النهايات العظمى والصغرى للدوال، التعظيم والتدنية الغير مقيدة، التعظيم والتدنية المقيدة، دوال الإنتاج المتجانسة.
الثالثة	العلاقات بين الموارد ولإنتاج الزراعي، الدالة الإنتاجية والمباديء الأولي للإختيار، مفهوم الدالة الإنتاجية، فروض دالة الإنتاج، طرق التعبير عن دالة الإنتاج، طبيعة الدالة الأنتاجية، دالة الإنتاج الكلاسيكية.
الرابعة	المشتقات الاقتصادية لدالة الأنتاج، الناتج المتوسط الفيزيقي، الناتج الحدي الفيزيقي، مرونة الإنتاج، قانون تناقص الغلة والمراحل الثلاث للإنتاج، الدوال الإنتاجية القيمية، مفهوم تكاليف الإنتاج.
الإمتحان الفصلي الأول	
الخامسة	تكاليف الوحدة،التكاليف المتوسطة والحدية، الإشتقاق الهندسي لدوال التكاليف المتوسطة والحدية.
السادسة	تحديد الحجم الأمثل من مورد الإنتاج لدالة إنتاج ذات مورد متغير واحد، معظمة أرباح المنتج، التوازن في المدى القصير، معظمة الأرباح و معظمة الناتج، منحنى الطلب لعنصر الإنتاج المتغير، تكلفة الفرصة البديلة ومنطقة الموارد النادرة.
السابعة	دالة الإنتاج لموردين، المسطح الإنتاجي، منحنيات السواء، أشكال منحنيات سواء الإنتاج.
الثامنة	مرونة إحلال الموارد، خطوط التكاليف المتساوية، تحديد توليفة الموارد الأقل تكلفة.
التاسعة	تحديد توليفة الموارد التي تعظم أرباح المنشأة الإنتاجية، المنطقة الإقتصادية وخطوط التوسع والخطوط الحرجة للمنشأة، الكفاءة الإقتصادية.
الإمتحان الفصلي الثاني	
العاشرة	دالة إنتاج كوب-دوجلاس، تعظيم أرباح المنشأة باستخدام دالة كوب-دوجلاس، أهم عيوب دالة كوب دوجلاس، إشتقاق دالة التكاليف من دالة إنتاج كوب دوجلاس.
الحادية عشر	دالة الإنتاج ذات مرونة الإحلال الثابتة، دالة الإنتاج ذات مرونة الإحلال المتغيرة، الدوال الإنتاجية الجبرية من الدرجة الثانية، دوال الإنتاج غير الجبرية.
الثانية عشر	إنتاج سلعتين أو أكثر، منحنى الإمكانيات الإنتاجية، إشتقاق منحنيات الإمكانيات الإنتاجية من الدوال الإنتاجية، منحنى الإمكانيات الإنتاجية والعلاقات بين السلع المنتجة.
الثالثة عشر	توليفة النواتج المعظمة لإيرادات المنشأة، المعدل الحدي لإحلال النواتج.خط العائد المتساوي.
الرابعة عشر	إقتصاديات الحجم، الناتج في المدى الطويل، منحنيات التكاليف في المدى الطويل، العلاقة بين تكاليف المدىالقصير و تكاليف المدى الطويل، عوائد السعة، قانون النسب المتغيرة، التقدم التقني ودوال الإنتاج.
الإمتحان النهائي	

علم الاقتصاد

مقدمة

يمثل علم الاقتصاد أحد العلوم الاجتماعية أي أحد العلوم التي تقوم على دراسة النشاط الإنساني وعلاقته بالمجتمع الذي نعيش فيه، والعلم إن هو إلا مجموعة من الحقائق والروابط التي بينها، في صور أفكار وآراء وأساليب ونظريات. وبالتالي فإن العلم هو مجموعة المعارف التي يهتدي بها الإنسان في إدراك الظواهر الطبيعية والاجتماعية وهو ما يدخل في نطاق العلوم البحتة وتلك التي يهتدي بها الإنسان في السيطرة على هذه الظواهر الطبيعية والاجتماعية تحقيقاً لإشباع مشتهياته وهو ما يدخل في نطاق العلوم التطبيقية. وتنقسم كل من العلوم البحتة والعلوم التطبيقية إلى شقين هما علوم طبيعية وعلوم اجتماعية، وبالتالي فإن العلوم البحتة تضم العلوم الطبيعية البحتة والعلوم الاجتماعية البحتة. بينما تضم العلوم التطبيقية العلوم الطبيعية التطبيقية والعلوم الاجتماعية التطبيقية. وفي هذا المجال سوف نركز على العلوم الاجتماعية وميدان العلوم الاجتماعية البحتة التي تقتصر على إدراك الظواهر الاجتماعية أما ميدان العلوم الاجتماعية التطبيقية فينحصر في السعي إلى السيطرة على القوى الاجتماعية وتوجيهها نحو ما ينفع الإنسان.

وكما سبق الذكر فإن علم الاقتصاد يمثل أحد هذه العلوم الاجتماعية الذي يبحث في محاولة الإنسان استخدام الموارد الطبيعية النادرة لإشباع رغباته المتعددة، ويطلق على الموارد الطبيعية التي تتسم بالندرة ويتم استخدامها في النشاط الاقتصادي بالموارد الاقتصادية. وتنشأ المشكلة الاقتصادية أساسا في حالة عدم قدرة هذه الموارد الاقتصادية في مجتمع معين على إشباع المشتهيات الإنسانية في هذا المجتمع فإن لم تكن تلك الموارد الاقتصادية محدودة أي موجودة بالقدر الذي يكفي لإشباع الاحتياجات الإنسانية لما نشأت المشكلة الاقتصادية. وبالتالي فإن المشكلة الاقتصادية في أي مجتمع تنبع من عاملين:

(١) محدودية الموارد الاقتصادية بالنسبة للاحتياجات الإنسانية المراد إشباعها.
(٢) وجود بدائل مختلفة لاستخدام الموارد الاقتصادية في إشباع الاحتياجات الإنسانية.

وبذلك يمكن القول بأن علم الاقتصاد هو أحد العلوم الاجتماعية الذي يتضمن مجموعة الأفكار والآراء والنظريات الاقتصادية التي تستهدف دراسة وتنظيم الموارد الاقتصادية وكيفية توجيهها الوجهة الكفيلة لإشباع المشتهيات الإنسانية وذلك بتحقيق العمالة الكاملة لتلك الموارد وتوجيهها بين مختلف أوجه استعمالها بما يحقق معظمه الإشباع الإنساني.

غالباً ما توجد مجموعتين من المتخصصين في العديد من العلوم:

الأولى: تهتم بتحديد النظريات العلمية *Scientific Theory* والمبادئ *Principles* والنماذج الأساسية.

الثانية: تهتم بتطبيق *Applied* تلك المبادئء الأساسية والنظريات في الحياة العملية للوصول إلى حلول لبعض المشاكل في مجال ذلك العلم.

وفي مجال الإقتصاد فإن علماء الإقتصاد النظري يقومون بتحديد المبادئ والقوانين الإقتصادية الأساسية سواء على صعيد الإقتصاد الكلي *Macroeconomics* أو الجزئي *Microeconomics* ودراسة العلاقات وتطويرها. حيث يقوم الإقتصاديون التطبيقيون ومنهم الزراعيون بتطبيق هذه المبادئ والنظريات والأسس في مجال الإقتصاد الزراعي *Agricultural Economics* للوصول إلى الحلول مثلى لمشاكل هذا القطاع.

التحليل الاقتصادي

لقد تبين من النقاش السابق أن علم الاقتصاد هو ذلك العلم الذي يتضمن مجموعة النظريات الاقتصادية التي تستهدف تنظيم الموارد الاقتصادية وتوجيهها الوجهة الكفيلة بإشباع رغبات المجتمع. والنظرية إن هي إلا مجموعة من التعاريف والفروض التي يمكن عن طريقها وباستخدام التحليل المنطقي الوصول إلى نتائج معينة. ومن ثم فإن النظرية الاقتصادية تتضمن مجموعة من الفروض والتعاريف الاقتصادية التي يمكن عن طريقها وباستخدام التحليل الاقتصادي اللفظي أو الرياضي الوصول إلى نتائج اقتصادية معينة. ومن هذا يتبين أن التحليل الاقتصادي يتضمن أساليب وطرق التحليل المنطقي التي يمكن بواسطتها الوصول إلى النظريات الاقتصادية.

أنواع التحليل الاقتصادي

يمكن تصنيف التحليل الاقتصادي وفقا لعدة أسس تختلف باختلاف نوع التحليل.

تصنيف التحليل الاقتصادي وفقا لسعة الوحدات الاقتصادية:

حيث يمكن تصنيف التحليل الاقتصادي وفقا لسعة الوحدة الاقتصادية إلى نوعين:

(١) **التحليل الاقتصادي الجزئي Micro Economic Analysis** أي التحليل الاقتصادي الميكروي، ويتناول دراسة سلوك الوحدات الاقتصادية المكونة للاقتصاد القومي كالمستهلكين للسلع والخدمات والمنتجين لهذه السلع والخدمات. كما يتناول الموارد الإنتاجية الأرضية والعمالية والرأسمالية وتوجيهها بين أوجه استخداماتها البديلة الوجهة الكفيلة بتحقيق استخدام هذه الموارد في إشباع الرغبات البشرية.

(٢) **التحليل الاقتصادي الكلي Macro Economic Analysis** أي التحليل الاقتصادي الماكروي، ويتناول النشاط الاقتصادي القومي بغض النظر عن الوحدات الاقتصادية المكونة لهذا الاقتصاد القومي وبذلك فإنه يتناول الاستهلاك القومي والادخار القومي والدخل القومي كما يتناول دراسة العوامل التي تؤثر في العمالة القومية.

تصنيف التحليل الاقتصادي وفقا لدرجة شموله على المتغيرات الاقتصادية Economic Variable إلى نوعين:

(١) التحليل الاقتصادي البسيط *Partial Economic Analysis* ويتناول دراسة العلاقة بين متغيرين فقط أحدهما مستقل *Independent Variable* والآخر تابع *Dependent Variable* والمتغير المستقل هو المتغير الذي يؤثر في المتغير التابع ولا يتأثر به. بينما المتغير التابع هو المتغير الذي يتأثر بالمتغير المستقل ولا يؤثر فيه. فمثلا الكمية المطلوبة من سلعة معينة دالة لسعر هذه السلعة فإن الكمية المطلوبة تمثل في هذه الحالة المتغير التابع بينما سعر هذه السلعة يمثل المتغير المستقل ويوضح ذلك المعادلة التالية:

$$Q = d(p) \qquad (1\text{-}1)$$

حيث Q = تمثل الكمية المطلوبة من السلعة، p = سعر هذه السلعة.

(٢) **التحليل الاقتصادي المتعدد General Economic Analysis:** ويتناول دراسة وتحديد العلاقة بين مجموعة من المتغيرات الاقتصادية في نفس الفترة. فالتحليل الاقتصادي المتعدد يتناول العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة معينة (المتغير التابع).ومجموعة من المتغيرات مثل دخل المستهلك وسعر السلعة وأسعار السلع البديلة وأذواق المستهلكين (المتغيرات المستقلة). ويوضح ذلك المعادلة التالية:

$$Q = d(p_1, p_2, I_3, T_4, ...) \qquad (1-2)$$

حيث: Q = الكمية المطلوبة من السلعة . p_1 = سعر هذه السلعة .

P_2 = سعر السلعة البديلة . I_3 = دخل المستهلك .

T_4 = ذوق المستهلك.

تصنيف التحليل الاقتصادي وفقا لعلاقة المتغيرات الاقتصادية بالزمن:

حيث يمكن تصنيف التحليل الاقتصادي وفقا لعلاقة المتغيرات الاقتصادية التي يتناولها التحليل بالزمن إلى:

(١) **التحليل الاقتصادي الساكن Static Economic Analysis** وهو الذي يتناول دراسة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية مع ثبات الزمن. فمثلاً عند تحليل التوازن بين الطلب والعرض لسلعة معينة نفترض في التحليل الاقتصادي الساكن أن هذا التوازن لحظي دون البحث عما إذا كان الطلب والعرض على هذه السلعة يتأثر بسعرها في فترة التحليل أو فترة زمنية تالية.

(٢) **التحليل الاقتصادي الحركي Dynamic Economic Analysis** وهو الذي يتناول دراسة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية في الفترات الزمنية المتتالية فمثلا يمكن القول أن الكمية المعروضة من سلعة معينة في فترة زمنية تعتمد على الأسعار السائدة لهذه السلعة في فترة زمنية سابقة.

(٣) **التحليل الاقتصادي المقارن:** ويتناول دراسة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية في فترات زمنية مختلفة فمثلاً يمكن بهذا التحليل مقارنة نقط التوازن التي تحدد مستوى الدخل القومي في سنة معينة مع نقط التوازن التي تحدد مستوى الدخل القومي في سنة سابقة.

تصنيف التحليل الاقتصادي وفقا للأسلوب التحليلي:

يمكن تصنيف التحليل الاقتصادي وفقا للأسلوب التحليلي إلى:

(١) **التحليل الاقتصادي الوصفي Descriptive Economic Analysis** الذي يتناول دراسة وتحليل الظواهر الاقتصادية وصفيا.

(٢) **التحليل الاقتصادي الرياضي Mathematical Economic Analysis** الذي يتناول دراسة وتحليل الظواهر الاقتصادية رياضياً.

(٣) **التحليل الاقتصادي القياسي Econometric Analysis** يتناول دراسة وتحليل المتغيرات والظواهر الاقتصادية وتحديد العلاقة الكمية التي تربط هذه المتغيرات ببعضها لذلك فإنه يستخدم

الأسلوب الإحصائي بالإضافة إلى الأسلوب الرياضي في دراسة النظريات الاقتصادية. وهو يختلف في هذا عن التحليل الاقتصادي الرياضي في أن الأخير يقتصر على مجرد تحديد العلاقة الدالية بين المتغيرات الاقتصادية باستخدام الأسلوب الرياضي.

وفي هذا المجال فإن هذا الكتاب سوف يقتصر على دراسة التحليل الاقتصادي الجزئي بشقيه الوصفي والاقتصادي الرياضي.

علم الاقتصاد الزراعي

يعتبرعلم الاقتصاد الزراعي *Agricultural Economics* من العلوم الحديثة التي برزت مع ظهور ونمو المشاكل الاقتصادية التي صاحبت الثورة الصناعية *Industrial Revelations* وما أدت إليه من تحرر الزراعة من الجمود الذي أصابها لفترات طويلة، فلم تعد المزرعة هي الوحدة البيولوجية التي تنتج لتأكل فقط بل أصبحت الوحدة الاقتصادية التي تؤثر فيما حولها وتتأثر به[1].

وبقيام الحربين العالميتين الأولى والثانية *First &Second Wars* إختل العرض *Supply* والطلب *Demand* وتأثرت الأسعار حتى بلغت أدنى مستوى لها عقب الحرب العالمية الأولى وأدت هذه الحروب التي إهتمت بتطوير معدات الحرب وأساليبه إلى تطوير أساليب الإنتاج الزراعي فزاد الإنتاج الزراعي، وفاض في بعض الدول الأوروبية حتى أنه تم التخلص من جزء كبير منه، في الوقت الذي كان فيه عدد كبير من سكان العالم الثالث يتضورون جوعاً وذلك لأن التقدم في أساليب الإنتاج الزراعي فاق بكثير التقدم في وسائل تصريفة.

كما أن التطور السريع في طرق المواصلات *Transportation* والاتصالات *Communication* التي أعقبت الحربين العالميتين بعثت في مهنة الزراعة صفة التجدد والحيوية، فلم يعد الناتج الزراعي ذلك الناتج الموسمي *Seasional Product* الذي يتأثر بالظروف الجوية فيزداد ذلك الإنتاج في مواسم، وينخفض في مواسم أخرى، ولم يعد دخل المزارع تتحكم فيه الطبيعة إلى حد كبير.

ومع هذا التقدم التقني تغيرت نسبة مزج موارد الإنتاج فزاد إستخدام الآلات الزراعية الحديثة لإنخفاض تكلفتها من جانب ولتسهيل الحياة على المزارع من جانب آخر. ورغبة في مزيد

[1] ممدوح السيد دسوقي وآخرون، "أساسيات في الاقتصاد الزراعي" الدار الجماهيرية للنشر والتوزيع والإعلان، مصراته، ليبيا، ١٩٨٩م.

من التقدم في مجال الزراعة تطورت أساليب الإدارة المزرعية وظهرت الحاجة إلى ضرورة تمويل المزارع لمواجهة متطلبات الزراعة الحديثة من بذور منتقاه، وآلات متقدمة، وأسمدة كيماوية وخلافه.

وأمام الإستجابة لكل هذه المبتكرات وظهور فوائض الإنتاج برزت أهمية الزراعة باعتبارها قطاعا إنتاجياً يمد غيره من قطاعات المقتصد بالموارد الإنتاجية وبالعملات الصعبة.

أدى كل ذلك إلى بروز الحاجة إلى جهاز أسعار منظم وكفء ينظم أسعار السلع، بحيث تصل السلعة إلى المستهلك بأقل سعر ممكن في الوقت الذي يحقق فيه المنتج أقصى الأرباح الممكنة، إذ أن كليهما لا يضاد الآخر، عندما تزيد كفاءة جهاز التسويق. وحتى لا يتعرض المنتجون إلى هزات في دخولهم ظهرت الجمعيات التعاونية *Cooperative Associations* التي تسوّق للمزارع موارد الإنتاج وفي الوقت نفسه تسوق له ناتجه.

تزايدت أهمية الزراعة بل وأصبح الإنتاج الزراعي أحد أدوات الضغط السياسي على الدول الفقيرة، وزاد مع ذلك ضرورة الحفاظ على خصوبة التربة باعتبارها مصدراً إنتاجياً متجدداً يفوق غيره من مصادر الإنتاج الأخرى.

وهكذا يتضح أنه كلما تعددت الأسئلة، تتعدد المجالات التي يهتم بها الاقتصادي الزراعي من اقتصاديات الإنتاج الزراعي *Agricultural Production Economics*، إلى إدارة المزارع *Farm Management*، فاقتصاديات الأراضي *Land Economics*، ثم التسويق الزراعي *Agricultural Marketing*، فالتمويل الزراعي *Agricultural Financing*، فالسياسة الزراعية *Agricultural Policy*، والأسعار الزراعية *Agricultural Prices*، فالتعاون الزراعي *Agricultural Cooperative*، فالزراعة لم تعد منعزلة عما يدور حولها بل هي نشاط اقتصادي يؤثر ويتأثر بالأنشطة الاقتصادية الأخرى في المقتصد.

يُعنى الاقتصاد الزراعي بتطبيق المبادئ *Principles* والنظريات *Theories* والقوانين *Rules* والمعرفة الاقتصادية في مجال الزراعة، للتعرف على سلوكيات المتغيرات *Variables* المؤثرة في الظواهر الاقتصادية الزراعية ومدى انسجامها أو انحرافها عن المبادئ الأساسية والنظريات الاقتصادية.

أما مجال البحث في علم الاقتصاد الزراعي فيتفق مع مجال البحث في أي علم والتي يمكن تلخيصها في الخطوات التالية:

- تحديد مشكلة البحث والفروض التي تكفل الوصول إلى حلها.
- جمع البيانات والإحصاءات والمعلومات عن الظاهرة محل الدراسة.
- تحليل البيانات والمعلومات في ضوء فروض النظرية الاقتصادية.
- اختبار صحة النتائج وفقاً لفروض النظرية الاقتصادية.
- الاستنتاج وإصدار التوصيات لتعميمها إذا ثبت صحتها.

المشاكل الاقتصادية الرئيسية

تواجه المقتصدات على مختلف أنواعها ست مشاكل رئيسية هي[٢]:

(١) **ماذا ننتج؟ What to Produce? "تحديد نوع ومقدار السلع والخدمات التي يتم إنتاجها"**، أي ما هي السلع والخدمات التي يرغب المجتمع في إنتاجها؟ وبأي كمية؟ تعتمد بعض المجتمعات على جهاز الثمن *Price Theory* (قوى السوق) لحل هذه المشكلة بينما تأخذ بعض المجتمعات الأخرى بأسلوب التخطيط كوسيلة لتحقيق التخصيص الأمثل للموارد.

(٢) **كيف ننتج؟ How to Produce? "الاختيار بين الأساليب الإنتاجية"**، أي ما هي طرق إنتاج السلعة؟ هناك أكثر من طريقة إنتاجية لإنتاج السلع، فالسلع الزراعية مثلا يمكن الحصول على قدر معين منها باستخدام مساحة صغيرة من الأرض مع الاعتماد المكثف على المخصبات والآلات والأيدي العاملة. بينما يمكن الحصول على نفس القدر من المحصول باستخدام مساحة أكبر من الأرض مع الاعتماد البسيط على العوامل الأخرى. ويهتم فرع علم اقتصاديات الإنتاج *Production Economics* بهذا النوع من المشاكل.

(٣) **لمن ننتج؟ Home to Produce?"توزيع الإنتاج على سكان المقتصد"**، أي كيف يمكن توزيع السلع والخدمات المنتجة على أفراد المجتمع الواحد؟ هذا يتطلب دراسة الأسواق أي أسواق

[٢] محمود محمد شريف وآخرون، " علم الاقتصاد" ج١، دار المطبوعات الجديدة، الإسكندرية، مصر، ١٩٦٩م.

الخدمات الإنتاجية لتحديد العائد الخاص بكل منها. ويطلق على فرع علم الاقتصاد الذي يهتم بدراسة هذه المشكلة نظرية التوزيع *Theory of Distribution*.

(٤) هل موارد المجتمع مستخدمة بكاملها أم يوجد بعضها عاطلا؟ "كفاءة استخدام الموارد"ويتفرع عن هذه المشكلة مشكلتان رئيسيتان هما:

- الكفاءة الإنتاجية *Production Efficiency*.
- الكفاءة التوزيعية *Allocative Efficiency*.

ويتسم الإنتاج بعدم الكفاءة *Inefficiency* إذا كان من الممكن إعادة توجيه الموارد بحيث يتم إنتاج أكبر قدر من سلعة واحدة على الأقل دون إنقاص القدر المنتج من أية سلعة أخرى. وأي أسلوب إنتاجي يتسم بانخفاض الكفاءة يؤدي إلى إنتاج قدر أقل من توليفة الموارد نفسها التي كان من الممكن أن تعطي إنتاج أكبر لو تم توظيفها بطريقة أكفاء.

وبالمثل فإن توزيع الناتج القومي يتسم بانخفاض الكفاءة إذا كان من الممكن إعادة توزيعه بحيث يزداد الإشباع الذي يحصل عليه فرد على الأقل دون تقليل إشباع أي من الأفراد الآخرين. ويهتم فرع علم اقتصاد الرفاه *Welfare Economics* بدراسة مثل هذه المشاكل. فوجود بعض الموارد العاطلة يعني أن الاقتصاد يعاني من مشاكل البطالة والفقر.

(٥) هل القوة الشرائية Purchasing Power للدخول النقدية لإفراد المجتمع ولمدخراتهم ثابتة أم أن التضخم يلتهم جزءاً منها؟ "مدى توظيف موارد المقتصد"، عندما تكون الموارد الاقتصادية شحيحة ولا تكفي لإنتاج ما يحتاجه سكان المقتصد من السلع والخدمات فكيف تترك بعض الموارد دون توظيف؟ مما لاشك فيه أن جميع الأفراد وكذلك الحكومات يريدون توظيف جميع الموارد المتاحة لديهم إلا أن من بين سمات المقتصدات الرأسمالية عدم التشغيل الكامل لبعض الموارد، الأمر الذي يترتب عليه حدوث كثير من المشاكل إذ يتشابه ذلك مع انخفاض الكفاءة التوزيعية للموارد إذ أنهما يؤديان إلى إنتاج مجموعات من السلع داخل حدود الإمكانيات

الإنتاجية، وعموماً تقع دراسة مثل هذه المشاكل في نطاق فرع علم الاقتصاد المسمى الدخل القومي والدورات الاقتصادية *National Economic and Business Cycles*.

(٦) كيف يمكن ضمان تحقيق معدل مرتفع للنمو الاقتصادي؟ "تنمية الطاقة الإنتاجية للمقتصد"، ويعنى هذا السؤال بأي الوسائل يتم تحسين وزيادة الطاقة الإنتاجية للمجتمع؟ وطبعا الإجابة على هذا السؤال يكون بتنمية موارده المتاحة كماً ونوعاً. حيث تعتبر تنمية الطاقة الإنتاجية رأسياً وأفقياً من أهم أهداف السياسة الاقتصادية لأي مقتصد إذ أن ذلك هو الوسيلة الوحيدة لحدوث تحسن مستمر في مستوى معيشة ساكنيه. وتقع دراسة هذه المشكل تحت فرع علم الاقتصاد المسمى بالتنمية الاقتصادية *Economic Development*.

اقتصاديات الإنتاج الزراعي[٣] Agricultural Production

اقتصاديات الإنتاج الزراعي هي تطبيق مبادئ الاختيار على استعمال رأس المال *Capital* والعمل *Labor* والأرض *Land* وعنصر الإدارة *Management* في الزراعة، بالطريقة التي تعظم الإنتاج *Maximizing Production* أو تقلل التكاليف *Minimizing Costs* أو كليهما معاً بما يحقق معظمة الإشباع في المقتصد. كما تعرّف بأنها علم تطبيقي يتم بموجبه تطبيق مبادئ الاختيار في استخدام الموارد الرأسمالية والبشرية والأرضية والإدارة في صناعة الزراعة. ويقوم هذا الفرع بدراسة كل النواحي المتعلقة باستعمال الموارد وكيفية الوصول إلى معدلات الإنتاج الزراعي التي تحقق الرفاهية الاقتصادية القصوى للمستهلكين. وبتحليل المبادئ والعلاقات التي تجعل من الممكن اختيار ووضع الخطة الاستغلالية المثلى للزراعة.

هذا ويجب أن يلاحظ أن دور علماء اقتصاديات الإنتاج الزراعي لا يقتصر على استعمال الموارد على مستوى المزارع الفردي فقط، بل ينصب اهتمامهم أيضاً على استعمال الموارد بما يحقق الكفاءة الاقتصادية *Economic Efficiency* على مستوى المقتصد القومي، بما يحقق معظمة إشباع المستهلك وتحقيق الرفاهية لكافة أفراد المجتمع.

[٣] اقتصاديات الإنتاج الزراعي، سالم النجفي. جامعة الموصل، ١٩٨٢.

أهداف اقتصاديات الإنتاج الزراعي[٤]

(١)الوصول إلى أكفاء *Most Efficient* استخدام لعناصر الإنتاج الزراعي (كفاءة تقنية، توزيعية، واقتصادية) *Technical, Allocative and Economic Efficiency*.

(٢)مساعدة المزارعين في تحقيق أهدافهم بالحصول على أقصى الأرباح الممكنة *Maximum Profits*، أو أقصى إنتاج ممكن، *Maximum Production* أو تدنيه التكاليف *Minimize Costs*

فهو بذلك يهتم باستعمال العمل، رأس المال، الأرض وعنصر الإدارة والدخول المتأتية من استخدامهم بهدف تدنية التكاليف المزرعية *Minimizing the Agricultural Costs* وتعظيم ربحية المزرعة *Maximizing the Agricultural Profits*. إلا أن من المشاكل التي يعاني منها هي مشكلة عدم التأكد *Uncertainty* أو المخاطرة *Risk* في وضع البرامج الاستخدامية للمزرعة. وبالتالي فإن اقتصاديات الإنتاج الزراعي تهتم بكل الظواهر المتصلة بالكفاءة الاقتصادية *Economic Efficiency* في استخدام الموارد الزراعية.

وبصورة أكثر تفصيلاً فإنه يمكن إعادة تحديد أهداف اقتصاديات الإنتاج الزراعي بالصورة التالية:

(١)تقدير ووصف الشروط الواجب توافرها للحصول على أفضل استخدام للموارد الاقتصادية الزراعية في إنتاج المحاصيل الزراعية النباتية والحيوانية والتصنيع الزراعي.

(٢)تحديد مدى الانحراف عن الاستخدام الأمثل *Optimum Use* للموارد الاقتصادية الزراعية مقارنة بالعمليات الإنتاجية الزراعية الجارية.

(٣)التعرف على العلاقات التحليلية للقوى التي تحدد النظم الإنتاجية واستخدام عناصر الإنتاج الزراعي.

[٤] اقتصاديات الإنتاج الزراعي، سالم النجفي. جامعة الموصل، ١٩٨٢.

(٤) التعرف على الوسائل والطرق التي يمكن من خلالها الوصول إلى الاستعمال الأمثل للموارد الاقتصادية الزراعية.

وخلال محاولتنا تحقيق الأهداف أعلاه فإن هناك أسئلة مكملة تواجه أي باحث في الاقتصاد الزراعي منها:

- ما هو الإنتاج الكفؤ؟
- كيف يتم تحديد كمية الموارد المعظمة للأرباح؟
- كيف يتفاعل المنتج الزراعي مع التغيرات السعرية التي قد تواجه منتجاته؟
- ما هي توليفة النواتج التي ستعظم أرباح المنتج؟
- كم يدفع المزارع المنتج لشراء سلعة معمرة مثل الميكنة؟
- ماذا سيفعل المنتج أمام ظروف عدم التأكد التي تواجه ناتجة؟
- ما أثر التقنية Technology على ناتج المزارع؟

طبيعة الموارد الإنتاجية[٥] Productive Resources

(١) **الموارد ذات الخدمات المخزونة Stock Resources**

وهي التي يمكن استخدامها في العمليات الإنتاجية في فترات مختلفة وحسب متطلبات العمليات المذكورة. مثل (الأسمدة الكيماوية والأعلاف).

(٢) **الموارد ذات الخدمات المتدفقة Flow Resources**

وهي التي يجب استخدامها وإلاّ فإنه لا يمكن الاستفادة منها في فترة إنتاجية أخرى، مثل(العمل المزرعي).

(٣) **الموارد ذات الخدمات المخزونة والمتدفقة Stock & Flow Resources**

[٥] اقتصاديات الإنتاج الزراعي، سالم النجفي. جامعة الموصل، ١٩٨٢.

مثل (المكائن و الآلات الزراعية) فإن اندثار الآلة يحدث نتيجة استخدامها في العمليات الإنتاجية. أو يمكن الاحتفاظ بها دون استعمال إلى فترة إنتاجية قادمة، وبعض الموارد متدفقة كليا ولا يمكن تخزينه كأشعة الشمس.

تستخدم هذه الأنماط الموردية في العملية الإنتاجية الزراعية ومن ثم فإن الإنتاج يتضمن استعمال موارد متعددة بعضها يتحول كليا إلى محصول في سنة واحدة والبعض الآخر يتحول على مدى سنوات بينما هناك موارد لا يتم تحويلها كليا إلى محصول زراعي. وبهذا الصدد فإنه يقصد بالوقت اللازم للمورد حتى يتحول كليا إلى محصول بالفترة *الإنتاجية Production or Transformations Period* وتختلف هذه الفترة اختلافا كبيرا من مورد لآخر.

وهذا يؤدي إلى تعقيد التحليل الاقتصادي *Economic Analysis* باستخدام العديد من الموارد التي تختلف في فتراتها الإنتاجية التحويلية *Transformation*، بينما تتسم تلك التحليلات بالبساطة لو كانت الموارد تتحول جميعها إلى محصول في سنة واحدة.

وفي القطاع الزراعي غالبا ما يوجد العديد من الأنماط المزرعية، تمتلك تلك الوحدات الزراعية بعض مواردها الإنتاجية كالمكائن الزراعية ومن ثم فإنه يعد استثمارا في الإنتاج الزراعي يمتد سنوات عدة، وبالتالي فإن هذا النوع من الموارد يسبب بعض التعقيدات عند وضع الخطة الإنتاجية وذلك في إطار عنصر الزمن. على سبيل المثال (يعتبر المخزون من الخدمات التي تستعمل في سنة أو فترة إنتاجية تكاليف متغيرة *Variable Cost* وتتصل بإنتاج معين. بينما خدمات الموارد المتدفقة تعتبر تكاليف الثابتة *Fixed Costs*.

إن عنصر الزمن يمنع إمكانية المعرفة الكاملة والحقيقية لطبيعة تدفقات الخدمات الموردية ومن ثم فإن مسألة التكهنات وعدم التأكد تعد طبيعية في بعض جوانب وضع الخطة الإنتاجية المزرعية نتيجة عدم المعرفة ونقص المعلومات.

عوامل الإنتاج الزراعي[٦] Factors of Production

يعد الناتج القومي *National Product* أحد مصادر قوة الدولة ورفاهية الأفراد. ولذا فان الاهتمام بالبحوث والدراسات المتعلقة بالعملية الإنتاجية أخذ بالتزايد علي المستوى الكلي *Macro* أو الجزئي *Micro* في الاقتصاديات المتقدمة. وأتفق العديد من الاقتصاديين أن الإنتاج عبارة عن (خلق المنافع أو زيادتها) **وفي هذا المجال فإن المنفعة** *Utility* **تقسم إلى:**

- (**منفعة شكلية**) وتعني إحداث تغير في شكل المادة كتحويل العناصر الموجودة في التربة إلى محصول.
- (**منفعة مكانية**) ويقصد بها نقل محصول ما إلى مكان ترتفع فيه المنفعة المتأتية منه. فنقل محصول الأرز من مكان إنتاجه حيث يكثر المعروض منه إلى مراكز الاستهلاك يضيف عليه منفعة مكانيه.
- (**منفعة زمنية**) تنشأ نتيجة خزن المحاصيل إلى وقت تكون فيها أكثر نفعاً. كتخزين الحبوب في صوامع في حالة زيادة عرضها في وقت الحصاد إلى حين زيادة الطلب عليها.
- (**المنفعة التملكية**) وتعني زيادة منفعة السلعة عند انتقالها من أفراد لاستخدامها إلى مستهلكين يمكنهم الانتفاع بها.

تقسّم عناصر الإنتاج إلى الأرض، العمل، رأس المال والإدارة. وقد تناول الاقتصاديون المختصون هذا التقسيم بالنقد، وذلك لعدم وجود التجانس بصورة كاملة داخل كل عامل يمكن تقسيمه إلى وحدات متماثلة. كما أن التقسيم بين بعض عوامل الإنتاج يعد غير واضح فالتمييز بين الأرض ورأس المال لا يقوم على أسس اقتصادية متينة بالإضافة إلى أن التمييز بين العمل والإدارة يعد صعباً في بعض العمليات الإنتاجية. وبالرغم من ذلك فإن هذا التقسيم لا يزال سائداً في كتابات العديد من الاقتصاديين. كما يميل بعض الكتاب إلي تقسيم عوامل الإنتاج إلى (موارد طبيعية) وتتضمن الأرض والمصادر النباتية والحيوانية والمياه والمتغيرات المناخية (الموارد الرأسمالية) وتشمل السلع المنتجة كالمعدات والمباني وأخيراً (الموارد البشرية) وتضم الجهود البشرية كالتنظيم والعمل.

[٦] اقتصاديات الإنتاج الزراعي، سالم النجفي. جامعة الموصل، ١٩٨٢.

وبالرغم من تأكيد بعض المدارس الاقتصادية على أهمية بعض عناصر الإنتاج مقارنة بعناصر أخرى إلاّ أن أهميتها تتأتى من دورها في العملية الإنتاجية الزراعية من ناحية، ومرحلة النمو والتقدم الاقتصادي من ناحية أخرى. ففي اقتصاد متخلف تعد الأرض ذات أهمية نسبية عالية لاعتماد الزراعة عليها، بينما في المجتمعات المتقدمة يعد العمل الماهر ورأس المال ذا أهمية نسبية أكبر. وهكذا فبالرغم من أهمية عناصر الإنتاج كافّة في العملية الزراعية، إلاّ أن أهميتها تتباين في ضوء مرحلة التنمية الاقتصادية الزراعية لذلك القطر.

أولاً : الأرض Land

تشمل الأرض في معناها الواسع كل الظواهر الطبيعية التي تتعامل مع المحاصيل الزراعية من خلال التربة *Soil*. ويتضمن ذلك سطح الأرض وما تمتاز به من استعمالات مختلفة، وكذلك ما يحتويه جوف الأرض من موارد معدنية ومياه لها آثار مفيدة في تغذية النباتات، هذا بالإضافة إلى ما يغلف الأرض من أجواء متميزة بدرجات متفاوتة من الحرارة والرطوبة والتي تؤدي مجتمعة إلى الميزة النسبية في إنتاج محاصيل معينة دون أخرى.

وتتسم الأرض ببعض الخصائص التي تميزها عن الموارد الاقتصادية الأخرى منها:

- هبة من هبات الله وأنها ليست من جهود الإنسان.
- مستديمة أي لها صفة الدوام حيث يمكن الحفاظ على قواها الطبيعية.
- محدودة في كميتها وثابتة في موقعها. وبالرغم من إمكانية زيادة مساحة الأراضي الزراعية، إلاّ أنها لا تشكل إلاّ نسبة ضئيلة من إجمالي المساحة الزراعية في العالم.
- عرض الأراضي يعد غير مرن في بعض الحالات لصعوبة نقلها من مكان إلى آخر.

أما من حيث طبيعة استعمالات الأرض الزراعية

فتختلف التوليفة الموردية المستخدمة للإنتاج المحصولي. وذلك بتباين كثافة استخدام العناصر الإنتاجية في وحدة المساحة (الدونم) (كالزراعة الكثيفة) ويقصد بها زيادة استخدام العمل ورأس

المال في وحدة الأرض. وتزداد نسبة العنصر الأول مقارنة بالثاني في الدول ذات العرض المرتفع من العمل وحيث يكون رأس المال نادراً وغالباً ما يسود هذا النوع من الزراعة في دول كهذه، بينما يزداد رأس المال مقارنة بالعمل في الزراعة المتقدمة وحيث إمكانية الاستبدال تعد ممكنة. أما (الزراعة الخفيفة) والتي يقصد بها انخفاض نسبة استخدام عناصر الإنتاج الزراعي مقارنة بوحدة الأرض، وغالباً ما يسود هذا النوع من الزراعة في الدول التي تتسم بالوفرة في عنصر الأرض الزراعية وانخفاض الكثافة السكانية ومن ثم انخفاض عرض العمل.

كما تقسم الأراضي الزراعية من حيث الاستخدام إلى:

(**الزراعة المتخصصة**) وهي أن يغلب على المزرعة نوع واحد من المحاصيل بالإضافة إلى محاصيل إضافية أو مكملة، ومن ثم فإن إيرادات المحصول المزروع تشكل نسبة متميزة في دخل المزارع.

(**الزراعة المتنوعة**) ويقصد بها قيام المزارع بإنتاج عدة محاصيل ومن ثم فإن دخله يتأتى من مجموع إيرادات المشاريع أو المحاصيل المزروعة ويسهم أي من إيرادات المحاصيل المزروعة بأقل من٥٠% من إجمالي دخل المزارع.

ثانيا: العمل Labour

يقصد بالعمل الجهد المبذول اختياريا من قبل الفرد في تحقيق منفعة. أو أنه الجهد المبذول لإشباع حاجات الفرد والمجتمع. و نظراً لهذه الأهمية التي يحتلها هذا العنصر في العملية الإنتاجية فقد ذهب بعض الاقتصاديين إلى أن قيمة السلعة تتحدد بما أنفق فيها من عمل. ويؤكد آخرون إلى أن قيمة مبادلة أي سلعة يتوقف على كمية العمل اللازم لإنتاجها.

وللعمل خصائص متعددة منها:

- أن يكون الجهد المبذول يستهدف تحقيق منفعة
- يتسم العمل بانخفاض مرونة انتقاله مقارنة برأس المال
- يميل عرض العمل إلى أن يكون مستقلاً عن الطلب عليه فإذا زاد الطلب على العمل فجأة لسبب أو آخر فإن المعروض منه لا يمكن أن يزيد بالسرعة نفسها والعكس صحيح أيضا.

تتطلب الزراعة الحديثة تقسيماً للعمل *Division of Labour* يتحقق معه كفاءة إنتاجية عاليه، وبمعنى آخر يجزئ العمل المزرعي إلى عدة عمليات وقيام عدة أفراد بإنجازها ففي المزارع الكبيرة، نظراً لأن العمليات الإروائية عملا متخصصاً. كما أن العمليات التسويقية تعد عملا مختلفا يتطلب مهارة أخرى غير تلك المستخدمة في العمليات الإروائية. بينما كانت تتم كافة العمليات المزرعية في الزراعة التقليدية من خلال المزارع الفرد في مزرعته. وغالبا ما يرتبط تقسيم العمل المزرعي بحجم المزرعة وطبيعتها، فكلما كبر حجم المزرعة أصبح تقسيم العمل أكثر ضرورة. هذا بالإضافة إلى حجم السوق الذي يتعامل بالسلع الزراعية المنتجة. كذلك فإن هناك علاقة طردية بين حجم المزرعة وحجم السوق من ناحية وتقسيم العمل المزرعي من ناحية أخرى، وتعد هذه متطلبات أساسية يجب توافرها حتى يمكن إظهار مزايا تقسيم العمل المزرعي إلى مزايا في مقدمتها زيادة الإنتاج وخفض التكاليف، و يتأتى ذلك من اكتساب الخبرة والدراية في العمليات المتخصصة واستخدام المواهب البشرية فيما يناسبها من أعمال، ثم تسهيل أداء الأعمال المزرعية. ولا يخلو تقسيم العمل المزرعي من عيوب إلاّ أن مزاياه في مجال الإنتاج تفوق عيوبه في مجال العمل. كما يقاس العمل في مجال دوال الإنتاج الزراعي بصورة وحدات متساوية و نظراً لتباين قوة العمل المستخدم من قبل الرجل مقارنة بالمرأة العاملة أو الأولاد العاملين في القطاع الزراعي فقد أتفق على اعتبار عمل الرجل في اليوم الواحد وحدة واحدة من العمل، بينما يعد عمل المرأة حوالي ٠,٨ وحدة عمل والأولاد تتراوح وحدات العمل المز رعي الذي يقدمونه من (٠,٦- ٠,٤) وحدة عمل في ضوء أعمارهم وذلك وفقاً لشريحة محددة من المهارة في العمل المزرعي. ويجب الأخذ في الاعتبار مستويات المهارة المختلفة عند احتساب ساعات العمل اليومية إذ يجب أن يحتسب وزناً نسبياً للعمل الماهر مقارنة بالعمل غير الماهر.

ثالثا: رأس المال Capital

يعد رأس المال من العناصر الإنتاجية ذات الأهمية النسبية العالية في الزراعة الحديثة، وبالرغم من اختلاف تعريف رأس المال إلاّ أن تعريفه العام بأنه: الثروة التي تستخدم في إنتاج ثروة أخرى يعد أكثر عمومية و يقصد به في مجال دراستنا مجموع الآلات والأدوات ومستلزمات الإنتاج الأخرى

الثابتة، التي تستخدم في مجال الإنتاج الزراعي. وتظهر أهميته في الدول النامية حيث يتسم بالندرة مقارنة بعناصر الإنتاج الأخرى.

ويعد تكوين رأس المال في الزراعة مسألة مرتبطة بالتقدم في مجال الإنتاج الزراعي ووسائله، وغالبا ما يعتمد الاستثمار في هذا المجال على النشاط العام باعتبار أن الاستثمار في الزراعة كاستصلاح الأراضي وإنشاء السدود ذات عوائد على المدى المتوسط. ومن ثم فإن رأس المال الفردي يستهدف العوائد على المدى القريب، و لا يرغب في هذا النوع من الاستثمارات.

ويتحدد حجم الاستثمارات في القطاع الزراعي في ضوء خطط التنمية القومية والتي غالبا ما يحتسب معامل رأس المال لهذا الغرض. ويتفق العديد من الاقتصاديين على أن هذا المعامل يجب أن يزيد في الاقتصاديات النامية بصورة عامة عن (١:٤). ويرتبط الاستثمار بحجم المدخرات ومن ثم بسعر الفائدة وطبيعة الكفاية الحدية لرأس المال المستثمر، وهذه جميعها متغيرات مؤثرة في حجم الاستثمار بجانب متغيرات أخرى كالحوافز على الاستثمار و المناخ الاجتماعي ودرجة الاستقرار الاقتصادي. كما يقاس هذا المتغير من خلال استخدامه في اقتصاديات الإنتاج الزراعي بوحدات متساوية وغالبا ما تستخدم الوحدات النقدية كإحدى المتغيرات في دوال الإنتاج الزراعي كما يمكن قياس رأس المال كوحدات تكنيكية تستخدم في العملية الإنتاجية الزراعية، وفي هذه الحالة يقتضي توحيدها من خلال طبيعة الوحدات المستخدمة كقوة إحصائية كما في حالة الآلات و المكائن الزراعية.

رابعا:الإدارة المز رعية والتنظيم Administration, Management

هناك عدة تعريفات لعلم إدارة المزارع التي يمكن تلخيصها علي النحو الآتي:

١. إدارة المزارع هي أحد فروع علم الاقتصاد الزراعي الذي هو علم من العلوم الاجتماعية التطبيقية وتهدف إلى تنظيم وتوزيع الموارد البشرية والطبيعية داخل الوحدة الإنتاجية (المزرعة) بغرض تحقيق أهداف تلك الوحدة.
٢. كما عرفت بأنها الجزء الغير منظور من عملية الإنتاج.

٣. وعرفه آخرون على أنه علم اتخاذ القرارات المزرعية *The Science of Decision Making* هذا التعريف يعتبر تعريفاً جزئياً فقط لان اتخاذ القرار *Decision Making* يعرّف بأنه اختيار البدائل *Alternatives* من بين الأخرى لأفضليته. فاتخاذ القرار وإن كان يمثل مرحلة مهمة من المراحل التي تؤدي على تحقيق الهدف المقصود من الإدارة، إلا أن هذه المرحلة تأتي بعد مراحل تعيين الهدف وتحديد الفرضيات وتحليل المعلومات، ويلي ذلك اتخاذ القرارات.

فقد ذكر (*Robertson*) أن المراحل التي تكون العملية الإدارية *(Managerial Process)* هي:

- تحديد أو تكوين الأهداف أو الغايات النهائية المطلوبة *(Goal Formation)*.
- تحديد المشكلة ووضع الفرضيات *(Problem Definition)*
- جمع بيانات والمعلومات والملاحظات عن طبيعة المشكلة *(Observations)*
- تحليل البيانات والمعلومات المتحصل عليها *(Analysis)*
- اتخاذ القرار *(Decision Making)*
- التمثيل وتوزيع الاختصاصات *(Action)*
- تحمل المسؤولية *(Bearing Responsibility)*
- تقييم النتائج التي يتم التوصل إليها *(Evaluation)*

٤. أما فورستر (*Forster*) فقد قام بتعريف إدارة المزارع في كتابه (*Farm Organization and Management*) أنها علم وفن ومشروع عمل حيث ذكر التالي "تعرف إدارة المزارع بأنها دراسة طرق ووسائل تنظيم عناصر الإنتاج من ارض وعمل ورأس مال، وكذلك تطبيق المعرفة الفنية والخبرات والمهارات لكي تنتج المزرعة اكبر قدر من الدخل الصافي أو الأرباح".

تتمثل الإدارة باتخاذ القرارات من قبل المدير وتتخذ العملية الإدارية خمس مراحل هي:

التخطيط *Planning* ويشمل تحديد أهداف المشروع ووضع السياسات والتقديرات المختلفة لجوانب المشروع من ميزانيات تقديرية وإجراءات وخطط زمنية.

التنظيم.*Organization* ويتضمن الهيكل الوظيفي للمشروع بما يحويه من مستويات إدارية ومسؤوليات وسلطات ويمكن القول بأن مرحلتي التخطيط والتنظيم تعتبرا مراحل تجهيزية غالباً ما تسبق العمل بالمشروع.

وبهذا يكون التنظيم هو أحد أدوات الإدارة، وفي المجال الزراعي فإن التنظيم يهتم بصورة رئيسية بإعادة تنظيم عناصر الإنتاج لتحقيق الكفاءة الاقتصادية.

التوجيه *Directing &Guidance* لاحظنا أن المرحلتين السابقتين (التخطيط و التنظيم) لا يؤديان إلى إنجاز عمل المشروع، وبالتالي فإن مرحلة التوجيه ضرورية بحيث تتضمن إرشاد المرؤوسين في تنفيذ أعمالهم، وإيجاد طرق الاتصال المختلفة لإتمام العمل بطريقة سليمة و اقتصادية.

التنسيق. *Coordination*

الرقابة *Control* بالرغم من أعمال المشروع تتم عادة عن طريق توجيه الإدارة والاتصال بينها وبين المرؤوسين إلا أنه لا يمكن التأكد من إتمام العمل نهائياً إلاّ بمطابقة ما تم تنفيذه بما كان مفروضاً تنفيذه. ومن هنا تنشأ ضرورة وجود مرحلة الرقابة التي تشمل تحديد معايير الرقابة، وقياس نتائج الأعمال ثم التوصل إلى الانحرافات وتحليل أسبابها.

وتعد الإدارة المزرعية في هذا الصدد إحدى الأدوات الرئيسية في العملية الإنتاجية. وذلك للدور الفاعل الذي تقوم به في إعادة توزيع الموارد الاقتصادية الزراعية، وربطها بصورة تحقق مستويات مثلى من النتائج من خلال وضع الموارد الاقتصادية في مجالات استخدامها الكفؤة.

مدخل رياضي للإنتاج والتكاليف

المشتقات العليا:

غالباً ما تكون المشتقة الأولى *First Derivatives* $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = f(x)$ ، هي أيضا دالة أخرى للمتغير x . وفي هذه الحالة يمكن أن نجري عملية التفاضل على المشتقة الأولى ونحصل على ما يسمى بالمشتقة الثانية *Second Derivatives*. بالمثل إذا كانت المشتقة الثانية هي أيضا دالة للمتغير x، فإنه يمكن الحصول منها على المشتقة الثالثة وهكذا.

وعادة نرمز إلى المشتقات الأولى والثانية والثالثة والرابعة[٧].... الخ، بواحدة من الطرق التالية:

الطريقة الأولى: $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}$

الطريقة الثانية: y', y'', y'''

الطريقة الثالثة: y_1, y_2, y_3

الطريقة الرابعة: $f'(x), f''(x), f'''(x)$

النهايات العظمى والصغرى للدوال

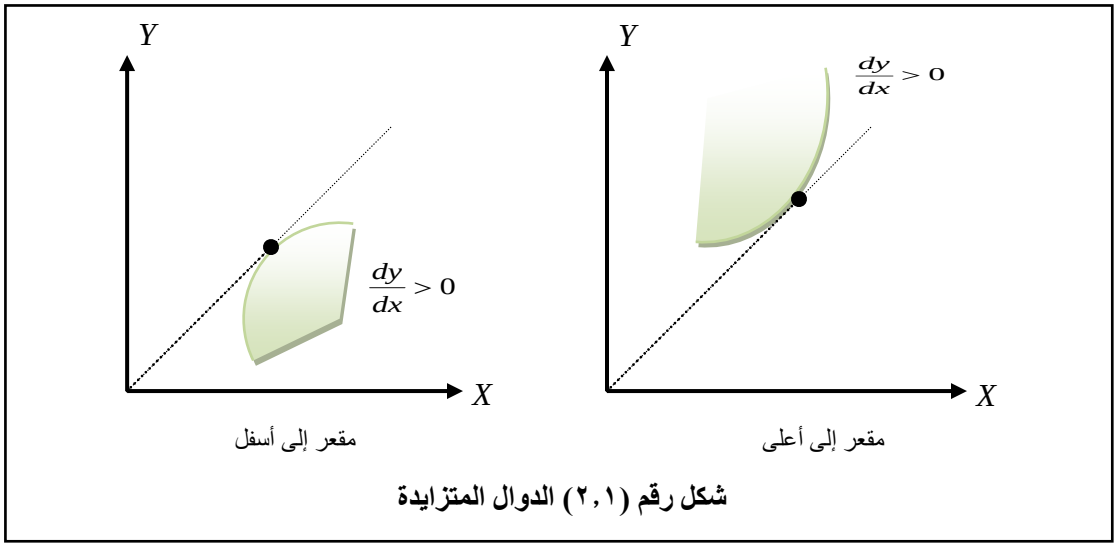
تُعبّر المشتقة الأولى *First Derivatives* $\frac{dy}{dx}$ عن ميل المماس عند النقطة (y, x) على منحنى الدالة $y = f(x)$ ، وأن ميل المماس هو ظل الزاوية التي يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب مع المحور الأفقي $(x's)$.

من المعروف أيضا أن الزاوية إذا كانت صفر فإن ظلها يساوي صفراً، وإذا كانت حادة فإن ظلها موجب (أكبر من الصفر)، وإذا كانت منفرجة فإن ظلها سالب (أصغرمن الصفر).

[٧] لاتستخدم الشروط المستعملة في الطريقتين الثانية والرابعة مع المشتقات التي تزيد رتبتها على الثالثة. وتسمى عملية الحصول على المشتقة الأولى ثم الثانية فالثالثة.... بالتفاضل المتتابع أو المتتالي.

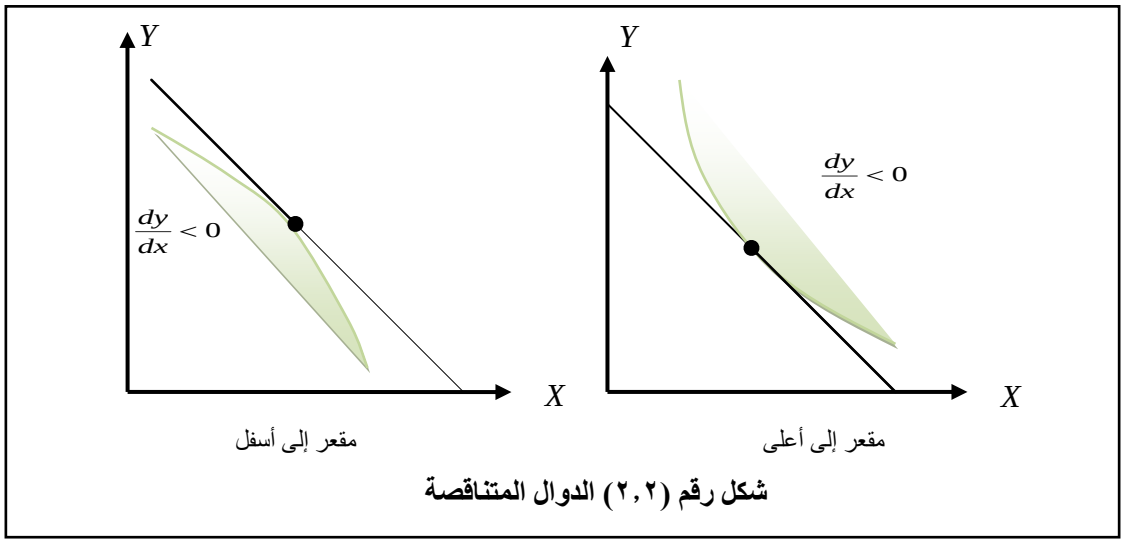
وبناءا على هذه المعلومات نستطيع أن نميز بين هاتين الحالتين:

أولاً: عندما تزيد $y \uparrow$ تبعا لزيادة $x \uparrow$، نجد ان المشتقة الأولى أكبر من الصفر $\frac{dy}{dx} > 0$ ، و هذه الحالة فإن Y متزايدة. والشكل (٢,١) يبين نوعين من الدوال المتزايدة:



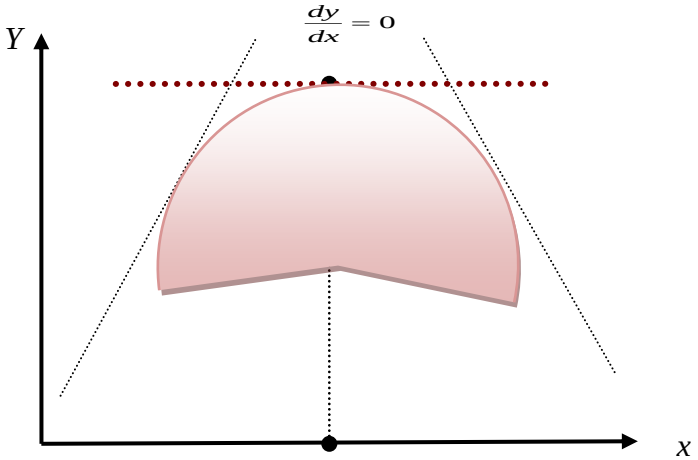
شكل رقم (٢,١) الدوال المتزايدة

ثانيا: عندما تنقص $y \downarrow$ تبعا لزيادة $x \uparrow$ ، نجد أن المشتقة الأولى أقل من الصفر $\frac{dy}{dx} < 0$ ، وفي هذه الحالة فإن Y متناقصة. والشكل (٢,٢) يبين نوعين من الدوال المتناقصة:



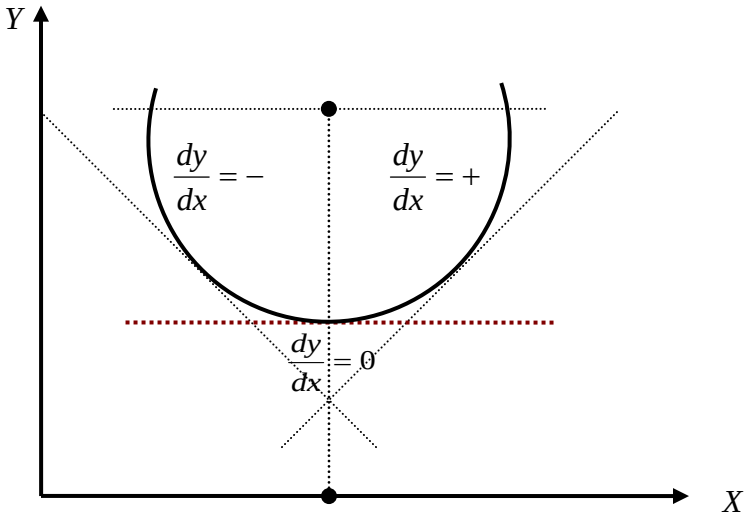
شكل رقم (٢,٢) الدوال المتناقصة

نلاحظ في كلا النوعين من الدوال المتزايدة أن المماس عند أية نقطة على منحنى الدالة يصنع زاوية حادة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات (x)، وفي كلا النوعين من الدوال المتناقصة يصنع المماس عند أية نقطة على منحنى الدالة زاوية منفرجة مع محور السينات. ولكن كثيرا ما يحدث أن تكون الدالة متزايدة أولا ثم متناقصة كما هو في الشكل (٢,٣) التالي:



شكل رقم (٢,٣) القيمة الحرجة

أو متناقصة أولا ثم تصبح متزايدة ثانيا كما في الشكل (٢,٤) التالي:



شكل رقم (٢,٤) القيمة الحرجة

وفي مثل هذه الحالات لا بد أن تتغير قيمة $\frac{dy}{dx}$ من موجبة إلى سالبة أو من سالبة إلى موجبة مارة بالقيمة الحرجة والتي تكون فيها $\frac{dy}{dx}=0$. وعندما تكون $\frac{dy}{dx}=0$ يكون المماس لمنحنى الدالة موازيا لمحور السينات $(x's)$. ويستنتج من الحديث عن قيم $\frac{dy}{dx}$ ومن الشكلين السابقين (٢,٣) و (٢,٤) أنه عندما تبلغ الدالة قيمة عظمى أو صغرى نجد $\frac{dy}{dx}=0$ وأنه عند القيمة العظمى للدالة تتغير علامة المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$ من موجبة إلى سالبة أثناء زيادة قيمة x مارة بالقيمة الحرجة. والمقصود بالقيمة الحرجة قيمة x التي تجعل $\frac{dy}{dx}=0$. أما عند القيمة الصغرى للدالة فإن علامة المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$ تتغير من سالبة إلى موجبة أثناء زيادة x مارة بالقيمة الحرجة.

يمكن التمييز بين النهايات العظمى والصغرى للدوال التي تعترضنا بالطرق التالية:

اولاً: أحصل على المشتقتين الأولى $\frac{dy}{dx}$، والثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$

ثانيا: ضع $\frac{dy}{dx}=0$، وحل المعادلة لتحصل على القيم الحرجة، وغالبا ما تكون عندنا قيمة واحدة حرجة.

ثالثا: إذا كانت $\frac{d^2y}{dx^2}$ سالبة تكون للدالة نهاية عظمى عند القيمة الحرجة. أما إذا كانت $\frac{d^2y}{dx^2}$ موجبة تكون للدالة نهاية صغرى عند القيمة الحرجة.

مع ملاحظة أنه يطلق على نقط النهايات العظمى والصغرى اسم " نقط الرجوع".

كما قد لا تكون للدالة نهاية عظمى أو صغرى عند النقطة التي تكون فيها $\frac{dy}{dx} = 0$ ، ويحدث ذلك عندما تكون $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ، و تسمى هذه نقطة الإنقلاب.

التعظيم والتدنية الغير مقيدة *Unconstrained Maxima & Minima*

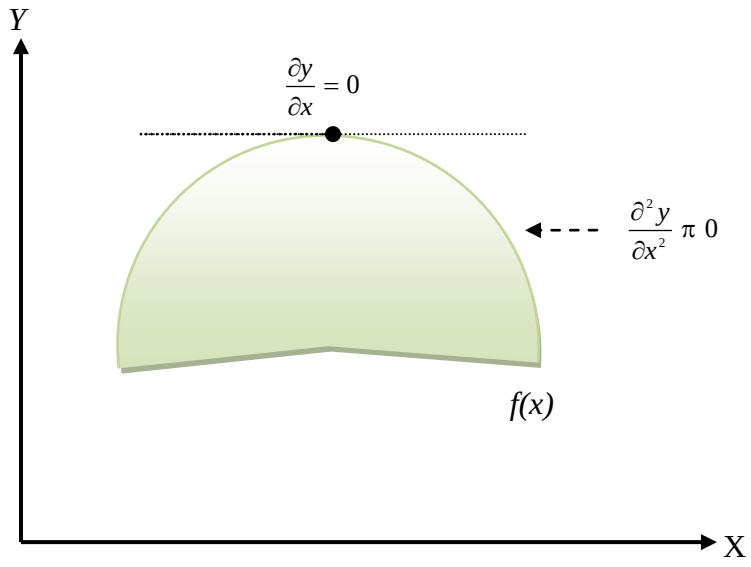
I. **في حالة الدوال ذات المتغير الواحد:** $y = f(x)$

يوجد شرطان للحصول على قيمة المعظمة *Maximization* أو التدنية *Minimization*:

١- **(الشرط الأساسي)** *Necessary Condition*: وفيه يجب أن تكون المشتقة الأولى عند تلك القيمة (حدية) *Stationary* تساوي صفر $\frac{dy}{dx} = f`(x) = 0$

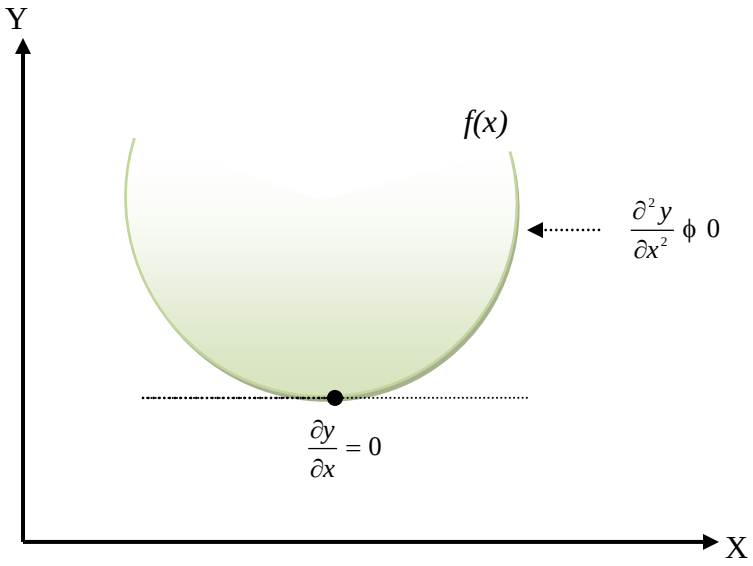
٢- **(الشرط الكافي)** *Sufficient Condition*: وفيه يجب أن تكون المشتقة الثانية:

a. سالبة إذا كانت قيمة Y هي الكبرى: $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) < 0$



شكل رقم (٢,٥) التعظيم والتدنية الغير مقيدة *عندما* *Y* سالبة

b. موجبة إذا كانت قيمة Y هي الصغرى $f``(x) > 0$



شكل رقم (٢،٦) التعظيم والتدنية الغير مقيدة عندما *Y* موجبة

هذا ويسمى الشرط الأول بـــــ: *FIRST ORDER CONDITION (FOC)*

ويسمى الشرط الثاني بـــــ: *SECOND ORDER CONDITION (SOC)*

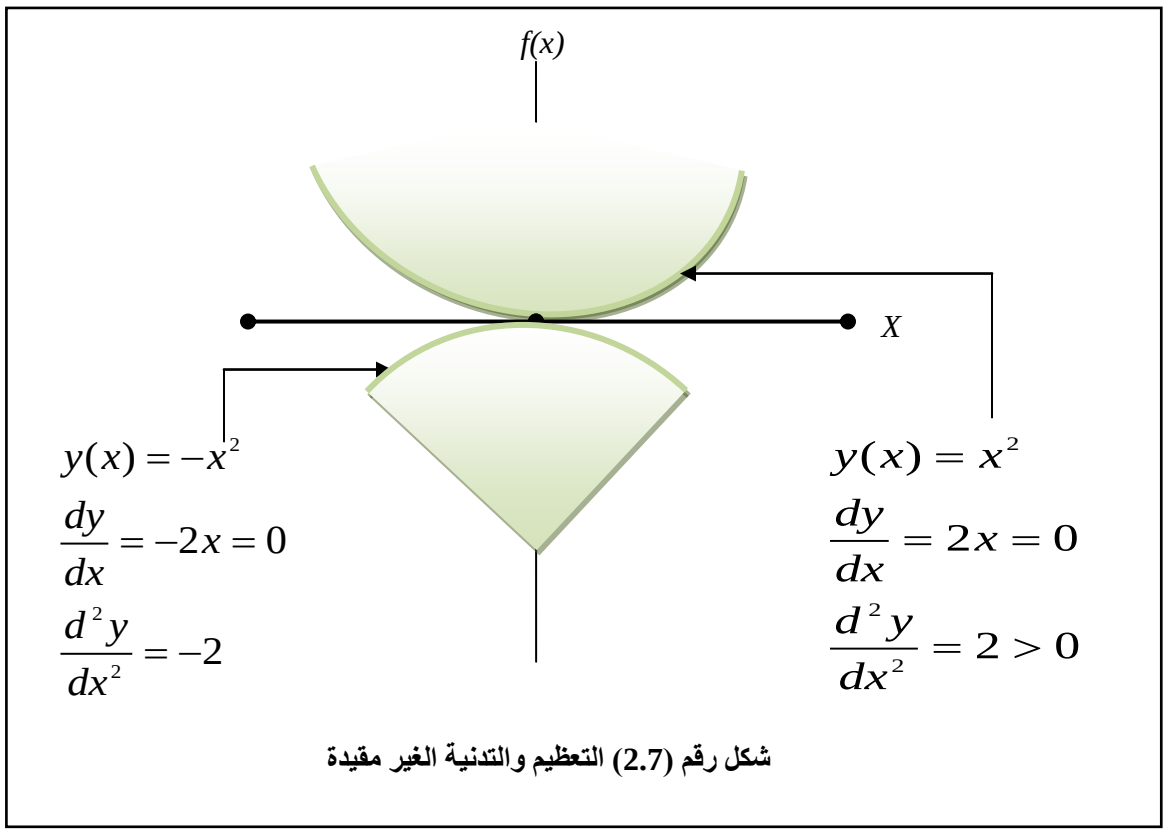
في الجدول التالي يمكن أن نلخص هذه الشروط في الحالة العامة للدوال ذات المتغيرين *Conditions*

$y= f(x_1, x_2)$ for (Extreme) Stationary Value of

جدول رقم (٢،١) الشروط العامة للدوال ذات المتغيرين في حالة التعظيم والتدنية الغير مقيدة

Condition	***Maximum***	***Minimum***
(FOC)First Order Condition *(Necessary Condition)* ((الشرط الأساسي))	$f_1=f_2=0$	$f_1=f_2=0$
(SOC)Second Order Condition *(Sufficient Condition)* (الشرط الكافي)	$f_{11}<0,\ f_{22}<0$ $f_{11}.f_{22} > (f_{12})^2$	$f_{11}>0,\ f_{22}>0$ $f_{11}.f_{22} > (f_{12})^2$

مثال:



شكل رقم (2.7) التعظيم والتدنية الغير مقيدة

٢) الدوال ذات المتغيرات المتعددة:

$y = f(x_1, x_2, \Lambda\ , x_n)$ في هذه الحالة فإن الشروط السابقة تعمم على (n) متغير وليس متغيرين فقط، لذلك يجب إستعمال المصفوفات لكتابة الشرط الكافي(الثاني) *Conditions for (Extreme) Stationary Value of* $y= f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

جدول رقم (2.2) الشروط العامة للدوال ذات أكثر من متغيرين في حالة التعظيم والتدنية الغير مقيدة

Condition	***Maximum***	***Minimum***
(FOC) First Order Condition (Necessary Condition) ((الشرط الأساسي))	$f_1=f_2=\ldots=f_n= 0$	$f_1=f_2=\ldots=f_n= 0$
(SOC) Second Order Condition (Sufficient Condition) (الشرط الكافي)	$\|H_1\|<0, \|H_2\|>0,$ $\|H_3\|<0, \|H_4\|>0, \ldots$	$\|H_1\|>0, \|H_2\|>0,$ $\|H_3\|>0, \|H_4\|>0, \ldots$

ماهي |H| ؟

$|H|$ تسمى محددة هيسيان "*Hessian Determinant*"أو باختصار بسيط فقط فإن هيسيان عبارة عن مصفوفة *Matrix* أفرادها عبارة عن المشتقات الثانية للدالة المعطاة.

مثال:

إفرض أن $y = f(x_1, x_2)$ من هذه الدالة فإن *Hessian* يكتب كالتالي:

$$|H| = \begin{vmatrix} \frac{d^2 f}{dx_1^2} & \frac{d^2 f}{dx_1 dx_2} \\ \frac{d^2 f}{dx_2 dx_1} & \frac{d^2 f}{dx_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} fx_1x_1 & fx_1x_2 \\ fx_2x_1 & fx_2x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

فلو فرضنا أن لدينا n متغير في الدالة أعلاه $Y = f(x_1, x_2, \Lambda\ x_n)$ فإن هيسيان يصبح

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \Lambda & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \Lambda & f_{2n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \Lambda & \mathrm{M} \\ f_{n1} & f_{n2} & \Lambda & f_{nn} \end{vmatrix}$$

من هذا الـ هيسيان يمكن كتابة ال *Principal Minors* للهيسيان اعلاه كالتالي (قارن مع الجدول السابق):

$$|H_1| = |f_{11}|,$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix},$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

مثال:

دالة الربح *Profit Function* نعلم أن الربح = الدخل – التكلفة

Profit = Revenue-Cost

$$\Pi = R - C$$

و حيث أن:

(١) الدخل = المنتج*السعر

$$R = P * Q \qquad (١)$$

(٢) التكلفة = عوامل الإنتاج *أسعارها

$$C = r_1 x + r_2 x_2 + ... \qquad (٢)$$

وباختصار

$$C = C(Q)$$

أي يمكن كتابة التكاليف كدالة متأثرة بالإنتاج، إذا بالتعويض من ١&٢ في معادلة الربح نحصل على:

$$\Pi = P.Q - C(Q)$$

فلو أردنا معظمة *Maximize* الربح ، فما هما الشرطين الضروري و الكافي ؟

Maximize $\Pi = P.Q - C(Q)$

الشرط الأساسي *First Order Condition*

ويتطلب أن تكون المشتقة الأولى صفراً:

$$\frac{d\pi}{dQ} = P - \frac{dC}{dQ} = 0$$
$$= P - MC = 0$$

لتعظيم الربح:

$$P=MC$$

الشرط الكافي *Second Order Condition*

وفيه يجب أن تكون المشتقة الثانية سالبة:

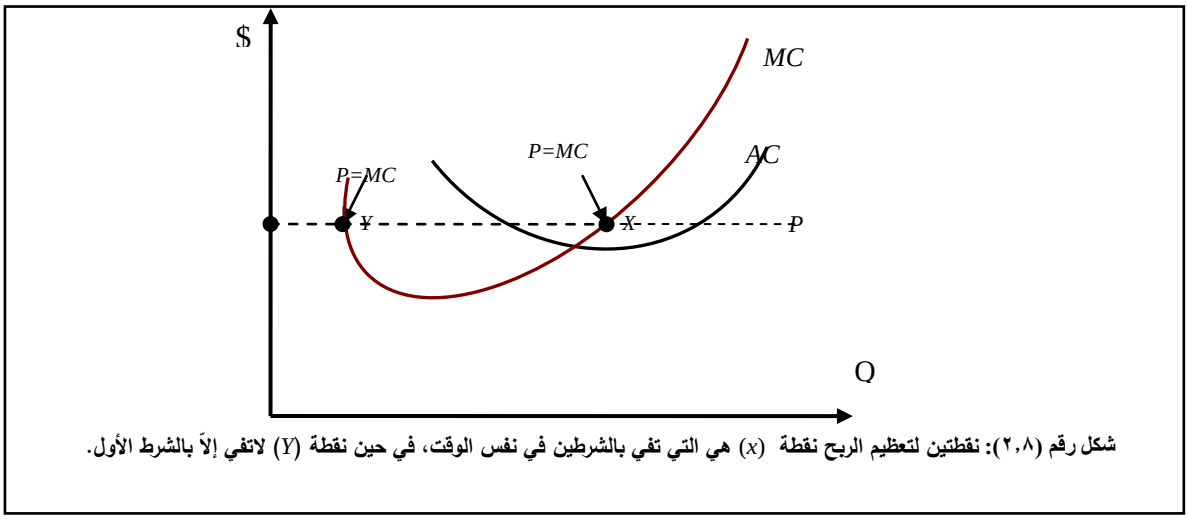
$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = 0 - \frac{d^2C}{dQ^2} < 0$$

$$OR \frac{d(MC)}{dQ} > 0$$

ماذا يعني هذين الشرطين في حالة معظمة الربح؟

١- الشرط الأساسي يجب فيه أن تكون التكاليف الحدية *Marginal Cost(MC)* مساوية للسعر *Price*، فعلى هذا الأساس فإنه يوجد نقطتين وليس نقطة واحدة تتساوى عندها التكاليف الحدية بالسعر وهما x وy. وهذا يعني أن هناك نقطتين لتعظيم الربح. غير أن أحدهما (Y) يكون عندها (*Average Cost (AC)*) أكبر من (MC) وهذا يعني أن هناك خسارة، فما هو الحل؟

٢- الشرط الكافي وفيه يجب أن تكون المشتقة الثانية سالبة لكي نحصل على اكبر ربح ممكن، أو بمعنى آخر يجب أن تكون المشتقة الأولى للتكاليف الحدية $\frac{dMC}{dQ}$ موجبة (متزايدة). من هنا يتضح أنه فقط نقطة (x) هي التي تفي بالشرطين في نفس الوقت، في حين نقطة (Y) لاتفي إلاّ بالشرط الأول وليس الثاني.



شكل رقم (٢،٨): نقطتين لتعظيم الربح نقطة (x) هي التي تفي بالشرطين في نفس الوقت، في حين نقطة (Y) لاتفي إلاّ بالشرط الأول.

التعظيم والتدنية المقيدة *Constrained Maxima &Minima*

في هذا النوع من المسائل تظهر معادلة (أو معادلات) أخرى تقيد قيمة (أو قيم) عوامل الإنتاج (أو غيرها). فالمستهلك مثلاً عادة يعظم دالة منفعته بشرط ألاّ يتجاوز مايصرفه على السلع دخله المحدد، فهنا معادلة الدخل تعتبر المقيد لمعظمة دالة المنفعة.

$$Max \quad U = u(x_1, x_2)$$

Subject to

$$M = P_1 x_1 + P_2 x_2$$

لحل هذا النوع من المسائل يتم الإستعانة بطريقة **لاجرانج** *LAGRANGE MULTIPLIER APPROACH* كالتالى:

$$L = U(x_1, x_2) + \lambda(M - P_1 x_1 - P_2 x_2)$$

لاحظ أنه في التعظيم الغير مقيد (محدود) فإن المعادلة التي نأخذ منها المشتقات هي نفسها المعادلة الأساسية في حين أنه في التعظيم المقيد فإن هذه المعادلة تتغير إلى مايسمى بـ "معادلة لاجرانج" *.LAGRANGIAN FUNCTION*

إذاً فإن الشرطين الأساسي والكافي هما:

(١) الشرط الأساسي *FOC*:

$$\zeta_1 = \frac{d\zeta}{dx_1} = \frac{du}{dx_1} - \lambda P_1 = 0$$

$$\zeta_2 = \frac{d\zeta}{dx_2} = \frac{du}{dx_2} - \lambda P_2 = 0$$

$$\zeta_\lambda = \frac{d\zeta}{d_\lambda} = M - P_1 x_1 - P_2 x_2 = 0$$

(٢) الشرط الكافي *SOC*:

يجب أن نكوّن مايسمى بـ هيسيان المحدود "*Bordered Hessian*" ويرمز له بالرمز $\left|\overline{H}\right|$ ، والتي هي عبارة عن مصفوفة أفرادها المشتقات الثانية من معادلة لاجرانج لكل عامل متغير (x_i) ومضروب لاجرانج "λ".

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{bmatrix} \frac{dl_1}{dx_1} & \frac{dl_1}{dx_2} & \frac{dl_1}{d\lambda} \\ \frac{dl_2}{dx_1} & \frac{dl_2}{dx_2} & \frac{dl_2}{d\lambda} \\ \frac{dl_\lambda}{dx_1} & \frac{dl_\lambda}{dx_2} & \frac{dl_\lambda}{d_\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & \zeta_{1\lambda} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} & \zeta_{2\lambda} \\ \zeta_{\lambda 1} & \zeta_{\lambda 2} & 0 \end{bmatrix}$$

وفيه يجب ملاحظة أن $\frac{\partial \lambda_\lambda}{\partial \lambda_1} = 0$ دائما.

إذاً من *FOC* يمكن كتابة هيسيان المحدود "*Bordered Hessian*" ويرمز له بالرمز $|\overline{H}|$ للمسألة أعلاه (أي تعظيم دالة المنفعة) كالتالي:

$$|\overline{H}| = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & -P_1 \\ U_{21} & U_{22} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{bmatrix} WHERE: U_{IJ} = \frac{\partial MU_i}{\partial x_j}$$

بعد ذلك فإن ال *SOC* ينص على أن يكون ال $|\overline{H}|$ كالتالي:

$$|\overline{H_1}| < 0, \qquad |\overline{H_2}| > 0, \qquad |\overline{H_3}| < 0$$

حيث:

$$|\overline{H_3}| = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & P_1 \\ U_{21} & U_{22} & P_2 \\ P_1 & P_2 & 0 \end{vmatrix} \qquad |\overline{H_2}| = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{vmatrix} \qquad |\overline{H_1}| = |U_{11}|$$

لكي يسهل علينا كتابة جدول شروط التعظيم والتدنية المقيدة سوف نكتب الصيغة العامة للهيسيان المحدد $|\overline{H}|$ في حالة معادلة تقييد واحدة فقط:

Max $\qquad y = f(x_1, x_2, \Lambda\ , x_n)$

ST.

$$g = f(x_1, x_2, \Lambda\ , x_n) = 0$$

Lagrangian Function is:

$$l = f(x_1, x_2, \Lambda\ , x_n) + \lambda[g(x_1, x_2, \Lambda\ , x_n)]$$

FOC

$L_1 = 0, \quad L_2=0 \quad ,\ldots, \quad L_n = 0, \quad L_\lambda = 0$

من الـ *FOC* يمكن كتابة الهيسيان المحود كتالي:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \Lambda & \lambda_{1n} & \lambda_{1\lambda} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \Lambda & \lambda_{2n} & \lambda_{2\lambda} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ \lambda_{\varepsilon 1} & \lambda_{\varepsilon 2} & \Lambda & \lambda_{nn} & \lambda_{n\lambda} \\ \lambda_{\lambda 1} & \lambda_{\lambda 2} & \Lambda & \lambda_{\lambda n} & \lambda_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$$

شـروط الـــنهايات الـمقيدة:

جدول رقم (٣.٢) الشروط العامة للدوال ذات أكثر من متغيرين في حالة التعظيم والتدنية المقيدة

Condition	***Maximum***	***Minimum***
(FOC)First Order Condition (Necessary Condition) (الشرط الأساسي)	$L_1=L_2=\ldots=L_n=L_\lambda=0$	$L_1=L_2=\ldots=L_n=L_\lambda=0$
(SOC)Second Order ondition (Sufficient Condition) (الشرط الكافي)	$\left\|\overline{H}_2\right\|>0, \left\|\overline{H}_3\right\|<0, \left\|\overline{H}_4\right\|>0$	$\left\|\overline{H}_2\right\|<0, \left\|\overline{H}_3\right\|<0, \left\|\overline{H}_4\right\|<0$

العلاقات الموردية الناتجية Factor Product Relationships

يهتم هذا الباب بطبيعة العلاقات *Relationships* بين الموارد الإنتاجية الزراعية (X_1, X_2, Λ, X_n)من حيث سلوكيتها وتأثيرها على حجم الإنتاج، وفي تحليل تلك العلاقة بين المتغيرات المؤثرة في الناتج والناتج ذاتة، مما يقتضي دراسة الدالة بشيء من التفصيل.

وقبل البدء بشرح السلوك الدّالي *Functional Behavior* بين الموارد *Inputs* والإنتاج *Output*، يقتضي الأمر التعرّف على الموارد الإنتاجية أو قياس الإنتاج يمكن ربطه بالوحدات التكنيكية *Technical Units* في المشروع أو الوحدات الإقتصادية *Economic Units*

فالوحدات التكنيكية *Technical Unit*، تعني وحدة ثابتة من الإنتاج يحسب في ضوئها حجم الإيرادات *Revenues* المتأتية منها، والتكاليف المترتبة عليها *Costs* . إلاّ أنه غالباً ما تحتسب ضمن المشروع الواحد في هذا المجال. فمثلاً فإن المشروع يضم مجموعة ثابتة من الوحدات التكنيكية، مثل

مشروع متكامل للألبان أو حقل لإنتاج البيض. وبالتالي فإن كل وحدة تكنيكية يمكن أعتبارها عاملاً ثابتاً.

أما الوحدة الإقتصادية *Economic Unit* فأنها تعني مجموعة الموارد التي يمكن حساب إيراد اقتصادي لها، فالمزرعة قد تكون وحدة إقتصادية وتضم عدة مشاريع، وللمشاريع وحدات تكنيكية متميزة أحداهما في صورة أبقار، والثانية في صورة دواجن والثالثة في صورة وحدات أرضية لمحصول علفي (برسيم)...الخ.

وبالتالي فإن الأمر يقتضي التعرّف على تحليل الوحدات التكنيكية ثم ربط هذا التحليل بالوحدات الاقتصادية.

وفي نظرية الإنتاج *Production Theory* فإن تحديد وحدات أو كميات العوامل الإنتاجية وتكاليفها يعتبر من أهم وظائفها. الشيء الذي يستدعي معرفة الثمن (السعر) *Price* الذي يتقاضاة المنتج أو المزارع عند بيعه المحصول أو الناتج كذلك الثمن الذي يدفعة ذلك المنتج عند شراء عوامل الإنتاج المستعملة.

الدالة الإنتاجية Production Function

يستعمل الإصطلاح دالة *Function* في الرياضيات للدلالة علي علاقة بين المتغيرات المستقلة *Explanatory(Independent) Variables* والمتغير التابع *Dependent Variables* ، ويعني الإنتاج الطبيعي لسلعة أو محصول ما. كما يمكن القول بأنها العلاقة بين كمية مستلزمات الإنتاج وكمية الناتج، أو ما يحدث للناتج عندما نُغيّر كمية عوامل الإنتاج المستعملة. أو هي علاقة طبيعية أو تقنية موجودة بين الإنتاج وواحد أو أكثر من عوامل الإنتاج مع الإفتراض بثبات المعرفة والخبرة الفنية.

إذاً فالدالة الإنتاجية عبارة العلاقة التي ترتبط بين الموارد الإقتصادية المستخدمة في العملية الإنتاجية والناتج الذي تحصل علية من هذه العملية. حيث يستلزم إنتاج أية سلعة إقتصادية إستخدام

العديد من عناصر الإنتاج، فإنتاج القطن مثلاً يتطلب إستخدام الأرض والماء والبذور والأسمدة والعمل وكذلك الإدارة وهكذا.

من المهم جداً فهم نوع العلاقة الموجودة بين عناصر الإنتاج المختلفة وبين مقدار الناتج الممكن الحصول عليه قبل إتخاذ أي قرار إقتصادي يتعلق بالإنتاج، وذلك إذا ما أُريد أن يؤدي إتخاذ مثل هذا القرار إلى تحقيق الهدف من العملية الإنتاجية وهو تحقيق أكبر صافي دخل ممكن أو تعظيم الإنتاج أو تدنية التكاليف.

والدالة الإنتاجية *Production Function* هي التي تبين العلاقة بين المقادير المختلفة من عناصر الإنتاج وبين أكبر قدرمن الإنتاج يمكن الحصول عليه منها، خلال فترة زمنية معينة بغض النظر عن الأسعار السائدة.

بعبارة أخرى فإن الدالة الإنتاجية *Production Function* توضح النسب التي تُمزج بها عوامل الإنتاج لأجل تحويلها إلى ناتج، عليه فإنه يوجد عدد من الدوال يتساوى مع عدد الطرق التي يمكن أن تمزج بها هذه الموارد لتتحول إلى ناتج. ويمكن التعبير عن دالة الإنتاج رياضياً كما يلي:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

حيث:

Y= حجم الإنتاج، $x_1, x_2, \ldots, x_n$ = الوحدات المستخدمة من عناصر الإنتاج المختلفة، f= يوضح نوعية العلاقة الرياضية التي تربط مدخلات الإنتاج $(X's)$ بمخرجات الإنتاج (Y).

لذلك فإن حجم الناتج(Y) يتحدد وفقاً للكميات الموظفة من عناصر الإنتاج$(X's)$. ويمكن أن يتم ذلك باستخدام مجموعات مختلفة من الموارد (بنسب مختلفة)، فالإنتاج يمكن أن يصل إلى أقصاه باستخدام عنصر متغير واحد فقط من عناصر الإنتاج، مع بقاء حجم العناصر الأخرى ثابتاً.

فعلى سبيل المثال يمكن إنتاج الخضروات باستخدام توليفات *Alternatives*(مجموعات) مختلفة من الأرض، العمل، المخصبات، والبذور، ومن المتوقع أن يزيد الإنتاج مع زيادة المخصبات

وإبقاء العوامل الأخرى على ماهي عليه ثابتة دون تغيير إلى أن يصل الإنتاج إلى أقصى مستوى له، وهكذا فإن الدالة يمكن إعادة كتابتها كما يلي:

$$y = f(x_1 \mid \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$$

حيث أن العنصر الوحيد المتغير *Variable* في هذه الدالة هو المخصبات (x_1) وباقي العناصر تعد ثابته *Constant* .

غير أن الدالة قد تحوي أكثر من عنصر متغير واحد وهذا هو السائد، فإذا فرضنا أنه يتم تغذية بقرة معينة بتوليفة ما من العليقة (تتضمن العليقة الخضراء والمركزة والحبوب والنخالة والتبن ...الخ) فإن البقرة في هذه الحالة هي العنصر الثابت وبقية العناصر الإنتاجية تعد متغيرة، فتصبح الدالة كما يلي:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \mid \bar{x}_n)$$

والعنصر الوحيد الثابت في الدالة هو البقرة $\bar{x}_n$.

تصنيف دوال الإنتاج

بما أن دالة الإنتاج *Production Function* تعبّرعن العلاقة الفنية أو التكنولوجية التي تربط بين مدخلات *Inputs* ومخرجات *Output* العملية الإنتاجية، ولذا فإن العلاقة التقنية التي تربط بين خدمات عناصر الإنتاج المستخدمة في العملية الإنتاجية (المدخلات) ومايترتب عليها من منتجات مختلفة كسلع وخدمات (مخرجات) توصف بدالة الإنتاج. ويمكن تعريف دالة الإنتاج بأنها علاقة فنية توضّح أقصى مايمكن إنتاجه أو الحصول عليه من سلع وخدمات باستخدام كمية معينة من عناصر

الإنتاج وذلك عند مستوى معين من التقنية أو التكنولوجيا. ويمكن التعبير عن دالة الإنتاج رياضياً بالصورة التالية:

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

حيث: Y= أقصى كمية من الإنتاج، X_1= الكمية المستخدمة من العنصر الأول، X_n = الكمية المستخدمة من العنصر n. وكما نلاحظ فإن هذه الدالة تربط بين منتج واحد (Y) وعدة عناصر إنتاج، وبالطبع هناك أشكال أخرى من دوال الإنتاج التي يمكن تصورها، فهناك دالة إنتاج تربط بين عدة منتجات وعدة عناصر إنتاج، أو دالة إنتاج تربط بن عنصر إنتاجي واحد ومنتج واحد، وهذه الأخيرة تعتبر أبسط دالة إنتاج يمكن تصورها.

$$y = f(L, C, T)$$

حيث:

y = أقصى حجم من الإنتاج يمكن الحصول عليه (متغير تابع).

$(L.C.T)$ = المدخلات أو الموارد الاقتصادية المستخدمة في العملية الإنتاجية (متغيرات مستقلة)

حيث:

(L) عن كمية العمل المستخدم،

(C) عبارة عن رأس المال،

(T) عبارة عن الكمية المستخدمة من عنصر الأرض.

فالدالة الإنتاجية هذه عبارة عن العلاقة الرياضية والتي تلخص لنا العملية الإنتاجية وتعطينا عند كل قيمة من قيمها مقدار أقصى إنتاج يمكننا الحصول عليه عندما نستخدم كميات محددة من العمل ورأس المال والأرض، وبناءً عليه فإن أي تغيير في الكميات المستخدمة من أحد هذه العناصر أو بعضها أو كلها سوف يترتب عليه تغير في حجم الإنتاج. لذلك يمكن القول أن دالة الإنتاج توضح لنا التوليفات أو المجموعات المختلفة من عناصر الإنتاج وأقصى كمية من الإنتاج يمكن الحصول عليها من هذه المجموعات وذلك بافتراض مستوى معين من التقنية (التقدم الفني والتقني).

وتجدر الإشارة إلى ملاحظتين أساسيتين حول دوال الإنتاج:

الأولى: تتلخص في أنه عندما نتكلم عن دالة إنتاج لسلعة معينة فإننا لانقصد بذلك أن هذه الدالة واحدة لجميع المنشآت ولكننا نفترض أن هذه الدالة لمنشأة مثالية أو نموذجية، ومن ثم ندرس العلاقة بين الكميات المختلفة من عناصر الإنتاج التي تستخدمها هذه المنشأة وأقصى كمية من الإنتاج يمكن الحصول عليها.

الثانية: فتتعلق بثبات المستوى الفني أوإفتراض مستوى معين من التكنولوجيا وهذا يعني أن هناك مستوى معرفة معين بالطرق المتعددة التي يمكن إستخدامها لتحويل عناصر الإنتاج المختلفة إلى سلع وخدمات، ولكن إذا أسقطنا هذا الإفتراض فإنه كلما تحسنت التكنولوجيا أو مستوى التقدم التقني فإن المنشأة يصبح بإمكانها الحصول على ناتج أكبر باستخدام نفس الكمية من عناصر الإنتاج.

وحيث أن الفترات الزمنية التي تواجهها المنشأة تنقسم إلى أجل قصير وأجل طويل *Short &Longe Run Period*، تبعاً لثبات وتغير عناصر الإنتاج خلال الفترة الزمنية، فإنه يمكننا تبعاً لذلك تقسيم دوال الإنتاج إلى دوال إنتاج قصيرة وطويلة المدى، حيث يعتبر هذا التقسيم من الأهمية بمكان لدراسة العلاقة بين الإنتاج وعناصره المختلفة.

ويمكن وصف دالة الإنتاج في المدى القصير *Short-Run Period* بأنها تلك الدالة التي تتضمن عنصراً واحداً ثابتاً أو أكثر من عناصر الإنتاج، وللتبسيط سوف يفترض أن حجم الناتج سوف يتغير كنتيجة لتغير أحد الموارد الإنتاجية المستخدمة فقط مع ثبات باقي الموارد، فإذا فرضنا أننا سوف نقوم بتثبيت كل من رأس المال والأرض مع إعتبار العمل كمتغير فانه يمكن وضع الدالة الإنتاجية في الصيغة كما يأتي:

$$Y = f(L, \overline{C}, \overline{T})$$

وتشير العلامة (-) فوق عنصر الإنتاج إلى كونه ثابتاً، ولايمكن للمنشأة تغييره خلال تلك الفتره الزمنية. أما دالة الإنتاج في الأجل الطويل فيمكن وصفها بتلك الدالة التي يكون فيها جميع عناصر الإنتاج متغيرة، وبالتالي فإن دالة الإنتاج في الأجل الطويل تأخذ الصيغة التالية:

$$Y = f(L, C, T)$$

فروض دالة الإنتاج Production Function Hypothesis

هناك ثلاثة فروض أساسية لأي دالة إنتاج هي:

١ - التأكد التام *Perfect Certainty*

تستخدم نتائج دراسات إقتصاديات الإنتاج عادة في التنبؤ *Prediction* عما سيكون عليه الناتج في المستقبل إذا تم إستخدام نفس توليفة الموارد، حيث أن المزارع يتوقع أن يكون الناتج للعام القادم مساوٍ أو على الأقل قريباً من الناتج هذا العام أو العام السابق إذا إستخدم نفس القدر من الموارد. هذا التوقع غالباً لا يتم تحقيقة في الزراعة التي يعرف عنها بأنها صناعة حيوية معقدة تتدخّل فيها عوامل كثيرة لايمكن التحكم فيها بسهولة. إذ لايستطيع المزارع مثلاً أن يتحكم في الظروف الجوية والحيوية التي تواجه زراعته، حتى وإن كانت التقنية المتقدمة قد قللت من العناصر غير المتحكم فيها إلاّ أنه لازالت هناك بعض العوامل التي لايستطيع المزارع التحكّم فيها مثل عملية التمثيل الضوئي للنبات مثلاً، وهذا من شأنه أن يجعل عملية التأكد من كمية الناتج المتوقعة في الزراعة أمراً مشكوكاً فيه فإذا إستخدم المزارع توليفة الموارد السابقة نفسها فإنه قد لايحصل على كمية الإنتاج نفسها إذ أن هذا ممكن في الناتج الصناعي مثلاً حيث أن الناتج لحظي ساكن *Static Instantaneous* فالناتج من توليفة موارد معينة في لحظة معينة هو نفسه في أي لحظة.

ورغم هذا فإن ظروف التحليل *Analysis* تقتضي فرضية التأكد التام والمعرفة التامة بكافة الظروف التي تواجه المزارع أي أنه على دراية بما سيكون عليه ناتجه عند إضافة وحدات سماد أكثر، كذلك ماسوف تكون عليه أسعار منتجاته وكذلك الكميات التي سيقوم بتسويقها بالإضافة إلى أسعار موارده. مثل هذه الفروض هي مايطلق عليها فروض التأكد التام *Perfect Certainty Assumptions* التي يفترض أن تصاحب العملية الإنتاجية وذلك حتى يمكن تبسيط وشرح دوال الإنتاج.

٢- مستوى التقنية Level of Technology

إن العملية الإنتاجية توضح كما سبق و أشرنا إلى الطريقة التي يتم بها مزج عناصر الإنتاج إذ يوجد العديد من طرق المزج هذه للحصول على الناتج. وبهدف التحليل فإنه يفترض أن المزارع يستخدم أكفأ *Most Efficient* طريقة متاحة لديه للحصول على الناتج أي أنه يحصل على أعلى ناتج من الموارد المتاحة لديه. إن طريقة خلط الموارد أو طريقة الإنتاج عادة ما يطلق عليها مستوى التقنية أو فن الإنتاج *Level of Technology or the State of arts*.

٣- طول الفترة الزمنية Length of Time Period

يفترض عادة أن الناتج المتحصل عليه من توليفة موارد معينة هو ناتج يتم الحصول عليه في فترة زمنية معينة، فإذا طالت الفترة الزمنية عن نظيرتها السابقة فإن الناتج سوف يختلف ومن هذا المنطلق فإنه يمكن تقسيم موارد الإنتاج إلى ثابته *Constant* ومتغيرة *Variable*.

مورد الإنتاج الثابت هو ذلك المورد الذي لا تتغير كميته خلال فترة الإنتاج، بعكس مورد الإنتاج المتغير الذي تتغير كميته سواء بالزيادة أو النقص خلال الفترة الإنتاجية.

إن ثبات الموارد غالباً ما يكون له أسبابه العديدة:

- مدير المزرعة أو المشروع غالباً مايحاول استخدام قدر معين من الموارد دون زيادة أو نقصان للمحافظة على أرباحه لأن أي تغيير في هذه الموارد سوف يغير أرباحه.
- كذلك قد تكون الفترة الإنتاجية من القصر بحيث لايستطيع المزارع أن يغير من كميات الموارد التي في حوزته.
- فقد يرى المزارع أنه من الضروري شراء أرض زراعية أخرى حتى يتمكن من زيادة إنتاجه لإغتنام فرصة الأرباح التي يحققها الناتج الزراعي حالياً إلاّ أنه لايستطيع فعل ذلك في التو واللحظة إما لبعد الأرض الزراعية المعروضة للبيع أو لعدم توفر ثمن هذه الأرض.

- عدم الرغبة من قبل المزارع في تغيير المورد ذاته، فمثلاً عند الرغبة في معرفة أثر العليقة على إنتاج اللبن يغير توليفة العليقة ولكنه لايغير البقرة التي تجرى عليها التجربة وبالتالي فإن البقرة هنا تشكل المورد الثابت. ولكن في المدى الطويل يستطيع المزارع أن يغير الموارد التي في حوزته كافة إذا رغب في ذلك.

وعلى ذلك فإن الموارد الثابته والمتغيرة تستخدم لتمييز طول فترة الإنتاج كالتالي:

- ***المدى القصير جداً Very Short-run***: وهو من القصر بحيث أن كل الموارد ثابته.
- ***المدى القصير Short-run:*** وفيه يمكن تغيير مورد واحد على الأقل وتظل باقي الموارد ثابته.
- ***المدى الطويل Long-run:***وفيه يمكن تغيير كافة الموارد.

غير أن التقسيم السابق رغم إتفاق العديد من الإقتصاديين عليه فإنه يعاني من القصور، فالمزارع دائماً يواجه بمشكلة عدم التحكم في بعض الموارد، وهو بذلك ينتقل من مدى قصير إلى مدى قصير آخر. ولكن تقسيم الموارد وفقاً للنظام السابق كثيراً ما يساعد في فهم طبيعة العملية الإنتاجية ويساعد في التحليل أيضاً.

طرق التعبير عن دالة الإنتاج

ويمكن عادة صياغة الدالة الإنتاجية أما في:

- **جدول حسابي**
- **شكل بياني**
- **صيغة رياضية**

عندما نحصل علي ناتج ما باستعمال عامل واحد من عوامل الإنتاج كالأرض وحدها مثلاً فهذا لايعني أننا إستعملنا عاملاً واحداً فقط وإنما عوامل طبيعية أخرى كالماء والأسمدة الطبيعية....الخ. وقبل استعراض كل من هذه الصيغ الثلاث سوف نفترض تغير أحد الموارد فقط مع ثبات باقي الموارد المستخدمة في العملية الإنتاجية $Y = f(x_1 \mid \bar{x}_2, \Lambda\ \bar{x}_n)$ حتى يمكن تبسيط شرح

العلاقات الموجودة بين الموارد ومنتجات العملية الإنتاجية. ففي الإنتاج الزراعي يكون أي محصول كالقمح يعتمد علي كميات البذور والأسمدة والعمل وغيرها من الموارد الأخرى. إلا أن ذلك يبدو أكثر تعقيداً مقارنة باستخدام مورد إنتاجي واحد.

أولاً: الدالة الإنتاجية في صورة جدول حسابي Schedule Table

يوضح الجدول (٣,١) شكل دالة إنتاجية إفتراضية لنوع معين من العلف عند إستخدامه في تغذية الأبقار مع افتراض ثبات باقي الموارد المستخدمة في التربية.

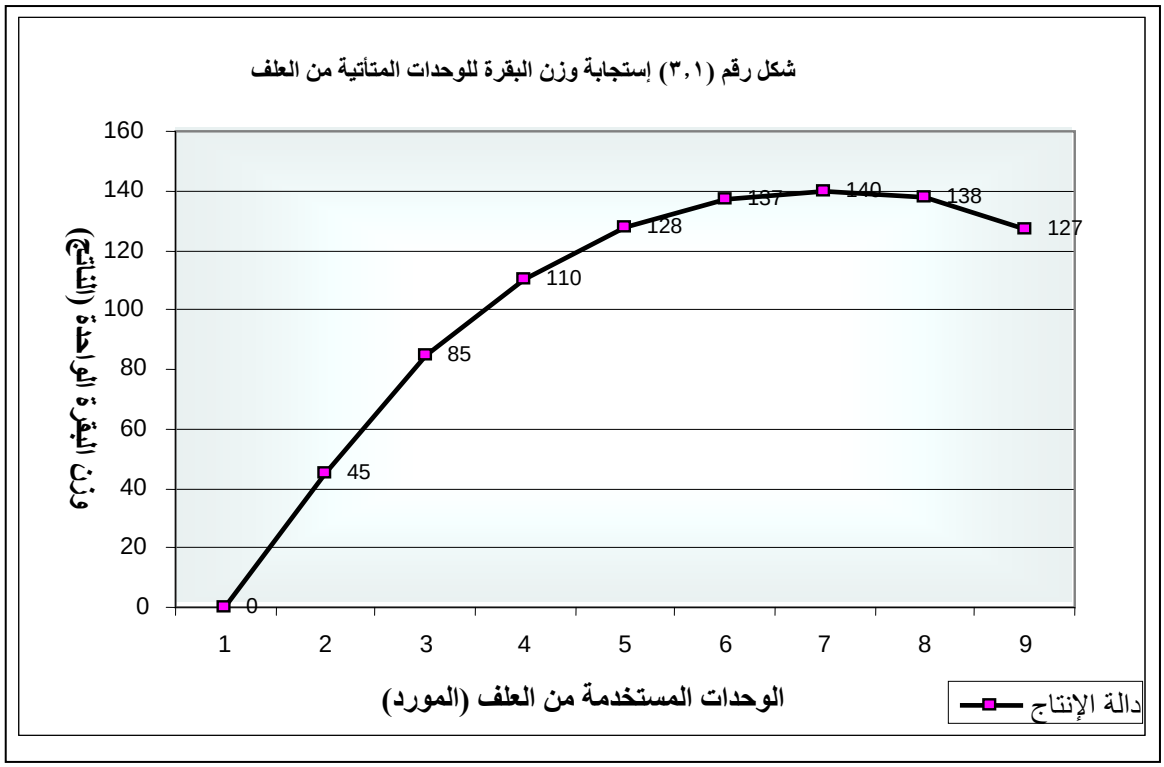
جدول رقم (٣,١) الدالة الإنتاجية لنوع معين من الأعلاف

الوحدات المستخدمة من العلف في وحدة الزمن (X)	وزن البقرة الواحدة في حالة استخدام كميات متزايدة من العلف(كيلوغرام) (Y)
٠	٠
١	٤٥
٢	٨٥
٣	١١٠
٤	١٢٨
٥	١٣٧
٦	١٤٠
٧	١٣٨
٨	١٢٧

يتضح من الجدول أعلاه (٣,١) أن الدالة الإنتاجية عبارة عن العلاقة بين كل من العمود الأول الذي يعبر عن تغير الوحدات المستخدمة من مورد معين (العلف)، والعمود الثاني والذي يعبر عن الوزن الكلي للبقرة الواحدة نتيجة تغير الوحدات المستخدمة في كمية من العلف، وإذا ماتم استخدام وحدة واحدة فقط من العلف فإن وزن البقرة يصبح ٤٥ كغ. وعند استخدام 2,3,4,5,6 وحدة من العلف المستخدم فان متوسط وزن البقرة يزيد إلى ٨٥،١١٠،١٢٨،١٣٧،١٤٠ كغً علي التوالي. وهذه العلاقة الحسابية بين الوحدات المستخدمة من العلف ومتوسط وزن البقرة الناتج هو ما يسمي بالدالة الإنتاجية في شكلها الحسابي.

ثانياً: الدالة الإنتاجية في شكل بياني *Graph*

يمكن التعبير عن الدالة الانتاجية بيانياً في الشكل رقم (٣،١)، والذي تم رسمه علي أساس الجدول(٣،١) الخاص بالدالة الإنتاجية لنوع معين من العلف.



ويوضح الشكل الدالة الإنتاجية للعلف، حيث يوضح المحور الأفقي الوحدات المستخدمة لعنصر الإنتاج المتغير (العلف). بينما يمثل المحور الرأسي متوسط وزن البقرة بالكيلوغرام المقابل لكل مقدار من وحدات العلف المستخدمة في المدة الزمنية وعلي ذلك فان المنحني يمكن اعتباره الشكل البياني اللدالة الانتاجية للعلف الحيواني.

ثالثاً: الدالة الإنتاجية في صيغتها الرياضية Mathematical Form

يمكن التعبير عن الدالة الإنتاجية في صيغتها الرياضية *Mathematical Form* كما يأتي:

$$y = f(l.c.t)$$

حيث (Y) تعبّر عن الناتج الكلي كمتغير تابع، بينما كلاً من($L.C\ .T$) المدخلات أو الموارد الاقتصادية المستخدمة في العملية الإنتاجية كمتغيرات مستقلة *Independent Variables* حيث تعبر (L) عن كمية العمل المستخدم، (C) عبارة عن رأس المال، (T) عبارة عن سعة حظائر التربية. وللتبسيط سوف يفترض أن حجم الناتج(Y) سوف يتغير كنتيجة لتغير أحد الموارد الإنتاجية المستخدمة فقط مع ثبات باقي الموارد. فإذا فرضنا أننا سوف نقوم بتثبيت كل من رأس المال وسعة الحظائر مع اعتبار العمل كمتغير فانه يمكن وضع الدالة الإنتاجية في الصيغة (١) كما يأتي:

$$y = f(l\ |.c.t)$$

وتأخذ عادة الدالة الإنتاجية صيغاً رياضية تتحدد في ضوء متغيرات عديدة ولذلك يجب إجراء عدة إختبارات إقتصادية وإحصائية قبل إختبار الصيغة الرياضية المناسبة للدالة الإنتاجية المطلوب دراستها بمجالات الإنتاج الزراعي المختلفة. وكل الحالات المشار اليها تعني العلاقة نفسها بين الموارد الإنتاجي والمحصول. إلاّ أنه يمكن تمثيلها بصيغ مختلفة وحسب متطلبات الدراسة.

- ففي الدراسات القياسية *Econometrical Studies* غالباً ماتستخدم الدالة في صيغتها الرياضية للتعرف كمياً *Quantitively* علي المتغيرات المستخدمة في الدالة المستخدمة .
- كما تستخدم الأشكال البيانية للدالة في حالة الرغبة في التعرف علي طبيعة العلاقة بين الموارد والمحصول من النظر بصورة مباشرة علي الشكل البياني .
- أما العرض الجدولي للدالة فغالباً ما تستخدم في حصر البيانات لغرض إعدادها للدراسات القياسية.

طبيعة الدالة الإنتاجية Nature of Production Function

تحدد طبيعة الدالة الإنتاجية شكل العلاقة الموجودة بين المورد المتغير (بفرض ثبات الموارد الأخرى) والإنتاج. ويمكن عادة التعبير عن هذه العلاقة أما في صورة إنتاجية ثابتة أو إنتاجية متناقصة أوإنتاجية متزايدة.

أولاً : الإنتاجية الثابتة Fixed (constant) Production

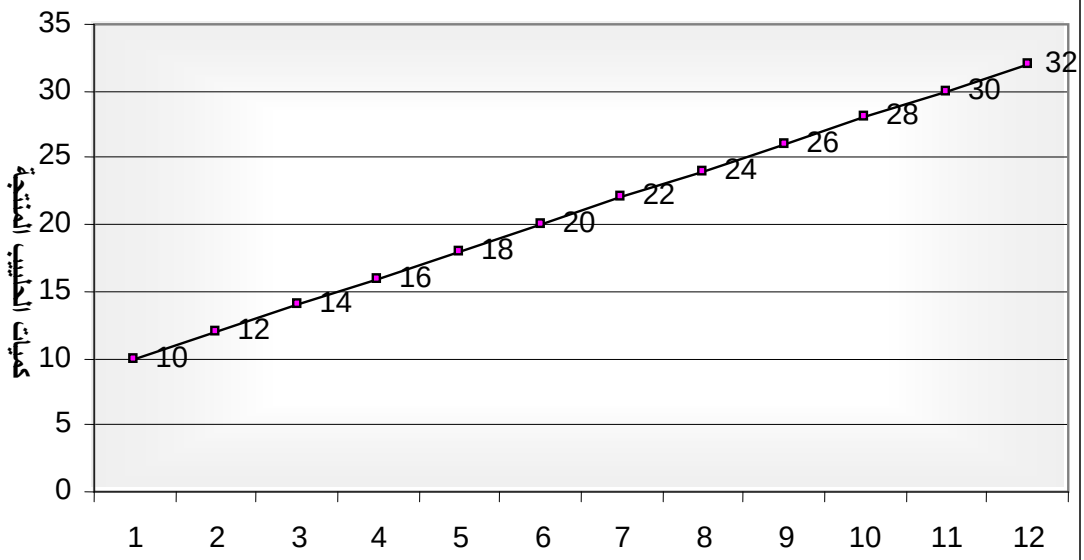
يمكن الحصول علي الإنتاجية الثابتة في حالة ما اذا أدّت الزيادات المتتالية من المورد الإنتاجي المتغير إلي الحصول على زيادات متساوية في الإنتاج بفرض ثبات بقية المتغيرات. وعندئذ تسمي العلاقة بين العنصر المتغير والناتج بأنها علاقة خطية *Linear*. فمثلاً يؤدي إضافة وحدات متتالية من فيتامن معين إلي غذاء حيوانات الحليب بالمقاديرمختلفة للحصول علي كميات مختلفة من الحليب كما في الجدول ٣,٢ التالي.

جدول رقم (٣,٢) الإنتاجية الثابتة

كمية الفيتامين	كميات الحليب
٠	١٠
١	١٢
٢	١٤
٣	١٦
٤	١٨
٥	٢٠
٦	٢٢
٧	٢٤
٨	٢٦
٩	٢٨
١٠	٣٠
١١	٣٢

فعندئذ يمكن القول أن لهذا الفيتامين إنتاجية ثابتة حيث أن كل وحدة مضافة من هذا الفيتامين تؤدي إلي الحصول علي (٢) كغ إضافيين من الحليب ويمكن رسم الدالة الانتاجية كما موضح بالشكل (٣,٢) التالي:

شكل رقم (٣,٢) دالة إنتاج الثابتة



ويوضح الشكل أن العلاقة الموجودة بين المورد المتغير (وحدات الفيتامين المستخدمة في العليقة الحيوانية) والانتاج (الحليب) عبارة عن علاقة خطية. ويمكن توضيح عائد الغلة أو الإنتاجية الثابتة من المثلثات المبينة بالرسم البياني حيث يتضح أن كل زيادة مقدارها وحدة واحدة من الفيتامين تؤدي الي زيادة قدرها وحدتين من الحليب في أي مستوي من المستويات الدالة.

- الدالة الإنتاجية بصورتها الثابتة لا توجد في الزراعة إلاّ نادراً، أذ غالباً ما تسود الأشكال الأخرى من الدوال في القطاع الزراعي والتي سنتناولها بالشرح.

ثانياً : الإنتاجية المتناقصة Decreasing Production

تتحقق الإنتاجية المتناقصة للمورد الإنتاجي المتغير في حالة ما إذا أدت الزيادات المتتالية من هذا المورد الانتاجي إلى الحصول علي زيادات متناقصة في الناتج، كما في الجدول(٣,٣)

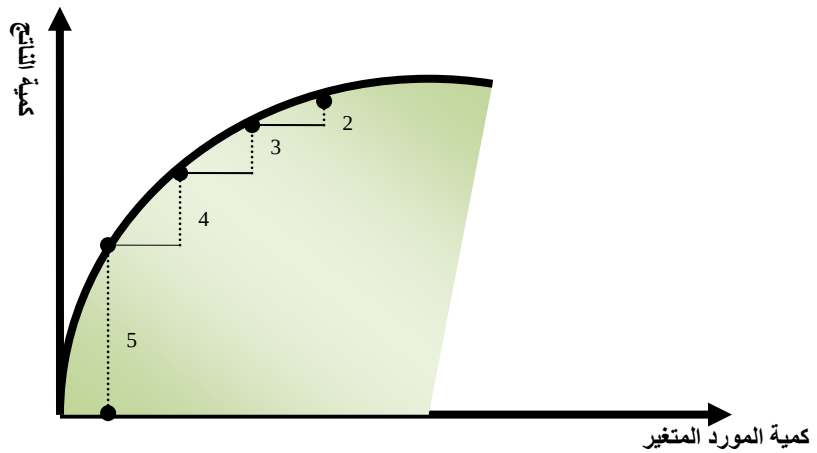
جدول رقم (٣,٣) الإنتاجية المتناقصة

المورد (X)	الناتج (Y)
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1

فمثلاً تؤدي الوحدة الأولي من المورد إلى زيادة الناتج بمقدار (٥) وحدات. بينما تؤدي الوحدة الثانية من هذا المورد الي زيادة الناتج بقدار (٤) وحدات. كما تؤدي الوحدات الثالثة والرابعة والخامسة إلى تناقص الناتج بمقدار (١،٢،٣) وحدة علي التوالي. ويوضح الشكل التالي العلاقة الموجودة بين المورد المتغير والناتج في حالة تحقق الإنتاجية المتناقصة للمورد المتغير.

ويتضح من هذاالشكل أن الدالة الإنتاجية ليست علي شكل خط مستقيم كنتيجة لزيادات الناتج المتناقصة. ولكنها تأخذ شكل منحني مقعر ناحية نقطة الأصل أو المحور الأفقي.

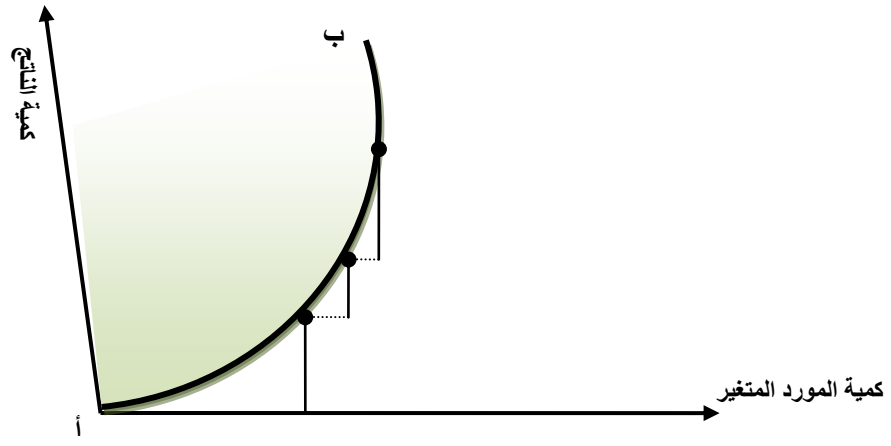
وهذا النمط من الدوال غالباً ما يسود الانتاج الزراعي. إذّ بإضافة وحدات متتالية من السماد فأن الناتج يزداد، إلاّ أنه عند مستوي معين فإن الإضافات المتتالية من السماد تؤدي إلى عوائد متناقصة في المحصول المنتج كالقطن مثلاً.



شكل رقم (٣,٣) دالة إنتاجية ذات عائد أو إنتاجية متناقصة

ثالثاً: الإنتاجية المتزايدة Increasing Production

تتحقق الإنتاجية المتزايدة للمورد الإنتاجي المتغير في حالة ما إذا أدت الزيادات المتتالية من هذا المورد إلى الحصول على زيادات متزايدة من الناتج. وفي الشكل (٣,٤) يوضح المنحني (أ , ب) دالة إنتاجية ذات عائد أو إنتاجية متزايدة. إن الدالة الإنتاجية ذات العائد المتزايد تكون محدبة ناحية نقطة الأصل أو المحور الأفقي.وتوضح المثلثات الموضحة بالشكل طبيعة الإنتاجية المتزايدة حيث تؤدي الوحدة الأولي من المورد الإنتاجي المتغير إلى زيادة وحدتين من الناتج. بينما تؤدي إضافة الوحدة الثانية من المورد المتغير إلى زيادة الناتج بمقدار أربع وحدات كما تؤدي إضافة كل من الوحدات المتتالية بعد ذلك الي زيادة وحدات الناتج بمقادير حيث تؤدي الوحدة الثالثة من المورد إلى زيادة الناتج بمقدار (٦) وحدات. وتؤدي إضافة الوحدة الرابعة من المورد إلي زيادة الناتج بمقدار (٨) وحدات وهكذا .



شكل رقم (٣,٤) دالة الإنتاجية ذات عائد أو إنتاجية متزايدة

نظرية الإنتاج Production Theory

تمهيد

عند دراسة وتحليل نظرية المستهلك ونظرية المنتج نجدهما متشابهين من حيث دراسة سلوك كل من المنتج والمستهلك في مجموعة من النقاط منها.

(١) تشابه المستهلك والمنتج من حيث رغبة كل منهما في تحقيق أقصى إشباع ممكن فالمستهلك يعمل على تعظيم مقدار ما يحصل عليه من منفعة لقاء استهلاكه للسلع والخدمات بينما يعمل المنتج على تعظيم مقدار ما يحصل عليه من صافي دخل لقاء استخدامه لعوامل الإنتاج في إنتاج السلع والخدمات التي يقوم بإنتاجها.

(٢) تشابه المستهلك والمنتج في أن كل منهما يعمل في ظل دالة معينة فالمستهلك يعمل في ظل دالة المنفعة بينما يعمل المنتج في ظل دالة الإنتاج.

(٣) تشابه المستهلك والمنتج في أن كل منهما يعمل على شراء السلع والخدمات فالمستهلك يشتري السلع والخدمات لإشباع رغباته بينما يعمل المنتج على شراء العناصر الإنتاجية لغرض إنتاج السلع والخدمات.

(٤) يتشابه المستهلك والمنتج في أن معادلة الميزانية للمستهلك دالة خطية لكمية السلع والخدمات التي يحصل عليها بينما معادلة التكاليف للمنتج دالة خطية لكمية عوامل الإنتاج التي يقوم بشرائها.

وبالرغم من وجود تشابه بين نظرية المنتج والمستهلك من حيث سلوك كل من المنتج والمستهلك فإننا نجد هناك خلافا واضحاً بين النظريتين

I. دالة المنفعة لا يمكن قياسها بينما دالة الإنتاج يمكن قياسها.

II. المستهلك يعمل على تعظيم إشباعه في ظل قدر معين من الدخل بينما يعمل المنتج على تعظيم دخله في ظل التكاليف المتغيرة الممثلة لقيم العناصر الإنتاجية التي يتغير حجمها بتغير مقدار الإنتاج.

وسوف يتناول هذا الجزء دراسة مفهوم الدالة الإنتاجية والمنحنيات الإنتاجية متعرضين إلى قانون تناقص الغلة وفرضياته ومدى واقعيته شارحين مفهوم المرونات الإنتاجية ومنحنيات الناتج المتساوي، والأشكال الرياضية للدالات الإنتاجية مركزين على الدالة الأسية والدالة الآنية ودالة سبلمان لأهميتها في التحليل الاقتصادي لسلوك المنتج.

وقد تناولنا أيضا كيفية تحقيق الجدارة الاقتصادية في استخدام الموارد وذلك من خلال الحصول على أقصى قدر من الإنتاج بقدر معين من الموارد أو الحصول على قدر معين من الإنتاج بأقل قدر من الموارد، ومن ثم الحصول على أقصى ربح ممكن، ثم دراسة كيفية تحقيق الجدارة الاقتصادية لمنتج يستخدم مورد إنتاجي واحد في إنتاج ناتجين أي إنتاج ما يسمى بالأنتجة المشتركة.

ونظراً لما تعتمد عليه نظرية الإنتاج التقليدية من فرضية إمكانية تجزئة الموارد الإنتاجية المستخدمة في عملية الإنتاج وكذلك إمكانية تجزئة الناتج النهائي ومن ثم فإن دالتي الإنتاج والتكاليف استناداً إلى هذه النظرية دالتين متصلتين. ونظراً لأنه كثيراً ما يستخدم المنتج في الحياة الواقعية موارد إنتاجية غير قابلة للتجزئة فقد تطرق المؤلفان إلى نظرية الإنتاج المعدلة والتي تستند أساساً إلى إمكانية عدم تجزئة الموارد الإنتاجية المستخدمة في عملية الإنتاج وبصورة مبسطة. هذا بالإضافة إلى التكاليف الإنتاجية مركزا على دالات التكاليف في الفترة القصيرة وكذلك في الفترة الطويلة والعلاقة بين منحنيات الإنتاج ومنحنيات التكاليف من ناحية ومنحنيات التكاليف ومنحنيات العرض السلعي من ناحية أخرى وذلك من خلال كيفية اشتقاق دالة عرض السلعة لمنتج معين من دالات تكلفتها لهذا المنتج.

كما تضمن هذا الجزء العوامل المؤثرة على التكاليف الإنتاجية مركزا على تباين التكاليف بتباين الإيجار للموارد الأرضية وكذلك بتباين موقع الوحدات الإنتاجية. كما تطرق أيضاً إلى النظرية الحديثة للتكاليف الإنتاجية في الفترة القصيرة وفي الفترة الطويلة وكذلك الفروق الجوهرية بين نظريتي التكاليف التقليدية والحديثة.

الدالة الإنتاجية Production Function

تمهيد: تعني الدالة الإنتاجية العلاقة بين القدر من عوامل الإنتاج المستخدمة في إنتاج سلعة معينة والقدر من الناتج المتحصل عليه من هذه السلعة لكل وحدة زمنية بغض النظر عن أسعار عوامل الإنتاج والناتج. أي أن دالة الإنتاج هي عبارة عن العلاقة بين المعاملات الموردية أي المقادير المستخدمة من عوامل الإنتاج في إنتاج سلعة معينة والمعاملات الناتجية أي مقدار الناتج من هذه السلعة. ويمكن التعبير عن دالة الإنتاج رياضيا بالمعادلة (١) حيث:

$$Y = d(x_1, x_2)$$

حيث تمثل هذه الدالة الإنتاجية لمنتج معين يستخدم المورد الإنتاجي x_1 والمورد x_2 في إنتاج السلعة Y. وتمثل هذه الدالة العلاقة بين المقادير المستخدمة من الموردين الإنتاجين x_1 ، x_2 والمقادير المنتجة من سلعة y . أي أن هذه المعادلة تدل على أن الكمية المنتجة من السلعة كدالة للمقادير المستخدمة من الموردين الإنتاجين x_1 ، x_2 وهذا يعني أن القدر المنتج من السلعة يمثل المتغير التابع بينما المقادير المستخدمة من x_1 ، x_2 تمثل المتغيرات المستقلة.

ونفترض في هذا المجال أن هذه الدالة الإنتاجية دالة متصلة وبذلك فإنه يمكن الحصول على التفاضل الأول والتفاضل الثاني لها. ويمكن القول أن المقادير الموجبة فقط من الإنتاج والموارد الإنتاجية هي التي تدخل في نطاق الدالة الإنتاجية حيث أن المقادير السالبة ليست لها قيمة في التحليل الإنتاجي. ويستهدف التحليل الإنتاجي الذي تتضمنه النظرية الإنتاجية اختيار أفضل توليفة من الموارد الإنتاجية والتي يمكن استخدامها في تحقيق أكبر قدر ممكن من الإنتاج بقدر معين من الموارد أو قدر معين من الإنتاج بأقل قدر من الموارد.

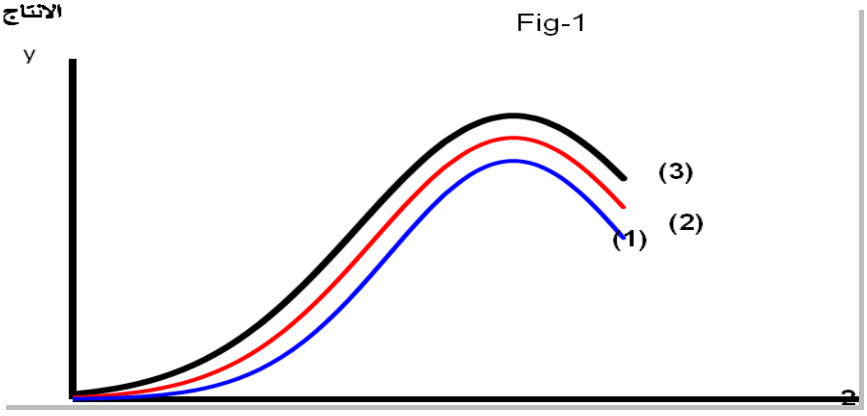
المنحنيات الإنتاجية

يمثل المنحنى الإنتاجي العلاقة بين القدر المستخدم من مورد معين في إنتاج سلعة معينة والقدر الناتج من هذه السلعة مع ثبات بقية الموارد الإنتاجية الأخرى وتبين المعادلة (٢-٢) العلاقة بين الكمية الناتجة من السلعة والقدر المستخدم من المورد الإنتاجي x_1 مع ثبات المستخدم من المورد الإنتاجي x_2.

$$Y = (x_1, x_2^{o}) \qquad (2-2)$$

ويمثل شكل (١-٢) مجموعة من المنحنيات الإنتاجية التي تبين العلاقة بين القدر الناتج من السلعة y والمستويات المختلفة من المورد الإنتاجي x_1 ثبات القدر المستخدم من x_2 . وتبين المنحنيات الإنتاجية (١) و (٢) و(٣) العلاقة بين الكمية المنتجة من السلعة y والمورد الإنتاجي x_1 عند المستويات المختلفة للمورد الإنتاجي x_2. فالمنحنى الإنتاجي (١) يبين العلاقة بين الكمية المنتجة من السلعة Q والمورد الإنتاجي x_1 عند استخدام المستوى (١) من المورد الإنتاجي x_2 بينما يمثل المنحنى الإنتاجي (٢) العلاقة بين الكمية المنتجة من السلعة والمورد الإنتاجي x_1عند استخدام المستوى (٢) من المورد الإنتاجي x_2 وهكذا أي أن: $x_{12} < x_{22} < x_{32}$

وتمثل هذه المنحنيات الإنتاجية أي منحنيات الناتج الكلي كما قيل من قبل العلاقة بين الكمية المنتجة من السلعة والقدر المستخدم من الموارد الإنتاجية.



شكل (١-٢)

أما منحنيات الناتج المتوسط فتبين متوسط الإنتاجية أي إنتاجية الوحدة من المورد الإنتاجي. وهي عبارة عن الإنتاج الكلي مقسوما على عدد الوحدات المستخدمة من العنصر المتغير. أما منحنيات الناتج الحدي فتبين إنتاجية الوحدة الإضافية أي مقدار الزيادة في الناتج الكلي لقاء زيادة المقدار المستخدم من المورد الإنتاجي بمقدار وحدة واحدة لكل وحدة زمنية. وتبين المعادلة (2-3) الناتج المتوسط للمورد الإنتاجي x_1.

نفترض أن الصورة الرياضية $y = \partial(x_1, x_2)$ تمثل دالة إنتاج سلعة معينة. وبقسمة الإنتاج الكلي من هذه السلعة على عدد الوحدات المستخدمة من المورد الإنتاجي x_1 يمكن الحصول على الناتج المتوسط أي إنتاج الوحدة من المورد الإنتاجي x_1.

$$\frac{Y}{x_1} = \frac{\partial(x_1, x_2^0)}{x_1} \qquad (2-3)$$

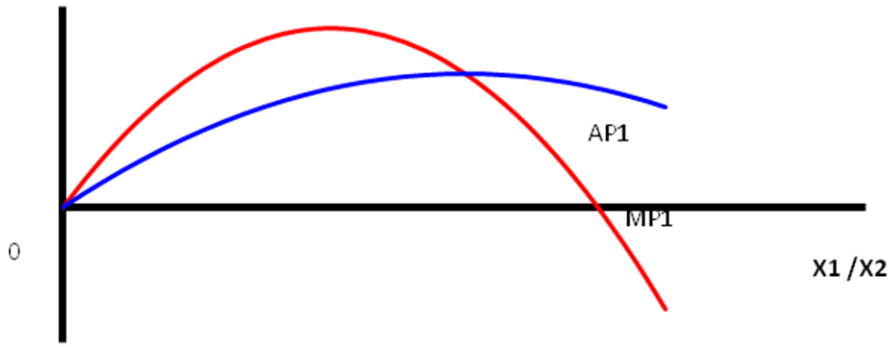
ويمكن احتساب مقدار الناتج الحدي للمورد الإنتاجي x_1 وهو عبارة عن مقدار الزيادة في الناتج الكلي Y نتيجة زيادة القدر المستخدم من المورد الإنتاجي x_1 بمقدار وحدة واحدة وذلك بالحصول على التفاضل الأول للدالة الإنتاجية (2-1) بالنسبة للمورد الإنتاجي x_1 حيث:

$$y = \partial(x_1, x_2)$$

فإن:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \partial_1(x_1, x_2^{\,o}) \qquad (2-4)$$

أي أن الإنتاج الحدي للمورد الإنتاجي $x_1 = \partial_1(x_1, x_2)$ وتمثل ∂_1 التفاضل الأول للدالة الإنتاجية بالنسبة لـ x_1.



ويبين الشكل (٢-٢) منحنى الناتج الحدي ومنحنى الناتج المتوسط للمورد الإنتاجي x_1 حيث يبين أن كل من الناتج المتوسط والناتج الحدي للمورد الإنتاجي يأخذ في الزيادة بزيادة عدد الوحدات المستخدمة من المورد الإنتاجي x_1 إلى حد معين ثم بزيادة عدد الوحدات المستخدمة من هذا المورد فإن الناتج الحدي والناتج المتوسط يأخذا في الانخفاض.

ويبين الشكل (٢-٢) أيضاً أن منحنى الناتج الحدي يقطع منحنى الناتج المتوسط في أعلى نقطة فيه. وهذا يعني أن الناتج الحدي يصل إلى أقصى ما يمكن عند قدر أقل من الوحدات من المورد الإنتاجي عن القدر من هذا المورد الذي يؤدي إلى معظمه الناتج المتوسط.

ويمكن إثبات ذلك كما يلي:

في ظل افتراض أن الدالة الإنتاجية هي:

$$Y = \partial(x_1, x_2^{\,0})$$

دالة الناتج المتوسط هي:

$$\frac{Y}{x_1} = \frac{\partial(x_1, x_2^{\,0})}{x_1} \qquad (2-5)$$

وباحتساب التفاضل الأول للدالة (5-2) فإن:

$$\frac{\partial \frac{Y}{x_1}}{\partial x_1} = \frac{x_1 \partial_1(x_1, x_2^0) - \partial(x_1, x_2^0)}{x_1^2}$$

وبمساواة التفاضل الأول بالصفر يتحقق الشرط الأول من شروط معظمة الدالة.

$$\frac{x_1 \partial_1(x_1, x_2{}^0) - \partial(x_1, x_2{}^0)}{x_1{}^2} = 0$$

$$\therefore \partial(x_1, x_2{}^0) = x_1 \partial_1(x_1, x_2{}^0) \qquad .(2-6)$$

$$\frac{\partial(x_1, x_2{}^0)}{x_1} = \partial_1(x_1, x_2{}^0)$$

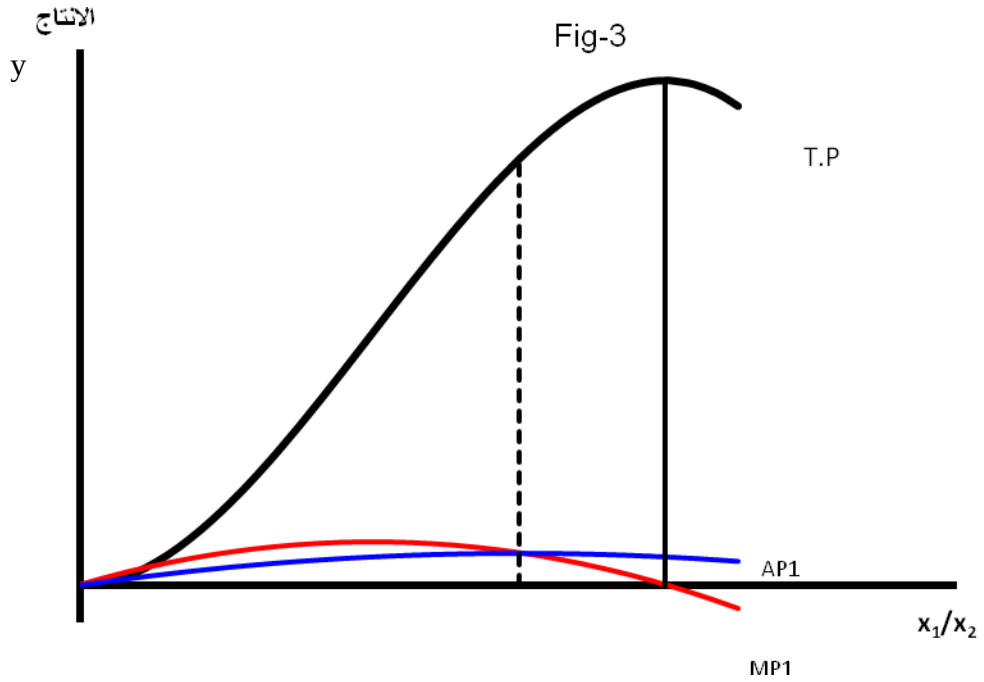
أي أن الناتج المتوسط = الناتج الحدي عند أعلى نقطة في منحنى الناتج المتوسط شكل(٢-٢).

وهنا يمكن القول أنه بعد استعراض المنحنيات الإنتاجية الكلية والمتوسطة والحدية يمكن الانتقال إلى قانون تناقص الغلة وهو القانون الذي يبين العلاقة بين المقادير المستخدمة من المورد الإنتاجي المتغير x_1 والمقادير الناتجة من السلعة y.

قانون تناقص الغلة The Law Of Diminishing Returns

يبين قانون الغلة المتناقصة التغيرات التي تطرأ على الناتج الكلي من سلعة معينة لقاء تغير المقادير المستخدمة من مورد إنتاجي واحد مع بقاء المقادير المستخدمة من الموارد الإنتاجية الأخرى دون تغير. ويقرر هذا القانون أنه كلما زاد المنتج المقادير المستخدمة من أحد الموارد الإنتاجية مع بقاء المقادير المستخدمة من الموارد الأخرى ثابتة فإن الإضافة إلى الناتج الكلي الناشئة عن إضافة وحدة واحدة من العنصر المتغير تتزايد في البداية ثم تثبت ثم تتناقص. ويبين جدول (١-٢) الناتج الكلي والناتج الحدي والناتج المتوسط من سلعة معينة (القمح مثلا) عند إضافة وحدات متتالية من أحد الموارد الإنتاجية (العمل) مع بقاء المقادير المستخدمة من الموارد الأخرى ثابتة. كما يبين شكل (٣-٢) منحنى الناتج الكلي والناتج الحدي والناتج المتوسط الممثل بالجدول (2-1).

ويبين هذا الشكل أن الناتج الكلي يتزايد بتزايد عدد الوحدات المستخدمة من مورد العمل حتى يصل إلى العامل العاشر وباستخدام العامل الحادي عشر يأخذ الناتج الكلي في التناقص.



شكل(٣-٢)

جدول (١-2) مقادير الناتج الكلي والناتج الحدي والناتج المتوسط لمورد العمل

المورد الإنتاجي الثابت الأرض	المورد الإنتاجي المتغير العمل	الناتج الكلي	الناتج المتوسط	الناتج الحدي
١	١	٢	٢	٢
١	٢	٦	٣	٤
١	٣	١٢	٤	٦
١	٤	٢٠	٥	٨
١	٥	٢٩	٥,٨	٩
١	٦	٣٧	٦,٢	٨
١	٧	٤٣,٣	٦,٣	٦,٣
١	٨	٤٩	٦,١	٥,٧
١	٩	٥٣	٥,٨	٣
١	١٠	٥٣	٥,٣	0
١	١١	٥٢	٤,٧	-1
١	١٢	٤٩	٤,١	-3

أما الناتج المتوسط فيأخذ في الزيادة بتزايد عدد الوحدات المستخدمة من مورد العمل حتى نصل إلى العامل السابع حيث يأخذ الناتج المتوسط في التناقص أما الناتج الحدي فيأخذ في الزيادة بتزايد عدد الوحدات المستخدمة من مورد العمل حتى نصل إلى العامل الخامس حيث يأخذ الناتج الحدي في التناقص. ومن هذا الشكل يتبين أيضاً أن الناتج الحدي يصل إلى أعلى نقطة فيه قبل منحنى الناتج المتوسط كما أن الناتج الحدي يقطع الناتج المتوسط في أعلى نقطة فيه وقد أمكن إثبات ذلك رياضياً. وهذا يعني أن تغير الغلة أو الناتج بزيادة وحدات المورد المتغير من موارد الإنتاج تمر بثلاث مراحل (١) المرحلة الأولى وهي المرحلة التي يتزايد فيها الناتج الكلي بنسبة متزايدة أي يتزايد فيها الناتج الحدي والمتوسط (٢) المرحلة الثانية وهي المرحلة التي يتزايد فيها الناتج الكلي بنسبة متناقصة أي التي يتناقص فيها الناتج الحدي والناتج المتوسط (٣) المرحلة الثالثة وهي المرحلة التي يتناقص فيها الناتج الكلي . ويتبين من الرسم أيضاً أن النقطة التي يصل فيها منحنى الناتج الكلي إلى أعلى نقطة فيه فإن الناتج الحدي يساوي صفراً نظراً لأن التفاضل الأول لدالة الإنتاج الكلي هو الناتج الحدي ولما كانت دالة الإنتاج الكلي تصل إلى أعلى نقطة فيها عند النقطة التي يكون فيها تفاضلها الأول يساوي صفر أي عندها يكون الناتج الحدي يساوي صفر.

ويمكن القول أن المرحلة الثانية هي المرحلة الرشيدة للإنتاج وتتحدد أحسن توليفة من المورد الإنتاجي (الأرض) والمورد الإنتاجي المتغير (العمل) عند النقطة التي يتساوى فيها قيمة الإنتاج الحدي للمورد الإنتاجي المتغير مع سعر هذا المورد.

ويعزي تزايد الغلة وتناقصها كما ذكر سابقاً إلى أن تعاون الموارد الإنتاجية في العملية الإنتاجية يكون أكفأ ما يكون إذا ما تم خلط أي مزج تلك الموارد بنسبة معينة فالذي يحدث عند بداية زيادة العنصر المتغير أن القدر من المورد الثابت الذي يتعاون معه المورد المتغير يكون أكثر مما يلزم لتحقيق نسبة أكثر كفاءة ممكنة للخلط بين الموردين. وكلما قربت نسبة الخلط بينهما من النسبة الأكثر كفاءة وذلك بزيادة المورد المتغير كلما زادت الإنتاجية. إلى أن تزيد نسبة الخلط بين الموردين عن النسبة الأكثر كفاءة تبدأ تلك الإنتاجية في الانخفاض.

وينطبق قانون تناقص الغلة على الإنتاج الزراعي ففي ظل ثبات الموارد الأرضية الاقتصادية وبزيادة الطلب على السلع الغذائية الزراعية يزداد تكثيف العمل الزراعي ورأس المال في ظل ثبات الموارد الأرضية مما يؤدي إلى زيادة الإنتاج الزراعي وفقا لقانون تناقص الغلة بنسبة متزايدة ثم بنسبة متناقصة ثم يثبت ثم يتناقص وكما ينطبق قانون تناقص الغلة على الإنتاج الزراعي فإنه ينطبق على الإنتاج التعديني فعند زيادة القدر المستخدم من العمل في استخراج المعادن زيادة مستمرة فإن متوسط الإنتاجية سوف تتجه اتجاهاً تصاعدياً لفترة معينة بعدها تأخذ هذه الإنتاجية في الهبوط نظرا لزيادة عمق المناجم مما يؤدي إلى زيادة الفقد الرأسمالي والبشري وبالتالي تناقص الإنتاجية بعد حد معين لتكثيف رأس المال والموارد البشرية. وينطبق قانون تناقص الغلة على أراضي البناء فعندما يزداد تكثيف رأس المال والعمل المستخدم في أراضي البناء في مدينة معينة يزداد عدد مباني هذه المدينة حتى يصل إلى نقطة معينة من التزاحم والعمران بعدها تأخذ القيمة السوقية لهذه المباني نحو الانخفاض نتيجة لزيادة المعروض منها وبالتالي نقص العوائد الإيجارية التي يمكن أن تغلها هذه المباني.

ويفترض قانون تناقص الغلة مجموعة من الفروض لا تتوافر واقعياً هي:

١. ثبات الأساليب التكنولوجية المستخدمة في العمليات الإنتاجية وبدراسة هذا الفرض نجد أن التقدم التكنولوجي المستمر لا يسمح بثبات هذه الأساليب مما يؤدي إلى ظهور أساليب جديدة بمرور الزمن. ويترتب على استخدام هذه الأساليب الإنتاجية عدم تزايد الإنتاجية وتناقصها وفقا لقانون تناقص الغلة.

٢. ثبات نوعية الموارد الإنتاجية المتغيرة التي يتم خلطها بالمورد الإنتاجي الثابت (الأرض) والذي يحدث غير ذلك نظرا لتنمية الموارد العمالية البشرية من خلال تنمية قدراتهم الإدارية الذهنية والجسمانية من خلال عمليات وبرامج التثقيف والتعليم وبالتالي عدم ثبات نوعية العنصر البشري بمرور الزمن كذلك فإن المكتشفات الجديدة تؤدي إلى عدم ثبات نوعية رأس المال المستخدم في العمليات الإنتاجية بما يؤدي إلى زيادة الإنتاج بتكثيف هذين العنصرين على عنصر الأرض الثابت مما لا يتفق وقانون تناقص الغلة.

دالة الإنتاج الكلاسيكية The Classical Production Function

إن الهدف الأساسي من دراسة دوال الإنتاج الكلاسيكية هو أنه من خلال هذه الدوال يمكن فهم طبيعة العلاقات الموردية-الناتجية بوضوح *Farctor Product Relationship* وبذلك يمكن إعطاء مديري المزارع *Farm Manegers* بعض المؤشرات *Indecators* عن طبيعة هذه العلاقات التي قد تواجه إنتاج مزرعته وأهمها الإنتاجية الحدية *Marginal Product* والإنتاجية المتوسطة *Average Physical Product* ومرونة الإنتاج *Elasticity of Production*.

وبالطبع لايمكننا هنا دراسة أشكال دوال الإنتاج كافة لذا سنبداء بأبسطها وهو دالة الإنتاج في متغير واحد:

$$Y = f(x)$$

حيث:

X= عنصر الإنتاج المتغير، Y= الناتج

في حين يشير:

(APP) إلى متوسط الناتج الفيزيقي *(Average Physical Product)*،

(MPP) إلى الناتج الحدي الفيزيقي *(Marginal Physical Product)*،

(E) مرونة الإنتاج *(Elasticity of Production)*.

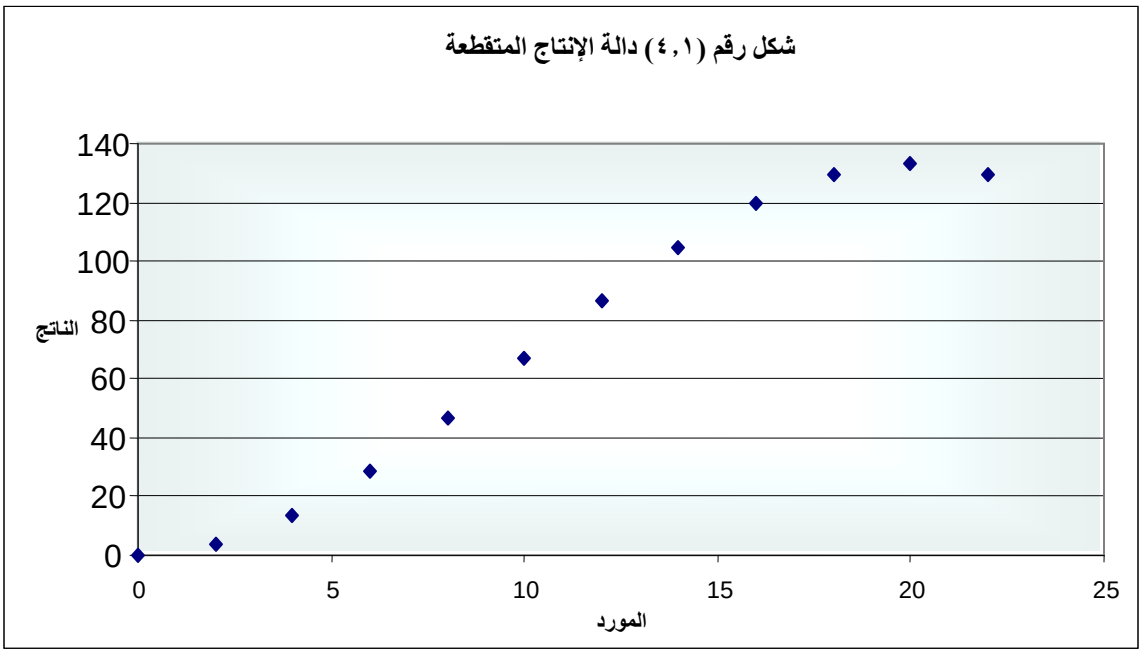
الجدول التالي ( ) يوضح العلاقة الموردية الناتجية وكذلك النوتج الحدية والمتوسطة ومرونة الإنتاج.

جدول رقم ( ) الدالة الإنتاجية الكلاسيكية

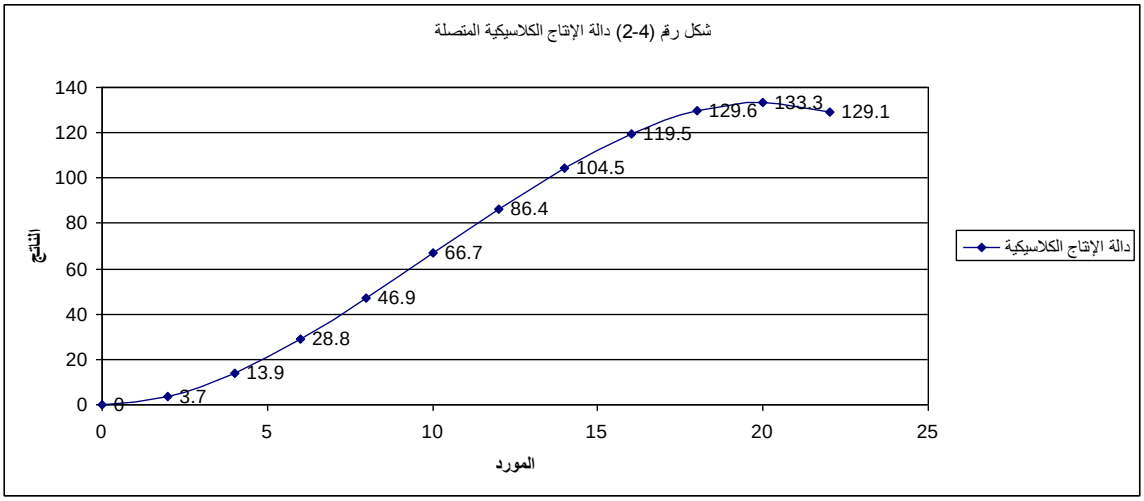
الخطة	١	٢	٣	٤	٥	٦
	الكمية المستخدمة من المورد X	الكميات المستخدمة من رأس المال C	الناتج الكلي Y	متوسط الناتج APP	الناتج الحدي MPP	مرونة الإنتاج $\frac{MPP}{APP}$
٠	٠	1000	٠	-	-	-
A	٢	1000	٣,٧	١,٩	١,٩	١,٩
B	٤	1000	١٣,٩	٣,٥	٥,١	١,٨
C	٦	1000	٢٨,٨	٤,٨	٧,٥	١,٨
D	٨	1000	٤٦,٩	٥,٩	٩,١	١,٦
E	١٠	1000	٦٦,٧	٦,٧	٩,٩	١,٥
F	١٢	1000	٨٦,٤	٧,٢	٩,٩	١,٥
G	١٤	1000	١٠٤,٥	٧,٥	٩,١	١,١
H	١٦	1000	١١٩,٥	٧,٥	٧,٥	٠,٨
I	١٨	1000	١٢٩,٦	٧,٢	٥,١	٠,٥
J	٢٠	1000	١٣٣,٣	٦,٧	١,٩	٠,٠
K	٢٢	١٠٠٠	١٢٩,١	٥,٩	-٢,١	-٠,٧

وبتوقيع بيانات العمود رقم (١) ورقم (٢) من الجدول ٤,١ نحصل على دالة الإنتاج المتقطعة *Discrete Production Function* الموضحة في الشكل رقم (٤,١) التالي:

شكل رقم (٤,١) دالة الإنتاج المتقطعة



وتشير دالة الإنتاج المتقطعة إلى عدم إمكانية تجزئة مورد الإنتاج وأفضل مثال لذلك إعتبار (رجل/يوم) هي عنصر الإنتاج X فلا يمكن في هذه الحالة تجزئة العمالة، إلاّ إذا تغير من (رجل/يوم) إلى ساعة عمل بشري وفي هذه الحالة يمكن تجزئة مورد الإنتاج و تتحول إلى دالة إنتاج متصلة *Continuous Production Function* كما في الشكل رقم (٤،٢) التالي:



و يتضح من الشكل رقم (٤،٢) أن الناتج الكلي TP يساوي الصفر عند عدم إضافة أي قدر من المورد المتغير إلى الموارد الثابته حيث (X=0)، ثم يزداد الناتج بمعدل متزايد ثم بمعدل متناقص عند إستمرار إضافة المورد المتغير. يصل الناتج الكلي (Y) إلى (١٣٣،٣) وحدة عند إضافة ٢٠ وحدة من المورد المتغير X إلى الموارد الأخرى الثابته، وباستمرار إضافة وحدات المورد المتغير بعد ذلك فإن الناتج الكلي ينخفض، ويشير التقدير الإحصائي لهذه الدالة إلى أنها تأخذ الصورة الرياضية التالية:

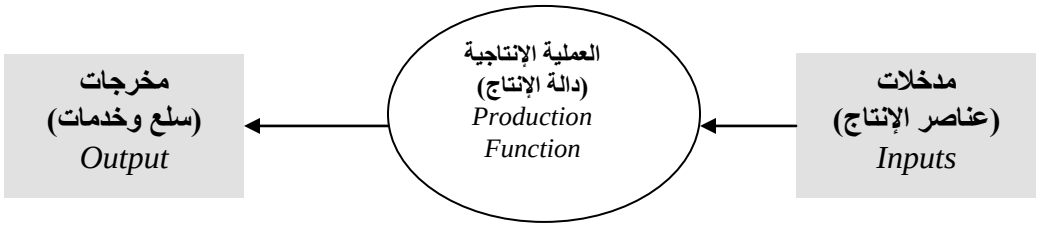
$$y = x^2 - \frac{1}{30}x^3$$

حيث تشير Y إلى كمية معينة من الناتج الفيزيقي عند إستخدام قدر معين من المورد الإنتاجي X ومن ثم يمكن الحصول على قيم Y بالتعويض عن قيمة X في المعادلة أعلاه بمقادير مختلفة.

الإنتاج في الأجل القصير[٨] Production In The Short-Run

مـفهوم الإنـــتاج:

(الإنتاج) *Production* هو العملية التي تقوم بها المنشآت وذلك من خلال مزج عناصر الإنتاج المختلفة (مثل العمل، الأرض، رأس المال والإدارة) للحصول على حجم أو مقدار معين من السلع والخدمات. فالمنشآت عادة ماتقوم بتحويل المدخلات *Inputs* أو عناصر الإنتاج المختلفة إلى مخرجات أو سلع وخدمات *Outputs*، وذلك من خلال مايعرف بالعملية الإنتاجية والتي يمكن توضيحها بالشكل التالي:



كما يلاحظ فإنه حتى تتم أو تقوم العملية الإنتاجية فلابد من وجود عناصر الإنتاج، والتي تمثل المدخلات لهذه العملية. وعناصر الإنتاج هي عبارة عن موارد إقتصادية تتصف بالندرة وتحقق منفعة من خلال مساهمتها في العملية الإنتاجية، هذا وتصنف عناصر الإنتاج كما ذكر سابقاً إلى العمل *Labor* ، أرض *Land* ، رأس مال *Capital* وإدارة *Administration* ، ولكن هذا التقسيم يتصف بالعمومية فكل عنصر من هذه العناصر يمكن تجزئته إلى عناصر أخرى فرعية، فعنصر العمل مثلاً يشمل عمالة ماهرة (أطباء، مهندسين، وفنيين) وعمالة غير ماهرة (حرفيين) وعمالة منظمة (إداريين ومديرين).

أما عنصر الأرض فيشمل جميع ماعلى سطح الأرض أو في باطنها من مواد أولية أو خام مثل الماء والأشجار والحديد والبلاستيك وأي مواد أخرى تحصل عليها المنشأة أو تبتاعها بغرض إستخدامها في العملية الإنتاجية.

[٨] خالد الدخيل، " مقدمة في النظرية الإقتصادية الجزئية، المفاهيم الأساسية في التحليل الجزئي " الطبعة الأولى، ١٤٢٠هـ

أما بالنسبة لعنصر رأس المال فهناك رأس المال المادي والذي يشمل المباني والآلات والمعدات والمخزون وغيرها، وأيضاً هناك رأس المال البشري والذي يرتبط بصورة مباشرة بعنصر العمل السابق حيث أن التصنيف التقليدي لعناصر الإنتاج ينظر إلى العمل على أنه مجهود بدني أو ذهني فقط ولايأخذ في الإعتبار الأساليب التي قد تطور هذا العنصر مثل التدريب والتعليم الذي يكتسبه الأفراد وهو مايطلق عليه رأس المال البشري. وحيث أن العملية الإنتاجية يترتب عليها مخرجات أو إيجاد سلع وخدمات، ويقصد بالسلع الأشياء الملموسة أو المادية مثل السيارات والملابس والأطعمة وغيرها، أما الخدمات فنقصد بها الأشياء غير الملموسة أو غير المادية مثل إلقاء محاضرة وكشف طبيب أو فحص مهندس وغيرها. أما حلقة الوصل بين المدخلات والمخرجات فهي العملية الإنتاجية وهي مانعبر عنه بدالة الإنتاج.

الأجل القصير والأجل الطويل

عند دراسة الإنتاج *Production* والتكاليف *Costs* فإنه لابد من التفريق بين فترتين زمنيتين إحداهما تسمى الأجل القصير *Short-Run Period* والأخرى تسمى الأجل الطويل *Long-Run Period*، ومعيار التفرقة بينهما هو مدى إمكانية التغيير لعناصر الإنتاج المستخدمة خلال كل فترة زمنية معينة.

يقصد بالأجل القصير تلك الفترة الزمنية التي يكون فيها على الأقل واحد من عناصر الإنتاج ثابتاً *Constant* ولايمكن تغييره، أو بمعنى آخر الفترة الزمنية التي يستحيل على المنشأة خلالها أن تغير عنصراً واحداً أو أكثر من عناصر إنتاجها. ويسمى هذا النوع من عناصر الإنتاج التي لايمكن تغييرها بالعناصر الثابته.

الأجل الطويل *Long-Run Period* فيقصد به تلك الفترة الزمنية التي تكون فيها جميع عناصر الإنتاج متغيرة أو بمعنى آخر الفترة الزمنية التي تكون كافية لجعل جميع عناصر الإنتاج متغيرة *Variable*، مما يعني أنه لايوجد عناصر إنتاج ثابته في الأجل الطويل.

ويلاحظ هنا أن تعريف كل من الأجل القصير والأجل الطويل يختلف من منشأة إلى أخرى، وذلك لأن الفترة التي تحتاجها أي منشأة لتغيير جميع عناصر إنتاجها ليست محددة وتعتمد على

خصائص كل منشأة على حده، فمثلاً قد يكون الوقت الذي تحتاجه منشأة ما لتغيير جميع عناصر إنتاجها يتراوح بين شهرين إلى ثلاثة وبالتالي فإن الأجل الطويل لهذه المنشأة هو ثلاثة أشهر، بينما قد يكون الوقت الذي تحتاجه منشأة أخرى لتغيير جميع عناصر إنتاجها يتراوح بين ثلاث وخمس سنوات وبالتالي فإن الأجل الطويل بالنسبة لها هو خمس سنوات وهكذا، ولهذا فإنه يجب التفرقة بين الأجلين وذلك حسب حالة كل منشأة على حده.

دالة الإنتاج في الأجل القصير

تعبر دالة الإنتاج في الأجل القصير *Short-Run Production Function* عن الفترة الزمنية التي يكون فيها عنصر إنتاجي واحد على الأقل ثابتاً وباقي عناصر الإنتاج متغيرة، ولغرض التبسيط سنفترض أن دالة الإنتاج Y تعتمد على عنصري إنتاج فقط هما العمل L ورأس المال C ، وسنفترض أيضاً أن رأس المال هو العنصر الثابت بينما العمل هو العنصر المتغير وبالتالي فإن تلك الدالة تكتب كما يلي:

$$Y = f(L, \overline{C})$$

وكما نلاحظ في هذه الدالة فإن رأس المال ثابت $\overline{C}$ بينما العمل هو العنصر المتغير الوحيد، لذلك فإن المنشأة تستطيع الحصول على كميات أكبر من الإنتاج Y وذلك بزيادة إستخدامها للعنصر المتغير L، وهذا يعني أنه كلما زاد إستخدام العنصر المتغير L زاد حجم الإنتاج الكلي، وبصفة عامة يمكن القول أنه إذا كان هناك زيادات متساوية من العنصر المتغير في كل فترة زمنية مع تثبيت العنصر أو العناصر الإنتاجية الأخرى فإن الإنتاج الكلي سوف يزداد، ولكن بعد نقطة أو حدّ معين أن هذه الزيادات في العنصر المتغير لن تؤدي إلى أي زيادة في الإنتاج، ولكن قد نجد أنها تتسبب في إنقاصه. كمثال على ذلك فإنه لو كان لدينا مزرعة صغيرة ويعمل على زراعتها وحصادها وجمع إنتاجها كاملاً ٨ عمّال، فإنه لوزدنا عدد هؤلاء العمّال إلى ٤٠ عاملاً فإننا سنجد أن ذلك سيقلل من الإنتاج الكلي للمزرعة نتيجة لتزاحم العمّال أو إنشغال بعضهم ببعض أو أكل بعضهم لمنتجات المزرعة.

ويكمن توضيح ذلك من خلال الجدول رقم ( )، حيث يبين هذا الجدول الكميات المستخدمة من عنصر العمل المتغير (العمود الأول) والكميات المستخدمة من عنصر رأس المال الثابت (العمود الثاني) ومستويات الإنتاج القصوى التي تترتب عليها (العمود الثالث).

من جدول رقم ( ) عندما تكون الكمية المستخدمة من العمل تساوي صفر فإن حجم الإنتاج الكلي يكون صفر، وعند إضافة عامل واحد نجد أن الإنتاج الكلي يصبح ٣,٧ وحده وبإضافة عامل آخر يرتفع الإنتاج إلى ١٣,٩ وحدة، ثم بإضافة العامل الثالث يرتفع الإنتاج الكلي إلى ٢٨,٨ وحدة وهكذا يستمر الإنتاج في التزايد حتى العامل العشرين، ثم بإضافة العامل العشرين فإن ذلك لن يؤثر على الإنتاج، وهذا يعني أن أقصى قيمة للإنتاج الكلي تحققت عند العامل العشرين، بعد ذلك فإن إضافة كل عامل بعد ذلك تؤدي إلى إنخفاض الإنتاج الكلي.

ويمكن التعبير عن العلاقة المضحة في الجدول رقم (١) بين y و $X`s$ باستخدام دالة الإنتاج وذلك بالتعويض عن مقدار الكميات المستخدمة من كل عنصر في تلك الدالة كالتالي:

$$y = f(0,1000) = 0$$
$$y = f(2,1000) = 3.7$$
$$y = f(4,1000) = 13.9$$
$$\mathbf{M}$$
$$y = f(22,1000) = 129.1$$

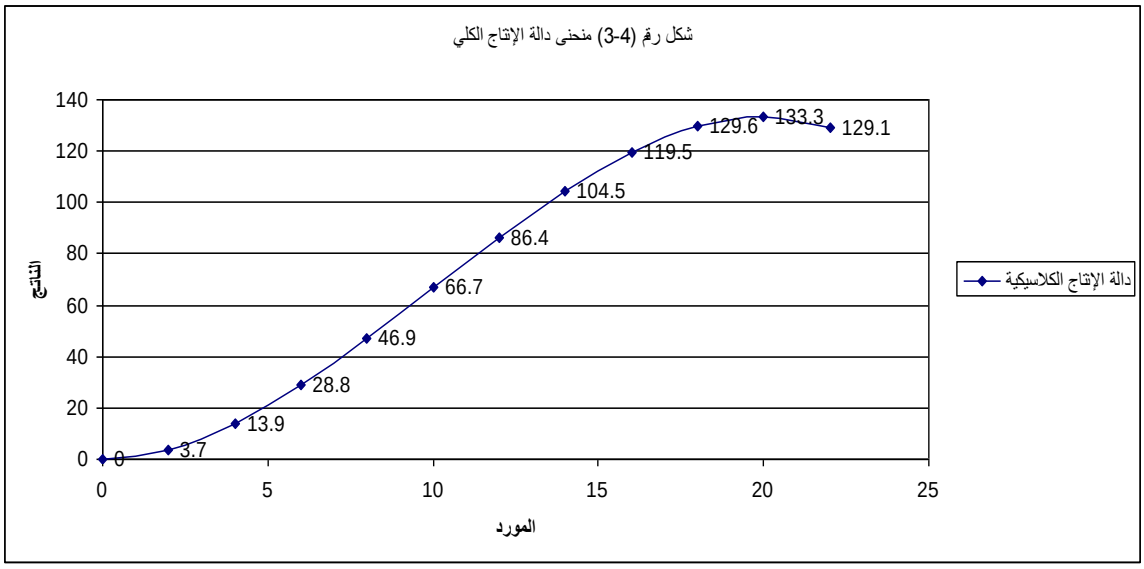
المشتقات الإقتصادية لدالة الإنتاج

تتضمن الدالة الانتاجية بعض المشتقات. وأهم تلك المشتقات التي لا يمكن للإقتصادي أو الباحث الإستغناء عنها في مجال إتخاذ القرارات في إضافة مورد أو الإنقاص منه والتي يمكن إشتقاقها من الدالة الإنتاجية هي :

- **الناتج الكلي** **Total Production**
- **الناتج المتوسط** **Average production**
- **الناتج الحدي** **Marginal production**
- **مرونة الانتاج** **Elasticity of production**

أولاً: الناتج الكلي: Total Production

منحنى الناتج الكلي عبارة عن توضيح بياني لدالة الإنتاج عند ثبات رأس المال، ويعطينا هذا المنحنى الإنتاج الكلي من سلعة معينة عند الكميات المختلفة من عنصر العمل. وباستخدام بيانات الجدول ( ) السابق وتمثيلها بيانياً في الشكل ( )، على إعتبار أن المحور الرأسي يمثل الإنتاج الكلي والمحور الأفقي يمثل الكميات المستخدمة من عنصر العمل، فإننا نحصل على مجموعة النقاط (A,B,C,D,E,F,G,H,I,J) وكل نقطة منها توضح عدد وحدات العمل المستخدمة ومايقابلها من إنتاج كلي وبإيصال هذه النقاط نحصل على منحنى الإنتاج الكلي، ويلاحظ من الشكل ( ) أن منحنى الإنتاج الكلي TP يتزايد من البداية وحتى العامل العشرين، أي أن ميل المنحنى في هذا الجزء يكون موجباً وبعد ذلك يبدأ المنحنى بالتناقص أي أن الميل يصبح سالباً، ولكن في الجزء الأول الذي يكون فيه ميل منحنى الإنتاج الكلي موجب نجد أن هذا الميل يكون موجباً ومتزايداً (من البداية حتى العامل العاشر) ومن ثم يكون موجباً ومتناقصاً (من العامل العاشر وحتى العامل العشرين) وتسمى هذه النقطة التي يتغير فيها المنحنى من التزايد إلى التناقص بنقطة الإنقلاب.



ثانياً: الناتج المتوسط الفيزيقي: Average Physical Product(APP)

يتحدد الإنتاج المتوسط للمورد الإنتاجي من حاصل قسمة الإنتاج الكلي Y على عدد وحدات المورد المتغير المستخدمة للحصول على الناتج X . وبمعني أخر هو "مقدار الإنتاج لكل وحدة من العامل المتغير" أو "ماينتجه العامل المتغير الواحد في المتوسط" من الجدول (٤,١) نجد أنه عندما X=10 فإن الناتج الكلي Y=66.7 والناتج المتوسط

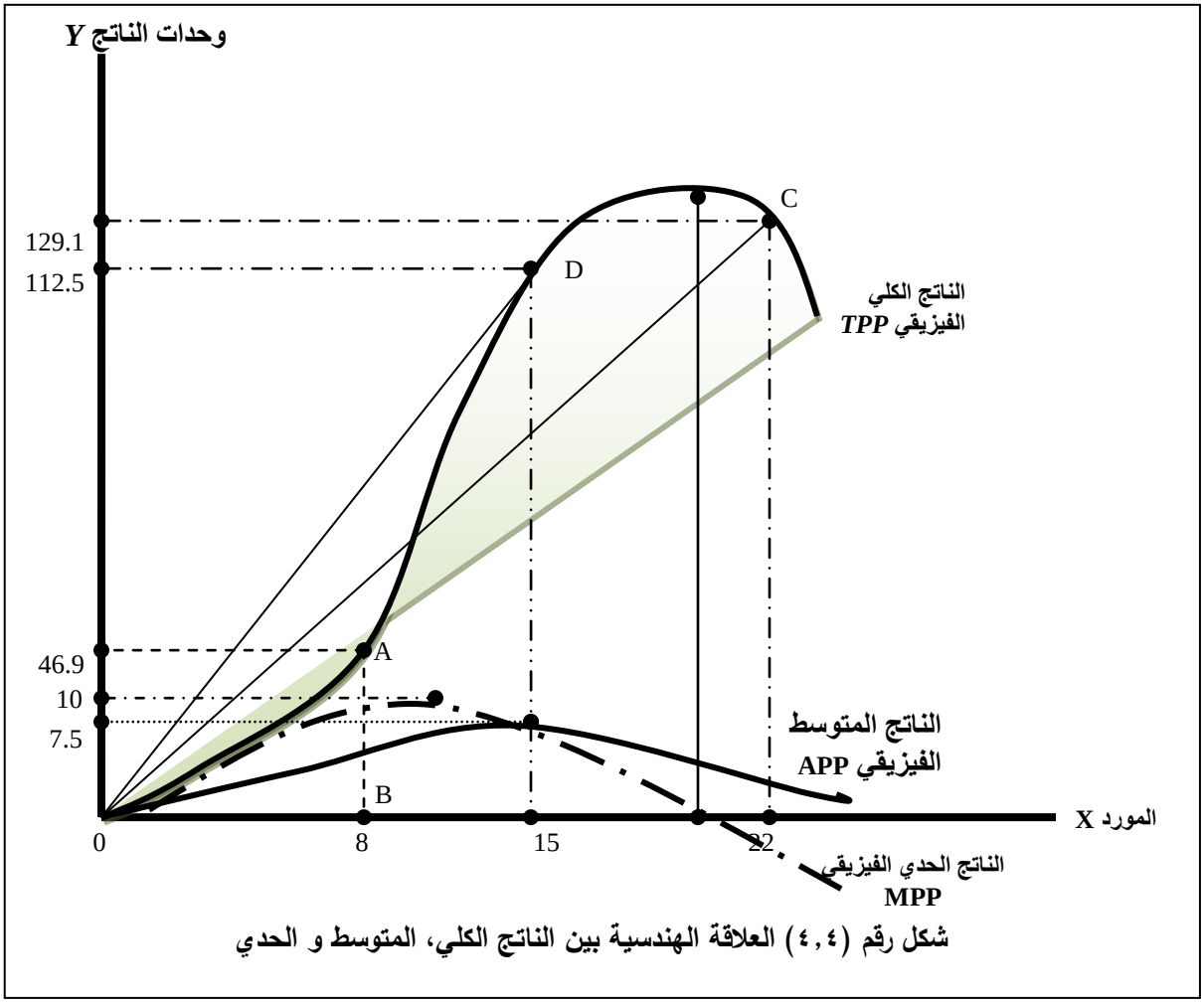
$$(APP = \frac{Y}{X} = \frac{TP}{X_5} = \frac{f(x \mid y)}{x} = \frac{66.7}{10} = 6.67)$$

هذا وتشير كلمة فيزيقي إلى المقياس بوحدات فيزيقية (كجم مثلاً) وليس بوحدات نقدية (ريال مثلاً). ويقاس الناتج المتوسط الفيزيقي APP بيانياً عند أي نقطة على منحنى الناتج الكلي بميل الخط الواصل من نقطة الأصل حتى تلك النقطة. فمثلاً نجد أن الناتج المتوسط الفيزيقي عند النقطة (A) يمكن الحصول عليه هندسياً من ميل الخط الواصل من نقطة الأصل حتى هذه النقطة إذ أن ميله الذي

يساوي الرأسي (الإنتاج) مقسوماً على الأفقي (وحدات المورد المتغير) وعليه فإن الناتج المتوسط الفيزيقي عند النقطة A = المقابل (AB) على المجاور ($0A$) = ٤٦,٩ ÷ ٨ =٥,٩ وحدة.

أما عند النقطة (D) فإن الناتج المتوسط الفيزيقي يصل لأقصاه لأن ميل الخط ($0D$) هو أقصى ميل لخط يخرج من نقطة الأصل ليصل على أي نقطة على منحنى الناتج الكلي، أي بمعنى آخر لأن هذا الخط يصنع زاوية أكبر مع المحور الأفقي مقارنةً بأي زاوية يمكن أن يصنعها أي خط آخر يخرج من نقطة الأصل على أي نقطة أخرى على منحنى الناتج الكلي، وعليه فإن الناتج المتوسط الفيزيقي عند النقطة D=١١٢,٥ ÷١٥=٧,٥ وحدة.

أما عند النقطة(C) فإن الناتج المتوسط الفيزيقي يقدر هندسياً بميل إمتداد الخط ($0A$) أي ($0C$) وعليه فإن الناتج المتوسط الفيزيقي عند النقطة C =١٢٩,١ ÷ ٢٢ = ٥,٩ وحدة وهي قيمة الناتج المتوسط الفيزيقي نفسها عند النقطة (A) لأن الزاوية التي يصنعها الخط ($0A$) مع المحور الأفقي لم تتغير مع إمتداد الخط ليصبح ($0C$). هذا ويشير الناتج المتوسط الفيزيقي إلى معدل تحويل المورد إلى ناتج إذ من الشكل ٤,٤ يتضح أن الناتج المتوسط يصل إلى أقصاه عند الوحده ١٥ من المورد المتغير وبعدها يبداء الناتج المتوسط الفيزيقي في التناقص لأن شكل منحنى الناتج المتوسط يعتمد على شكل منحنى الناتج الكلي الفيزيقي.



شكل رقم (٤,٤) العلاقة الهندسية بين الناتج الكلي، المتوسط و الحدي

ويستخدم الناتج المتوسط عموماً لقياس مدى كفاءة *Efficient* المورد المتغير المستخدم في العملية الإنتاجية إذ تزداد كفاءة المورد في بداية العملية الإنتاجية وينعكس ذلك على تزايد منحنى الناتج المتوسط الفيزيقي بمعدل أسرع حتي النقطة *A* ثم يستمر الناتج المتوسط في الإرتفاع ولكن بمعدل أقل مشيراً إلى أن كفاءة المورد وإن كانت مازالت مرتفعة فإنها ليست كسابقتها حتى يصل الناتج المتوسط لأقصاه ثم تبداء كفاءة المورد المتغير في التناقص مما ينعكس على منحنى الناتج المتوسط.

ثالثاً: الناتج الحدي الفيزيقي Marginal Physical production (MPP)

يقاس الناتج الحدي الفيزيقي هندسياً بميل الخط الذي يمس دالة الإنتاج عند النقطة المقابلة لهذا المستوى من المورد المتغير. وعلى هذا فإن الإنتاجية الحدية عند ١٠ وحدات من المورد المتغير تساوي ميل المماس لدالة الإنتاج الكلي عند هذا المستوى الموردي. ويلاحظ أن الناتج الحدي يصل لأقصاه عند هذه النقطة التي تسمى نقطة الإنعكاس (*Inflection Point*) حيث أن ميل المماس عند هذه النقطة أكبر من أي ميل لمماس آخر عند أي نقطة أخرى على منحنى الناتج الكلي. يبدأ الناتج الحدي في التناقص بعد النقطة (A) حتى يصل إلى الصفر عندما يصل الناتج الكلي أقصاه. ويلاحظ أن الناتج الحدي يتزايد بمعدل متزايد عندما يكون شكل منحنى الناتج الكلي متزايد بمعدل متزايد أيضاً. كما أن معدل الزيادة في الناتج الحدي قد تكون متناقصة في بداية العملية الإنتاجية ومع ذلك نتوقع الا يمر منحنى الناتج الكلي بمرحلة الزيادة المتزايد بل يبدأ بالزيادة بمعدل متناقص خلال هذه المرحلة،

اي أن شكل منحنى الناتج الحدي يتوقف إلى حد كبير على شكل منحنى الناتج الكلي.

ويعرف الناتج الحدي بأنه الزيادة في الناتج الكلي الراجعة إلى الزيادة في كمية المورد المتغير بوحدة واحدة(الوحدة لا تعني واحد صحيح) أي أن :

$$MPP = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\partial TP}{\partial X} = \frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{\partial f(X \mid Y)}{\partial X}$$

ومن الجدول السابق يلاحظ أن الناتج الحدي فيما بين الوحدتين ١٠ و ١٢ للمورد المتغير هي:

$$MPP = \frac{86.4 - 66.7}{12 - 10} = \frac{19.7}{2} = 9.9$$

ومن ثم فإنه فيما بين الكميتين ١٠ و ١٢ من المورد المتغير فإن إضافة وحدة واحدة من المورد المتغير تؤدي إلى زيادة الناتج الكلي بالقدر ٩,٩ وحدة. كذلك نجد ان الناتج الحدي الفيزيقي بين الكميتين ٢٠ و ٢٢ هي:

$$MPP = \frac{129.1 - 133.3}{22 - 20} = \frac{-4.2}{2} = -2.1$$

ومن ثم فإنه فيما بين الكميتين ٢٠ و٢٢ من المورد المتغير فإن إضافة وحدة واحدة من المورد المتغير تؤدي إلى إنخفاض الناتج الكلي بالقدر ٢,١ وحدة أي بمعنى سالبية الناتج الحدي.

ويمكن تلخيص العلاقة بين الإنتاج الحدي والإنتاج المتوسط في الحالات التالية:

- عندما يكون ($MP>AP$) فإن AP يجب أن يتزايد.
- عندما يكون ($MP < AP$) فإن AP يجب أن يتناقص.
- عندما يكون ($MP=AP$) فإن AP يجب أن يكون عند أقصى قيمة له.

رابعاً: مرونة الإنتاج Elasticity of Production (£)

تستخدم مرونة الإنتاج لتقدير درجة إستجابة الناتج Y للتغير في المورد المتغير X أي هي عبارة عن التغير النسبي في المتغير التابع (Y) مقسوماً على التغير النسبي في المتغير المستقل (X) لذلك فإن :

المرونة الإنتاجية = مرونة منحنى الناتج الكلي

= التغير النسبي في الناتج / التغير النسبي في مورد الإنتاج

ويعبر عن ذلك رياضياً كما يلي:

$$E = \frac{\Delta Y}{Y} \div \frac{\Delta X}{X}$$

$$= \frac{\Delta Y}{\Delta X} \div \frac{Y}{X}$$

$$= \frac{MPP}{APP}$$

هذا وتستخدم مرونة الإنتاج عادة في توضيح مراحل الإنتاج الثلاث كما سيأتي ذكر ذلك عند شرح قانون تناقص الغلة فيما بعد. وعليه فمن الجدول السابق يمكن الحصول على مرونة الإنتاج القوسية (*Arc Elasticity*) بقسمة متوسط الناتج الحدي على الناتج المتوسط، أما مرونة النقطة (*Point Elasticity*) فيتم حسابها بقسمة الناتج الحدي الفعلي على الناتج المتوسط. ومن دالة الإنتاج فإن :

$$MPP = \frac{\partial Y}{\partial X} = 2X - \frac{1}{10}X^2$$

وكذلك:

$$\frac{1}{APP} = \frac{X}{Y} = \frac{1}{X - \left(\frac{1}{30}\right)X^2}$$

وعليه فإن مرونة الإنتاج:

$$E = \frac{60X - 3X^2}{30X - X^2}$$

وفيه عندما تكون x =10 فإن المرونة E =1.5 ، كذلك عندما تكون X=15 فإن المرونة الإنتاجية للمورد X=1 وهكذا كما هو موضح بالجدول بالعمود السادس.

قانون تناقص الغلة ومراحل الإنتاج الثلاث Low of Diminishing Returns

لقد طوّر قانون تناقص الغلة بواسطة الإقتصاديين السابقين ليصف العلاقة بين الناتج ومورد واحد متغير عندما تكون الموارد الأخرى ثابتة. وهو أحد القوانين الإقتصادية الهامة المستخدمة في مختلف الدراسات الإقتصادية وأحياناً يسمى بقانون تناقص الإنتاجية الحدية *Low of Diminishing Marginal Productivity*،

وينص القانون على أنه عند ثبات جميع العناصر الإنتاجية عند مستوى معين فيما عدا عنصر واحد فإن إستخدام وحدات متتالية ومتساوية من هذا العنصر في العملية الإنتاجية يؤدي إلى إزدياد الناتج الكلي بمعدل متزايد إلى أن يبلغ القدر المستخدم من العنصر حداً معيناً يأخذ الناتج الكلي بعده في الإزدياد بمعدل متناقص، وبالإستمرار في زيادة وحدات العنصر المتغير يتم الوصول إلى حداً آخر يأخذ الناتج الكلي بعده في التناقص.ويبين الشكل (٤,٥) المراحل الثلاث التي ينص عليها هذا القانون وأستخدمت فيها البيانات الوردة في جدول الدالة الكلاسيكية كالتالي:

مراحل الإنتاج:

يمكن تقسيم المراحل الإنتاجية لدالة الإنتاج إلى ثلاث مراحل إنطلاقاً من قواعد فنية وإقتصادية.

المرحلة الأولى: تبدأ من النقطة التي تكون فيها الوحدات المستخدمة من عنصر الإنتاج المتغير مساوية للصفر وتنتهي بالنقطة التي يكون فيها متوسط الإنتاج في أعلى قمة له.

وتتسم المرحلة الأولى بالتالي:

١- الناتج الكلي يساوي الصفر ($TPP=0$) عندما تكون كمية المورد المتغير مساوية للصفر($X=0$).
٢- يزداد الناتج بمعدل متزايد ثم بمعدل متناقص.
٣- الناتج الحدي (MPP) يتزايد ويكون أعلى من الناتج المتوسط (APP) ويصل لأقصى قيمة ثم يهبط.
٤- الناتج المتوسط (APP) يتزايد ولكن **أقل** من الناتج الحدي.
٥- يتساوى الناتج الحدي مع الناتج المتوسط ($MPP=APP$)عند نهاية المرحلة الأولى و عندها يصل الناتج المتوسط لأقصاه.
٦- مرونة الإنتاج للمورد المتغير تكون أكبر من الواحد الصحيح (الناتج الحدي يتزايد بمعدل متزايد) أو أقل من الواحد الصحيح (ناتج حدي يتزايد بمعدل متناقص).

المرحلة الثانية:تبدأ من نهاية المرحلة الأولى وتنتهي بالنقطة التي يكون فيها الإنتاج الحدي مساوياً للصفر.

وتتسم المرحلة الثانية بالتالي:

١- الناتج الكليTP يتزايد بمعدل متناقص حتى يصل إلى قمته في نهاية المرحلة الثانية.
٢- الناتج الحدي MP ينخفض وكذلك الناتج المتوسط AP.
٣- الناتج الحدي MP يكون أقل من الناتج المتوسط AP أثناء الإنخفاض.
٤- الناتج الحدي يصل إلى الصفر $MP=0$ عندما يصل الناتج الكلي TP إلى حده الأقصى.
٥- مرونة الإنتاج للمورد المتغير أقل من أو تساوي الوحدة ولكن أكبر من أو تساوي الصفر(١ ≤ E ≤ صفر)

المرحلة الثالثة: تبدأ من نقطة نهاية المرحلة الإنتاجية الثانية.

وتتسم المرحلة الثالثة بالتالي:

١- الناتج الكلي *TP* يتناقص.

٢- الناتج المتوسط *AP* يتناقص ولكن لا يصل إلى الصفر.

٣- الناتج الحدي *MP* يتناقص بعد أن يكون قد وصل إلى الصفر أي يقع في منطقة الإنتاج السالب.

٤- مرونة الإنتاج للمورد المتغير أقل من الصفر (E<0).

شكل رقم (٤,٥) دالة الإنتاج في المدى القصير ومراحلها الثلاث

خلاصة القول أن المنشأة التي تسعى لتعظيم الأرباح يجب أن تستخدم عدد عمال كافٍ للخروج من المرحلة الأولى وعدداً ليس بالكثير لتجنب المرحلة الثالثة، وبالتالي فإنها ستجد نفسها في المرحلة الثانية حيث تكون توليفات العمل ورأس المال بنسب ذات كفاءة ونظرية الإنتاج وحدها لاتخبرنا عن الكميات المحددة التي تستطيع المنشأة إستخدامها من عناصر الإنتاج أو كمية الإنتاج خلال المرحلة الثانية لأن ذلك القرار سيعتمد على عناصر الإنتاج وسعر المنتج، لذلك فإن كل ماتقدمه لنا نظرية الإنتاج هو أنها تستبعد المرحلتين الأولى والثالثة وتخبرنا فقط عن الطريقة التي تؤثر بها العناصر المتغيرة على الإنتاج.

الـــــــباب الـــــــخامس

٥,١ الدوال الإنتاجية القيمية في المدى القصير

١- قيمة الناتج الكلي *Total Value Product* .

٢- قيمة الناتج المتوسط(*AVP*) *Average Value Product* .

٣- قيمة الناتج الحدي *Marginal Value Product (MVP)*.

٥,٢ المفهوم الإقتصادي لتكاليف الإنتاج

٥,٣ التكاليف من وجهة النظر الزمنية

التكاليف الإنتاجية في المدى القصير

التكاليف الإنتاجية في المدى الطويل

٥,٤ تكاليف الوحدة في المدى القصير

٥,٥ التكاليف المتوسطة والحدية

متوسط التكاليف الثابتة (*AFC*)

متوسط التكاليف المتغيرة (*AVC*)

متوسط التكاليف الكلية (*ATC*)

التكاليف الحدية (***MC***)

٥,٦ الإشتقاق الهندسي لدوال التكاليف المتوسطة و الحدية

أولاً: عندما يكون متوسط التكاليف الكلية في أدنى نقطة لها:

ثانياً: عندما يكون متوسط التكاليف الكلية متزايدة(صاعدة إلى الأعلى):

ثالثاً: عندما يكون متوسط التكاليف الكلية متناقصاً(هابطا إلى الأسفل):

٥,٧ تعليق عام على التكاليف

الـــدوال الإنـــتاجية الـــقيمية فـــي الـــمدى الـــقصير

إن فهم ودراسة نظرية التكاليف *Cost Theory* سواء في الأجل القصير *Short-Run* أو الأجل الطويل *Longe-Run* يعتبر ضروري جداً لفهم طبيعة القرارات الإنتاجية التي تتخذها المنشأة خاصة فيما يتعلق بالكيفية التي يتم بها الإنتاج وتحديد توليفة عناصر الإنتاج التي تختارها المنشأة. حيث يمكن مزج عناصر الإنتاج بطرق مختلفة للحصول على مقدار معين من الإنتاج، فيمكن الحصول على مستوى الإنتاج Y_o باستخدام الكثير من العمل والقليل من رأس المال (أسلوب تكثيف العمل)، أو القليل من العمل مقابل الكثير من رأس المال (أسلوب التكثيف الرأسمالي)، أو بأي مزيج آخر. وبالتالي فإن هدف المنشأة هو إختيار التوليفة من عناصر الإنتاج التي تعطي ذلك المستوى من الإنتاج بأقل التكاليف الممكنة.

يوجد مقابل الدوال الإنتاجية الفيزيقية ما يسمى بدوال الإنتاج القيمية وهي عادة ما تستخدم عند إتخاذ قرارات توزيع (منطقة الموارد) كما سيأتي ذكره تفصيلاً في المحاضرات القادمة.

وتشمل هذه الدوال مايلي:

١- قيمة الناتج الكلي *Total Value Product(TVP)* .

٢- قيمة الناتج المتوسط *Average Value Product* (*AVP*) .

٣- قيمة الناتج الحدي *Marginal Value Product (MVP)*.

فإذا فرض أن دالة الإنتاج الكلي تأخذ الصورة التالية:

$$Y = f(x_1 \mid \bar{x}_2)$$

و بضرب الناتج الفيزيقي Y في سعر الوحدة من الناتج (P_y) ينتج دالة الإنتاج القيمية أي أن :

$$TVP = P_y Y = P_y TPP$$

وهكذا فإنه بقسمة الناتج الكلي القيمي*TVP* على عدد وحدات المورد المتغير X_1 نحصل على الناتج المتوسط القيمي (*AVP*) كالتالي:

$$AVP = \frac{TVP}{X_1} = P_y \frac{f(X_1 \mid \overline{X}_2)}{X_1}$$
$$= P_y APP$$

وبتفاضل دالة الناتج الكلي القيمي بالنسبة لمورد الإنتاج المتغير X_1 نحصل على الناتج الحدي القيمي (MVP) كما يلي:

$$MVP = \frac{\partial TVP}{\partial X_1} = \frac{\partial P_y f(X_1 \mid \overline{X}_2)}{\partial X_1}$$
$$= P_y \frac{\partial f(X_1 \mid \overline{X}_2)}{\partial X_1}$$
$$= P_y MPP$$

هذا ويتم إستخدام وحدات المورد المتغير (x) إلى أن يتساوى الناتج الحدي (MPP) مع سعر الوحدة من المورد (P_x) أي أن :

$$MVP = P_x$$

الـــــمفهوم الإقـــــتصادي لـــــتكاليف الإنـــــتاج

تشير تكاليف الإنتاج *Costs of Production* إلى المصروفات التي تنتج عن تنظيم العملية الإنتاجية وما تحتاجه من موارد وخدمات. لإيضاح تكاليف الإنتاج نتطرق لجانبين أساسيين للتكاليف هما:

أ) مبدأ التكاليف البديلة *Opportunity Costs*

ب) التكاليف المنظورة وغير المنظورة *Explicit & Implicit Costs*

١- مبدأ التكاليف البديلة *Opportunity Costs*

ويقصد بها قيمة العنصر أو العناصر الإنتاجية في أفضل إستخدامات بديلة أخرى، وبالتحديد فإن تكلفة الفرصة لأي عنصر إنتاجي هي عبارة عن أعلى قيمة إنتاج كان بإمكان هذا العنصر المساهمة بها في عملية إنتاجية بديلة.

فمن المعروف أن إستخدام المنشأة لبعض الموارد في إنتاج سلعة معينة يترتب عليه تضحية المجتمع بكميات معينة من السلع الأخرى التي تدخل هذه الموارد في إنتاجها، لذلك يعرف الإقتصاديين تكاليف إنتاج سلعة معينة بقيمة السلع والخدمات التي إضطر المجتمع إلى التضحية بها أو التخلى عنها – أي عدم إنتاجها بسبب توجيه الموارد لإنتاج السلعة موضع الإعتبار-

لذلك تعبِّر تكاليف الموارد للمنشأة عن ما يمكن أن تحصل عليه هذه الموارد في أفضل إستعمالاتها البديلة فتكاليف العمل في إنتاج الخضار مثلاً يعبر عنها بقيمة الفواكه التي ضحي بها فيما لو وجهت وحدات العمل هذه في إنتاجها.

مما سبق يمكن القول إن عناصر الإنتاج المستخدمة في العملية الإنتاجية يتولد عنها مقدار أو كمية معينة من الإنتاج، ومن وجهة نظر إقتصادية فإن تكلفة هذا الإنتاج تتمثل في مقدار مايمكن لهذه العناصر أن تنتجه في أي إستخدام آخر بديل، أو هي مقدار الإنتاج الذي يتم التضحية به نتيجة تشغيل هذه العناصر في العملية الإنتاجية المذكورة وعدم تشغيلها في عملية إنتاجية أخرى، لذلك فإن تكلفة الحصول على مقدار معين من الإنتاج هي أقصى كمية من الإنتاج يمكن لنفس عناصر الإنتاج إنتاجها

في إستخدام آخر، وقد وصفت هذه التكلفة الإقتصادية بتكلفة الفرصة البديلة لأنها تنبع من الفرص الضائعة لعناصر الإنتاج المستخدمة.

إن هذا المفهوم للتكاليف هو المفهوم المناسب في إتخاذ القرارات الإقتصادية، وهذا ما يجعل الإقتصاديين يهتمون بالكيفية التي تتم بها عملية الإنتاج وتحديد الحجم الأمثل له، وكذلك كيف يمكن للمنشأة أن تخفض تكاليفها وتزيد إيراداتها في سبيل الحصول على أقصى الأرباح؟

أخيراً تجدر الإشارة إلى أن إختلاف المفهوم الإقتصادي للتكاليف عن المفهوم المحاسبي جعل هناك إختلافاً بين الأرباح الإقتصادية والأرباح المحاسبية التي تحققها أي منشأة، وللتعرف على طبيعة هذا الفرق نتطرق إلى التصنيف التالي للتكاليف على أنها صريحة وضمنية.

٢- الـتكاليف الـــمنظورة وغير الـــــمنظورة

تتمثل التكاليف المنظورة الصريحة (*Explicit Costs*) في النفقات أو المدفوعات المباشرة التي تتحملها المنشأة مقابل الحصول على عناصر الإنتاج المختلفة. مثل إجمالي المبالغ التي تدفع والأجور والمصاريف الجارية وغيرها وهذه هي التكاليف التي يضعها المحاسب تحت بند نفقات المعيشة. وتعرف هذه التكاليف بالتكاليف المحاسبية لأنها تشكل النفقات التي يسجلها المحاسبون كمصاريف على المنشأة.

أما التكاليف غير المنظورة أو التكاليف الضمنية (*Implicit Costs*) وهي نفقات لاتتحملها المنشأة بشكل مباشر (نفقات غير مباشرة) مثل تكاليف الموارد أو عناصر الإنتاج التي يمتلكها صاحب المنشأة و التي لا يظهرها المحاسب عادة ضمن قائمة التكاليف مثل راتب صاحب المشروع و الفائدة على إستثماره وأجور العمالة العائلية.

ويتضح مما سبق أن نظرة الإقتصادي لتكلفة الإنتاج تختلف بعض الشئ عن التكلفة المحاسبية فالتكاليف الإقتصادية تفوق التكاليف المحاسبية التي لا ينظر لها إلاّ للإنفاق المنظور غير آخذة في الإعتبار التكاليف غير المنظورة وتكاليف الفرصة البديلة.

الـــتكاليف مـن وجـــهة الـــــنظر الـــــــزمنية

عند تحليل تكاليف الإنتاج يجب التمييز بين الفترة الزمنية في المدى القصير والفترة الزمنية في المدى الطويل.

التكاليف الإنتاجية في المدى القصير

يعبّر المدى القصير عن فترة زمنية قصيرة يستحيل فيها على المنشأة تغيير الكميات المستخدمة من بعض الموارد الداخلة في العملية الإنتاجية. هذا وتتوقف قدرة المنشأة على تغيير كميات الموارد الإنتاجية على طبيعة هذه الموارد وعلى طريقة حيازتها، فإذا رغبت المنشأة في تغيير كميات بعض الموارد التي تستأجر خدماتها كالأرض والمباني فإنها لاتحتاج إلى فترة طويلة لتنفيذ ذلك أما إذا أرادت المنشأة تملك هذه الموارد فإنها تحتاج إلى فترة طويلة نسبياً عن الفترة الأولى ولذلك فإن تكاليف مثل هذه الموارد في المدى القصير تسمى التكاليف الثابتة (*Fixed Costs*) لأنها لاترتبط بكمية الناتج إذ تدفعها المنشأة أنتجت أم لم تنتج.

على الجانب الآخر هناك من الموارد كالعمل والمواد الخام والمواد نصف مصنعة فإن عملية تغييرها لا تحتاج لفترة مثل نظيرتها السابقة ومن ثم فتكاليف مثل هذه الموارد تسمى التكاليف المتغيرة (*Variable Costs*) التي تزداد بزيادة الإنتاج وتقل بنقصانه.

وعليه فإن تكاليف الإنتاج الكلية (*TC*) *Total Cost* تتكون من شقين يتمثل الأول في تكاليف الموارد الثابتة (*TFC*) بالإضافة إلى تكاليف الموارد المتغيرة (*TVC*) أي أن:

$$TC(y) = TFC + TVC(Y)$$

هذه الدالة تسمى دالة التكاليف إذ أنها دالة في الإنتاج غير أن التكاليف يمكن أن ترتبط بعنصر الإنتاج عندما يكون سعر الوحدة من المورد X هو P_x أي أن:

$$TC(X) = TFC + TVC(X)$$
$$= TFC + XP_x$$

وهذه الأخيرة يطلق عليها معادلة التكاليف *Cost Equation* وليس دالة التكاليف *Cost Function*.

التكاليف الإنتاجية في المدى الطويل

يعرّف المدى الطويل بأنه الفترة الزمنية الطويلة التي تمكّن المنشأة من تغيير كافة الموارد الإنتاجية إذا رغبت في ذلك، وعليه فإن كافة التكاليف تعتبر تكاليف متغيرة. ويمكن توضيح العلاقة بين الإنتاج والتكاليف من خلال البيانات الإفتراضية الموضحة بالجدول التالي:

يبين الجدول رقم (٥,١) تكاليف الإنتاج للمستوى من صفر إلى ١٠ وحدات ناتج. يبين العمود رقم ٤ أن التكاليف الكلية تتزايد بزيادة حجم الإنتاج حيث أن زيادة الإنتاج تتطلب زيادة الكميات المستخدمة من عوامل الإنتاج. وحيث أن أسعار عوامل الإنتاج ثابتة لإفتراضنا حالة المنافسة الكاملة في أسواق عوامل الإنتاج، وهذا يعني أن أي زيادة في التكاليف لابد وأن تنتج عن زيادة كميات عوامل الإنتاج المستخدمة.

جدول رقم (٥,١) علاقة الإنتاج بالتكاليف

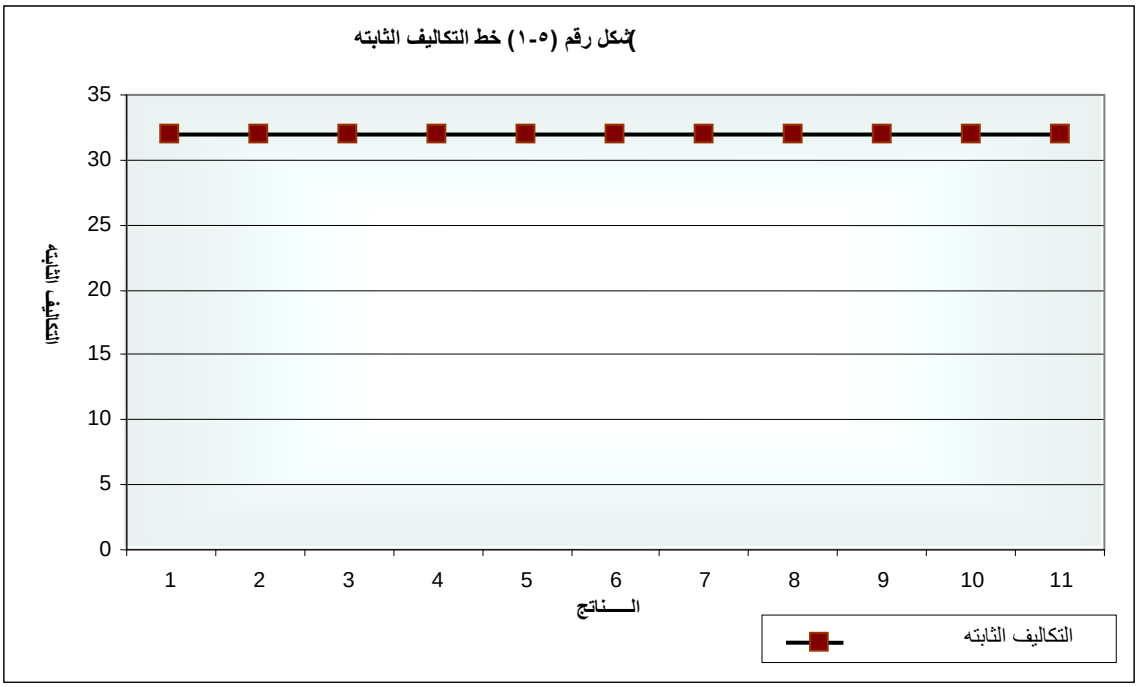
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
حجم الإنتاج Y	**التكاليف الثابته** TFC	**التكاليف المتغيرة** TVC	**التكاليف الكلية** TC ٤+٣	**متوسط التكاليف الكلية** ATC $\frac{2}{1}$	**متوسط التكاليف الثابته** AFC $\frac{3}{1}$	**متوسط التكاليف المتغيرة** AVC $\frac{4}{1}$	**التكاليف الحدية** MC
٠	٣٢	٠	٣٢	-	-	-	-
١	٣٢	١٢	٤٤	٤٤	٣٢	١٢	١٢
٢	٣٢	٢٠	٥٢	٢٦	١٦	١٠	٨
٣	٣٢	٢٤	٥٦	١٨,٦	١٠,٦	٨	٤
٤	٣٢	٢٨	٦٠	١٥	٨	٧	٤
٥	٣٢	٤٠	٧٢	١٤,٦	٦,٦	٨	١٢
٦	٣٢	٥٤	٨٦	١٤,٣	٥,٣	٩	١٤
٧	٣٢	٧٠	١٠٢	١٤,٢	٤,٢	١٠	١٦
٨	٣٢	٩٦	١٢٨	١٦	٤	١٢	٢٦
٩	٣٢	١٣٥	١٦٧	١٨,٦	٣,٦	١٥	٣٩
١٠		٣٢	١٨٠	٢١,٢	٣,٢	١٨	٤٥

ويرجع تصوير التكاليف الثابته بخط مستقيم إلى أن هذه التكاليف لا تتأثر بمقدار الناتج السلعي، وتعرف التكاليف الثابته *Fixed Costs* بأنها التكاليف التي تدفعها المنشأة لعناصر الإنتاج الثابته، وبالتالي فإنها لاتتغير بتغير حجم الإنتاج، ويجب أن تدفعها المنشأة سواء أنتجت أم لم تنتج، أي أن هذه التكاليف لاتعتمد على مستوى الإنتاج وإنما على حجم المنشأة أو المشروع، وكمثال على ذلك إيجار المباني والأراضي وأقساط التأمين وأنواع معينة من الضرائب...إلخ.

ويبين العمود الثالث في الجدول (٥,١) أن التكاليف الثابته للمنشأة تبلغ ٣٢ ريال عند جميع مستويات الإنتاج، وبافتراض أن عنصر رأس المال هو العنصر الوحيد الثابت ($\bar{c}$) في دالة الإنتاج، لذلك فإن التكاليف الثابته ستكون عبارة عن سعر أو ثمن العنصر الثابت (P) (سعر الفائدة مثلاً) مضروباً في عدد الوحدات المستخدمة من العنصر الثابت أي :

$$FC = P.\overline{C}$$

وباستخدام معطيات الجدول السابق يمكن الحصول على منحنى التكاليف الثابته كما في الشكل (٥,١) حيث يمثل المحور الأفقي حجم الإنتاج Y والمحور الرأسي التكاليف الثابته FC ، ويلاحظ أن منحنى التكاليف الثابته يتمثل في خط مستقيم موازٍ للمحور الأفقي ويقع أعلى منه بمسافة تساوي التكاليف الثابته.



أما الصورة التي تأخذها التكاليف المتغيرة فترجع إلى ماهو مفترض عن المنطق الإنتاجي بناءاً على المعارف والخبرات التقنية، ففي غالبية المنشآت الإقتصادية نجد أن التكاليف تزداد بمعدل متناقص لإنخفاض متوسط التكلفة المتغيرة للوحدة المنتجة وذلك حتى حد معين تبدأ بعده في الإرتفاع وهذا ينعكس بالطبع على شكل التكاليف المتغيرة الكلية التي تأخذ بالتالي في الإرتفاع.

وتعرّف التكاليف المتغيرة *Variable Costs* بأنها "التكاليف التي تدفعها المنشأة لعناصر الإنتاج المتغيرة عند كل مستوى من الإنتاج". وبالتالي فإنها تتغير مباشرة مع تغير حجم الإنتاج وترتبط معه بعلاقة طردية، فمستويات الإنتاج المرتفعة تتطلب كميات كبيرة من عناصر الإنتاج المتغيرة وبالتالي تكاليف مرتفعه، والعكس صحيح لمستويات الإنتاج المنخفضة فإنها تتطلب تكاليف منخفضة، مثل المواد الخام وأجور ورواتب العمّال وتكاليف التشغيل والمبيعات، وبافتراض أن عنصر العمل هو العنصر المتغير في دالة الإنتاج، لذلك فإن التكاليف المتغيرة ستكون عبارة عن سعر أو ثمن العنصر المتغير W مضروباً في عدد الوحدات المستخدمة من العمالة L

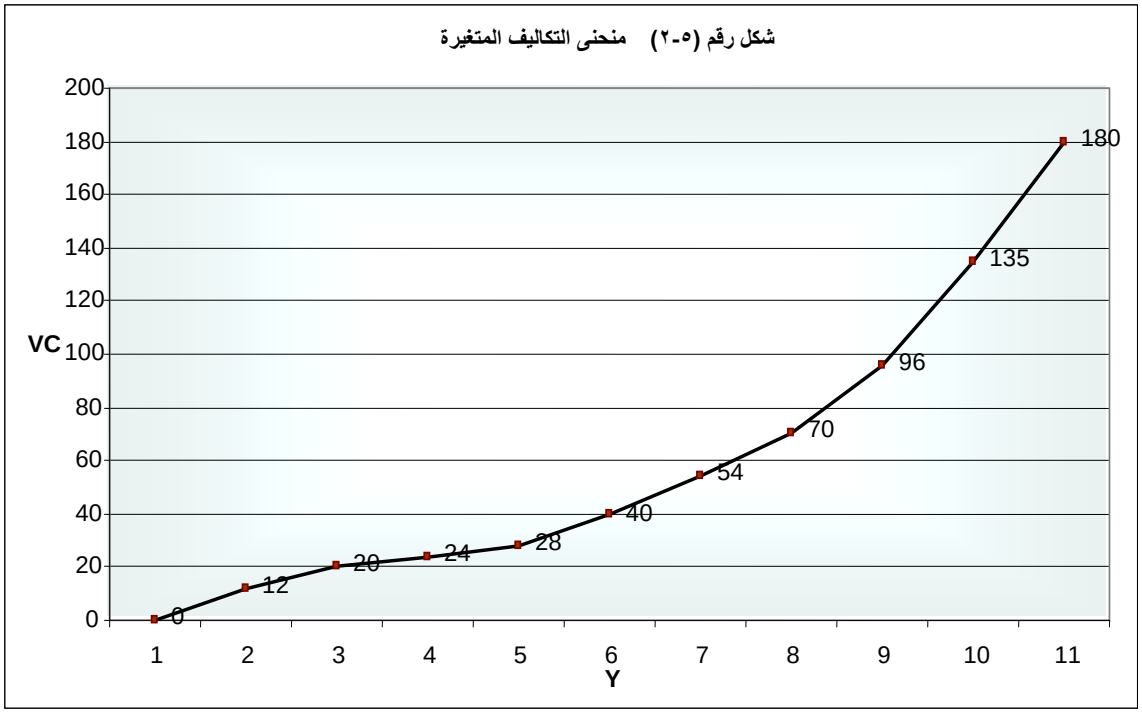
$$VC = w.L$$

حيث :

W= أجر العامل أو ثمن العنصر المتغير ($Wage$)

L= عدد الوحدات المستخدمة من العنصر المتغير ($Labor$)

وباستخدام البيانات المعطاه في الجدول (٥،١) لكل من التكاليف المتغيرة VC والإنتاج Y نحصل على منحنى التكاليف المتغيرة كما هو موضح بالشكل رقم (٥،٢) الذي يمثل العلاقة الطردية بين التكاليف المتغيرة وحجم الإنتاج.



<u>مما سبق يتضح أن دالة التكاليف المتغيرة تتميز بأربع خصائص هامة، وهي:</u>

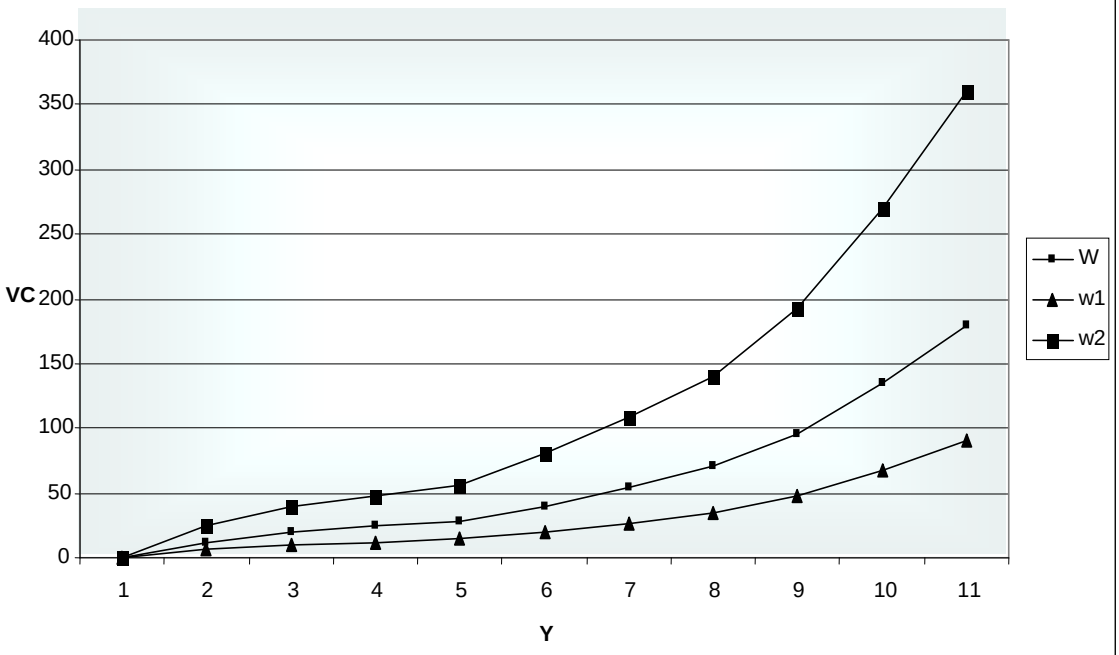
١- أنها تبدأ من نقطة الأصل، وذلك لأنها تتغير مباشرة مع حجم الإنتاج، فعندما يكون حجم الإنتاج صفراً فإن VC ستكون صفراً.

٢- أنها مشتقة من ثمن أو أجر محدد للعنصر الإنتاجي المتغير، وعليه فإذا إنخفض هذا السعر أو إرتفع فإن منحنى VC سينتقل إما إلى الأعلى في حالة الزيادة أو إلى الأسفل في حال النقصان شكل (٥،٣).

٣- شكل دالة التكاليف المتغيرة يتحدد تبعاً لشكل دالة الإنتاج الكلي، فعندما يكون الإنتاج الكلي TP متزايداً فإن التكاليف المتغيرة تتزايد بمعدل متناقص، ولكن عندما يبدأ الإنتاج الكلي بالتزايد بمعدل متناقص فإن التكاليف المتغيرة تتزايد بمعدل متزايد، أي أن:

- زيادة الإنتاج (Y) بمعدل متزايد يؤدي إلى زيادة التكاليف بمعدل متناقص.
- زيادة الإنتاج(Y) بمعدل متناقص يؤدي إلى زيادة التكاليف بمعدل متزايد.

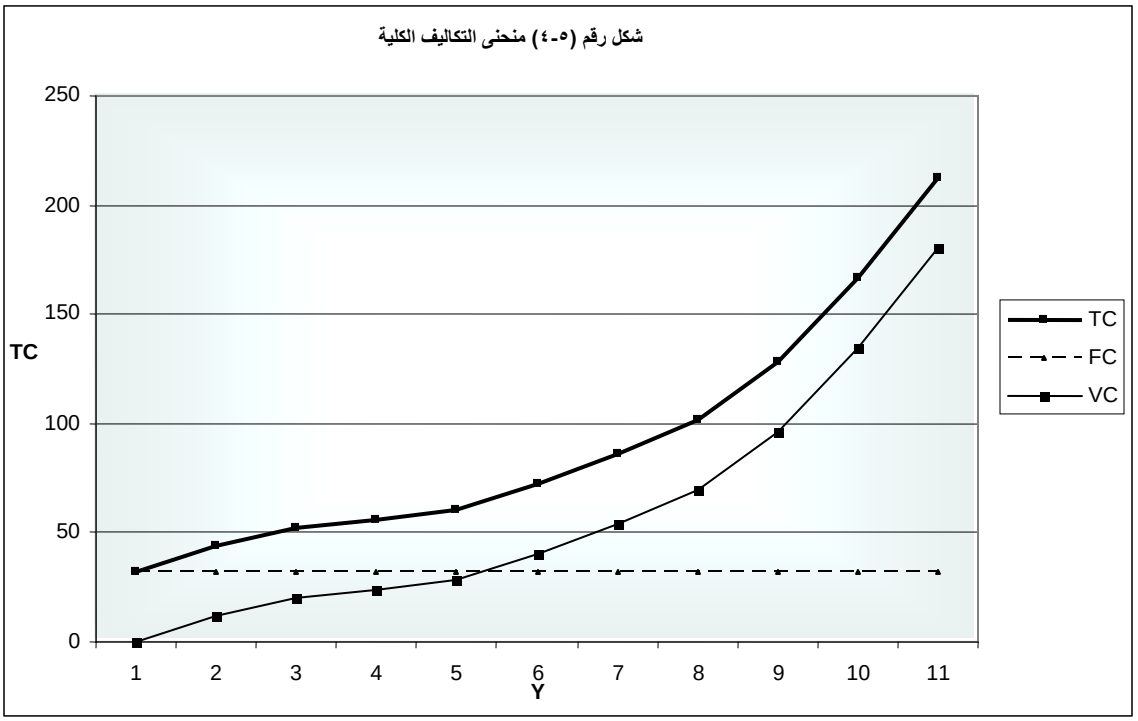
شكل رقم (٥-٣) التكاليف المتغيرة مشتقة من سعر محدّد للعنصر الإنتاجي



٤- دالة التكاليف المتغيرة مشتقة بافتراض مستوى معين من التقنية أو التكنولوجيا، أي أن دالة إنتاج محدّدة مقابلة لدالة التكاليف، وبالتالي فإن أي تغير في مستوى التقنية سيترتب عليه إنتقال في منحنى الإنتاج الكلي ومن ثم إنتقال منحنى التكاليف المتغيرة.

أما الصورة التي تأخذها التكاليف الكلية *Total Costs* في الأجل القصير فإنها تتفق مع التكاليف المتغيرة الكلية TVC إذ هي عبارة عن الجمع الرأسي للتكاليف الثابته (العمود الثاني) والتكاليف المتغيرة (العمود الثالث) وأنه لاتأثير للتكاليف الثابته على هذا الشكل. وبالمثل فإن منحنى

التكاليف يتمثل في حاصل جمع كل من AFC في الشكل (٥،١) AVC في الشكل (٥،٢)، وهذا مايوضحه الشكل (٥،٤) التالي:



من الشكل (٥،٤) يتضح مايلي:

١- منحنى التكاليف الكلية TC يأخذ نفس شكل منحنى التكاليف المتغيرة، وذلك لأن أي زيادة في الإنتاج(Y) تتطلب زيادة في التكاليف المتغيرة فقط دون الثابتة وهذا يترتب عليه زيادة التكاليف الكلية بنفس مقدار الزيادة في التكاليف المتغيرة، أي أن:

$$\uparrow TC = F\overline{C} + \uparrow VC$$

٢- منحنى التكاليف الكلية TC يقع دائماً فوق منحنى التكاليف المتغيرة VC وذلك بمقدار يساوي التكاليف الثابتة عند جميع مستويات الإنتاج.

٣- منحنى التكاليف الكلية TC لايبدأ من نقطة الأصل ولكن من نقطة إلتقاء منحنى FC مع المحور الرأسي، وهذا يعني أنه عندما يكون حجم الإنتاج يساوي صفراً فإن المنشأة تتحمل تكاليف بمقدار يساوي FC.

تـــكاليف الـــــوحدة في الـــــمدى الـــــــقصير

التكاليف المتوسطة والحدية

يمكن كما هو موضح بالأشكال السابقة والجدول السابق اشتقاق متوسط التكاليف المتغيرة AVC، ومتوسط التكاليف الثابتة AFC ، متوسط التكاليف الكلية ATC والتكاليف الحدية MC كالتالي:

متوسط التكاليف الثابتة (AFC)

متوسط التكاليف الثابتة هي عبارة عن "تكلفة الحصول على العنصر الإنتاجي الثابت لكل وحدة من الإنتاج"، أو بمعنى آخر نصيب كل وحدة إنتاج من التكاليف الثابتة، وهي عبارة عن خارج قسمة التكاليف الثابتة الكلية على عدد وحدات الناتج (عمود رقم ٦) ولذلك فإن متوسط التكاليف الثابتة يتناقص باستمرار كما هو موضح بالشكل رقم (٥,٥) حيث أنه يتم توزيع التكاليف الثابتة على عدد كبير من وحدات الناتج. فمثلاً تقدر متوسط التكاليف الثابتة اللازمة لإنتاج وحدتين من الناتج كما يلي:

$$AFC = \frac{TFC}{Y} = \frac{32}{2} = 16$$

في حين يبلغ متوسط التكاليف الثابتة عند إنتاج ٨ وحدات من الناتج القدر ٤ ريال كالتالي:

$$AFC = \frac{TFC}{Y} = \frac{32}{8} = 4$$

مـتوسط الـــتكاليف الـــمتغيرة (*AVC*)

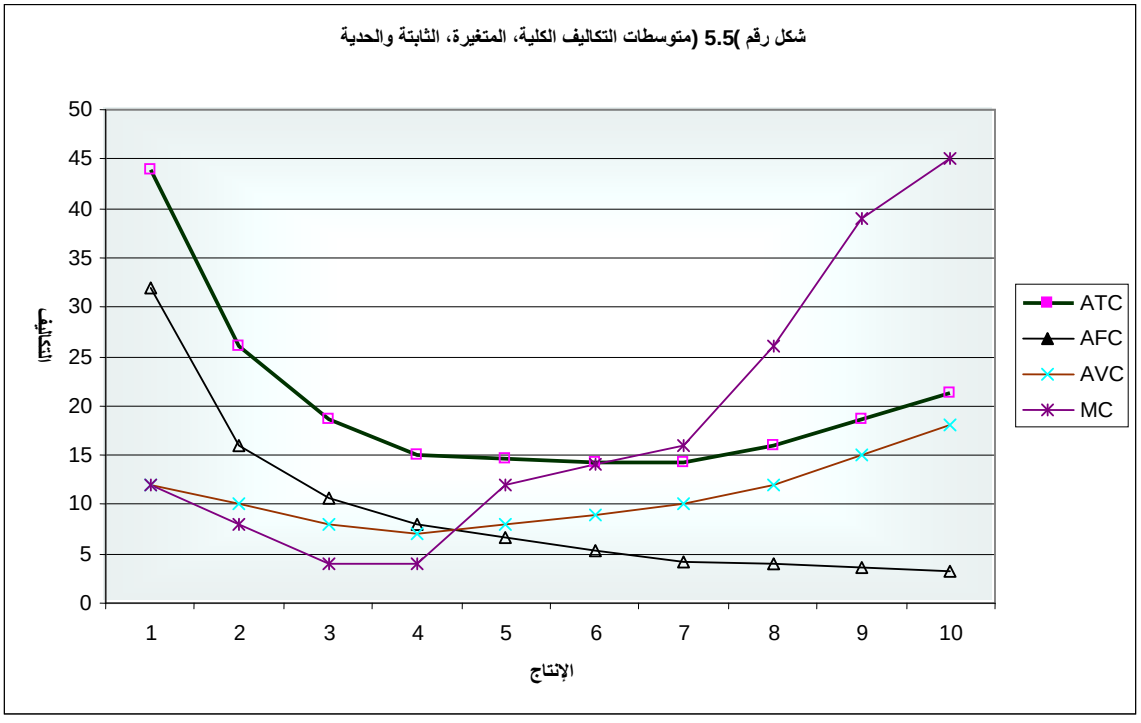
متوسط التكاليف المتغيرة عبارة عن "تكلفة الحصول على العنصر الإنتاجي المتغير لكل وحدة من الإنتاج" أو نصيب كل وحدة إنتاج من التكاليف المتغيرة. ويتم حسابها بقسمة التكاليف المتغيرة الكلية على عدد وحدات الناتج. ويختلف شكل دالة متوسط التكاليف المتغيرة وفقاً لكمية الإنتاج ووفقاً لشكل دالة الإنتاج. من العمود رقم (٧) للجدول (٥,١) يتضح أن متوسط التكاليف المتغيرة عندما يكون عدد وحدات الناتج ٢ هو :

$$AVC = \frac{TVC}{Y} = \frac{20}{2} = 10$$

في حين أن متوسط التكاليف المتغيرة عند ٨ وحدات من الناتج هي:

$$AVC = \frac{TVC}{Y} = \frac{96}{8} = 12$$

شكل رقم (5.5) متوسطات التكاليف الكلية، المتغيرة، الثابتة والحدية



وكما هو واضح من المعادلات السابقة عندما تكون كمية الناتج تساوي صفر ($Y=0$) فإن متوسط التكاليف الثابتة ومتوسط التكاليف المتغيرة من ثم متوسط التكاليف الكلية لا يمكن حساب قيمها.

كما يلاحظ أن شكل دالة متوسط التكاليف المتغيرة يرتبط بطريقة عكسية مع شكل دالة الناتج المتوسط الفيزيقي إذ أنه عندما تكون الأخيرة متزايدة نجد أن متوسط التكاليف المتغيرة متناقصة.

كذلك عندما يصل الناتج المتوسط AP إلى أقصاه نجد أن متوسط التكاليف المتغيرة AVC تصل إلى أدناها. وكذلك عندما يكون متوسط التكاليف المتغيرة متناقصة فإن هذا يدل على زيادة كفاءة المورد المستخدم في الإنتاج وبهذا فإن الكفاءة تصل إلى أقصاها من إستخدام هذا المورد عندما تصل متوسط التكاليف المتغيرة لأدنى نقطة لها. ومن هذا يمكن توضيح العلاقة بين متوسط التكاليف المتغيرة والناتج المتوسط الفيزيقي كما يلي:

$$AVC = \frac{TVC}{Y} = \frac{P_X X}{Y}$$

$$= P_X \frac{X}{Y} = \frac{P_X}{APP}$$

حيث: X= كمية المورد المستخدم، Y= كمية الناتج، P_X= سعر الوحدة من المورد، $\frac{X}{Y}$ = مقلوب APP. وهكذا فإنه كما يستخدم متوسط الناتج الفيزيقي لقياس كفاءة إستخدام المورد باستخدام دوال الإنتاج فإن متوسط التكاليف المتغيرة تستخدم أيضاً لقياس كفاءة إستخدام هذا المورد ولكن باستخدام دوال التكاليف.

مـتوسط الــتكاليف الـــكلية (*ATC*)

متوسط التكاليف الكلية عبارة عن "تكلفة الحصول على العنصر الإنتاجي الثابت والمتغير لكل وحدة إنتاج"، أو بمعنى آخر نصيب كل وحدة إنتاج من التكاليف الكلية، ويتضح من بيانات الجدول رقم (٥,١) أيضاً أن متوسط التكاليف الكلية يمكن اشتقاقها بطريقتين هي:

أ) جمع متوسط التكاليف الثابتة مع متوسط التكاليف المتغيرة إذ أن:

$$TC = TFC + TVC$$

بقسمة الأطراف على عدد وحدات الناتج Y فأن:

$$\frac{TC}{Y} = \frac{TFC}{Y} + \frac{TVC}{Y}$$

$$ATC = AFC + AVC$$

ومن بيانات الجدول (٥,١) ووفقاً لهذه الطريقة فإن ATC عندما تبلغ وحدات الناتج ٦ هو:

$$ATC = 5.3 + 9 = 14.3$$

ب) مباشرة بقسمة التكاليف الكلية على عدد وحدات الناتج أي أن:

$$ATC = \frac{TC}{Y}$$

فعندما يبلغ الناتج ٦ وحدات فأن التطبيق المباشر لإيجاد ATC هو:

$$ATC = \frac{TC}{Y} = \frac{86}{6} = 14.3$$

هذا ويتوقف شكل دالة متوسط التكاليف الكلية على شكل دالة الإنتاج تماماً كما في متوسط التكاليف المتغيرة، إذ أن متوسط التكاليف الكلية ينخفض عندما ترتفع دالة الإنتاج الكلي.

كما يلاحظ أن الانخفاض الحادث في الجزء الأول الهابط إلى الأسفل في دالة متوسط التكاليف الكلية إنما يرجع إلى إنخفاض نصيب الوحدة المنتجة من التكاليف الثابتة و إلى إرتفاع كفاءة الوحدات الأولى من المورد الإنتاجي.

ولكن بعد حد معين فإن كفاءة المورد الإنتاجي تبدأ في الإنخفاض (لظهور أثر قانون تناقص الغلة) بإستمرار إضافة وحدات متتالية منه لإنتاج مزيد من الناتج، لذلك تبدأ متوسط التكاليف الكلية (وكذلك متوسط التكاليف المتغيرة) في الإرتفاع.

الـــتكاليف الـــحدية (*MC*)

تعرف التكاليف الحدية *Marginal Cost* بأنها مقدار الإضافة للتكاليف الكلية الناتجة من زيادة الإنتاج بوحدة واحدة. أو بمعنى آخر فهي تكاليف إنتاج وحدة إضافية من الناتج (لاحظ الوحدة لا تعني الواحد وإنما قد تكون الوحدة حجمها ٢) ووفقاً لهذا التعريف فإن :

$$MC = \frac{\partial TC}{\partial Y}$$

حيث أن :

$$TC = TFC + TVC$$

فإن :

$$MC = \frac{\partial TC}{\partial Y} = \frac{\partial TFC}{\partial Y} + \frac{\partial TVC}{\partial Y}$$

وحيث أن معدل التغير في *TFC* يساوي الصفر لأنها تعبر عن التكاليف الثابتة فإن:

$$MC = \frac{\partial TVC}{\partial Y}$$

وبهذا يتضح أن التكاليف الحدية يمكن الحصول عليها إما من خلال معدل تغير التكاليف الكلية أو من خلال معدل تغير التكاليف المتغيرة فمن الجدول رقم (٥،١) نجد أن التكاليف الحدية فيما بين الوحدتين ٣،٤ هي :

$$MC = \frac{\partial TC}{\partial Y} = \frac{28-24}{4-3} = \frac{4}{1} = 4$$

وباستخدام القاعدة الأخرى يمكن إيجاد التكاليف الحدية فيما بين الوحدتين ٣،٤ كما يلي:

$$MC = \frac{\partial TVC}{\partial Y} = \frac{28-24}{4-3} = \frac{4}{1} = 4$$

هذا ويتوقف شكل منحنى التكاليف الحدية على شكل منحنى الناتج الحدي إذ العلاقة عكسية بينهما حيث يصل منحنى التكاليف الحدية إلى أدنى نقطة له عندما يصل منحنى الناتج الحدي لأقصاه، وبالتالي فإن العلاقة الرياضية بينهما هي:

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Y} = \frac{\Delta TVC}{\Delta Y}$$

وحيث أن التكاليف تساوي عدد وحدات العنصر(X) مضروباً في ثمن الوحدة من هذا العنصر(P_x) أي أن:

$$TVC = P_X X$$

ولذلك فإن:

$$MC = P_X \frac{\Delta X}{\Delta Y}$$

وحيث أن :

$$\frac{1}{MPP} = \frac{\Delta X}{\Delta Y}$$

فإن:

$$MC = P_X \frac{1}{MPP}$$

حيث:

MPP = الناتج الحدي الفيزيقي،

P_X= سعر الوحدة من المورد.

وعليه فإن التغير في التكاليف المتغيرة الكلية فيما بين وحدتين للإنتاج يساوي التغير في كمية المورد المضاف (ΔX) مضروباً في سعر الوحدة من هذا المورد، وهو يساوي سعر الوحدة من المورد المضاف مقسوماً على الناتج الحدي لهذا المورد.

كما هو الواضح من المعادلة أن العلاقة بين MPP,MC هي علاقة عكسية.

الباب السادس

٦,١ تحديد الحجم الأمثل من مورد الإنتاج لدالة إنتاج ذات مورد متغير واحد

٦,٢ معظمة أرباح المنتج

١- عن طريق تحديد الحجم الأمثل للموارد.

٢- عن طريق تحديد الحجم الأمثل للإنتاج.

٦,٣ معظمة الأرباح بتحديد الحجم الأمثل للمورد

تحديد الحجم الأمثل للموارد باستخدام المعيار الكلي

تحديد الحجم الأمثل للموارد باستخدام المعيار الحدي

٦,٤ معظمة الأرباح بتحديد الحجم الأمثل للإنتاج

إستخدام المعيار الكلي:

إستخدام المعيار الحدي:

٦,٥ مقارنة معظمة الأرباح باستخدام وحدات المورد و باستخدام وحدات الناتج

٦,٦ التوازن في المدى القصير

٦,٧ معظمة الأرباح ومعظمة الناتج

٦,٨ منحنى الطلب لعنصر الإنتاج المتغير

٦,٩ تكلفة الفرصة البديلة و منطقة الموارد النادرة

تـحديد الـحجم الأمـثل من مـورد الإنـتاج لـدالة إنـتاج ذات مـورد مـتغير واحـد

تبين من دراسة منحنيات الناتج الكلي والمتوسط والحدي *Total, Average and Marginal Product Curves* وكذلك دراسة المرونة الإنتاجية *Elasticity of Production* أن الإنتاج يمر بثلاث مراحل، الأولى والثالثه مرحلتين غير إقتصاديتين والثانيه هي المرحلة الإقتصادية. وهذا يعني أن القدر الواجب إستخدامه من العنصر الإنتاجي المتغير *Variable Input* مع العنصر الإنتاجي الثابت *Fixed(Constant) Inputs* محصور بين حد أدنى وهو الحد الذي تكون عنده المرونة الإنتاجية أقل من أو مساوية للوحدة و بين حد أقصى وهو الحد الذي تكون عنده المرونة الإنتاجية أكبر من أو مساوية للصفر $0 \le \varepsilon \le 1$. ولكن كيف يمكن لمتخذ القرار تحديد القدر الأمثل الواجب إستخدامه من العنصر الإنتاجي المتغير؟

فعلى سبيل المثال مربي الدواجن قد يحتاج لمعرفة العدد الأمثل من الصوص الذي يجب أن يربيه في الحظيرة أو الحجم الأمثل من العليقة التي يجب أن تعطى للبقرة الحلوب للحصول على أعلى ناتج ممكن من الحليب. والمزارع قد يواجه بضرورة معرفة كمية السماد المثلى الواجب إضافتها إلى الهكتار من الأرض المزروعة بالقمح. وتأتي كل هذه التساؤلات نظراً لمحدودية الموارد المتاحة ورغبة المزارع أو المدير المزرعي في توظيف (منطقة) *Allocate* هذه الموارد بالطريقة التي تحقق هدفه بين مختلف الاستعمالات البديلة *Alternatives* التي يمكن توجيه هذه الموارد إليها.

يمكن حصر الإجابة على مثل هذه التساؤلات في الإجابة على كيفية منطقة الموارد والتي تعرف في حالتنا هذه بالعلاقة الموردية – الناتجية *FACTOR – PRODUCT RELATIONSHIP* والتي تتوقف إلى حد كبير على هدف المدير التي سنفترض أنها تتركز على تحقيق الكفاءة الإقتصادية *Economic Efficiency* الممكنة والتي تعني معظمة الأرباح *Maximizing the Profits* .

مـــعظمة أربـــاح الـــــمنـتج

سنفترض في هنا سيادة المنافسة الكاملة *Perfict Competetion* --إلا إذا ذكرنا خلاف ذلك-- في كل من أسواق الموارد(x) وأسواق النواتج(y)، بالإضافة إلى المعرفة المؤكدة للعلاقة المواردية الناتجية، فضلاً عن إفتراضنا أن العمل في المنشأة يخص المدى القصير *Short Run*.

هناك طريقتان لتحقيق هدف المنشأة هما:

١ - تحديد الحجم الأمثل للموارد (X's).

٢ - تحديد الحجم الأمثل للإنتاج (Y's).

بالنظر إلى الطريقتين سنجدهما وجهين لعملة واحدة، إذ عند تحديد مستوى الإنتاج المعظم للربح نستطيع مباشرةً تحديد كمية المورد المعظمة لهذا الربح وذلك لسيادة المنافسة الكاملة *Perfect Competion* وثبات أسعار الموارد.

أولا: معظمة الأرباح بتحديد الحجم الأمثل للموارد (X's).

عادةً ما يطلق على كمية الموارد (x's) المعظمة للربح بالكمية المثلى (*Optimum Amount of Inputs*) وتعرف الكمية المثلى (الحجم الأمثل) من مورد معين بأنها "تلك الكمية التي تعظم الربح في المدى القصير من خلال الإنتاج". وعندما تتحدد تلك الكمية المثلى من المورد المتغير في المدى القصير فإن الطريقة الوحيدة التي تزيد من الربح بعد ذلك هي عن طريق تغيير التقنية أو من خلال تغير واحد أو أكثر من الموارد الثابتة والمؤثرة في العملية الإنتاجية كالآلات والأرض مثلاً.

تحديد الحجم الأمثل للموارد باستخدام المعيار الكلي

يقصد بالمعيار الكلي هنا الإيرادات الكلية *Total Revenues* والتكاليف الكلية *Total Costs* حيث تعظم الأرباح *Maximiziing Profits* عندما يعظم الفرق بين الإيرادات الكلية *TR* والتكاليف الكلية *TC*.

من بيانات الجدول (٦,١) حيث التكاليف الثابتة (TFC) = ١٠٠٠ ريال، وبفرض أن متوسط سعر الوحدة من الناتج P_y يساوي ٢٠ ريال أي (P_y=20) ومتوسط سعر الوحدة من المورد P_x يساوي ١٠٠ ريال أي (P_x=100) فإنه يمكن تحديد كمية المورد التي عندها يكون صافي العائد (الربح) أقصى ما يمكن.

حيث أن:

الربح *Profit* **(صافي الإيراد)** = (الإيراد الكلي – التكاليف الكلية) $\Pi = TR - TC$

= (قيمة الناتج – التكاليف الكلية) $= P_y.y - TC$

ويعبر عن ذلك رياضياً كما في المعادلة التالية:

$$\Pi = Y.P_Y - TC \qquad (٦,١)$$

حيث أن التكاليف الكلية TC هي إجمالي التكاليف الثابتة والمتغيرة فإن المعادلة (٦,١) يمكن إعادة كتابتها كالتالي:

$$\Pi = Y.P_Y - (TFC + TVC) \qquad (٦,٢)$$

حيث TVC عبارة عن كمية المورد مضروبة في سعر الوحدة من المورد($P_x.X$) فإن المعادلة (٦,٢) يمكن إعادة كتابتها كما يلي:

$$\Pi = Y.P_Y - TFC - P_X.X \qquad (٦,٣)$$

ومن الجدول (٦,١) يتضح أنه إذا كان الهدف هو تعظيم صافي العائدات (الربح) فإن الحجم الأمثل لعنصر الإنتاج المتغير يساوي **١٣** وحدة لأنه عندها يكون صافي الربح أكبر ما يمكن (**٨٤٦ ريال**)

مع ملاحظة أن إستعمال آخر للمورد(أكبر من ١٣ وحدة أو أقل من ١٣ وحدة) فإن ذلك سوف يؤدي إلى إنخفاض.

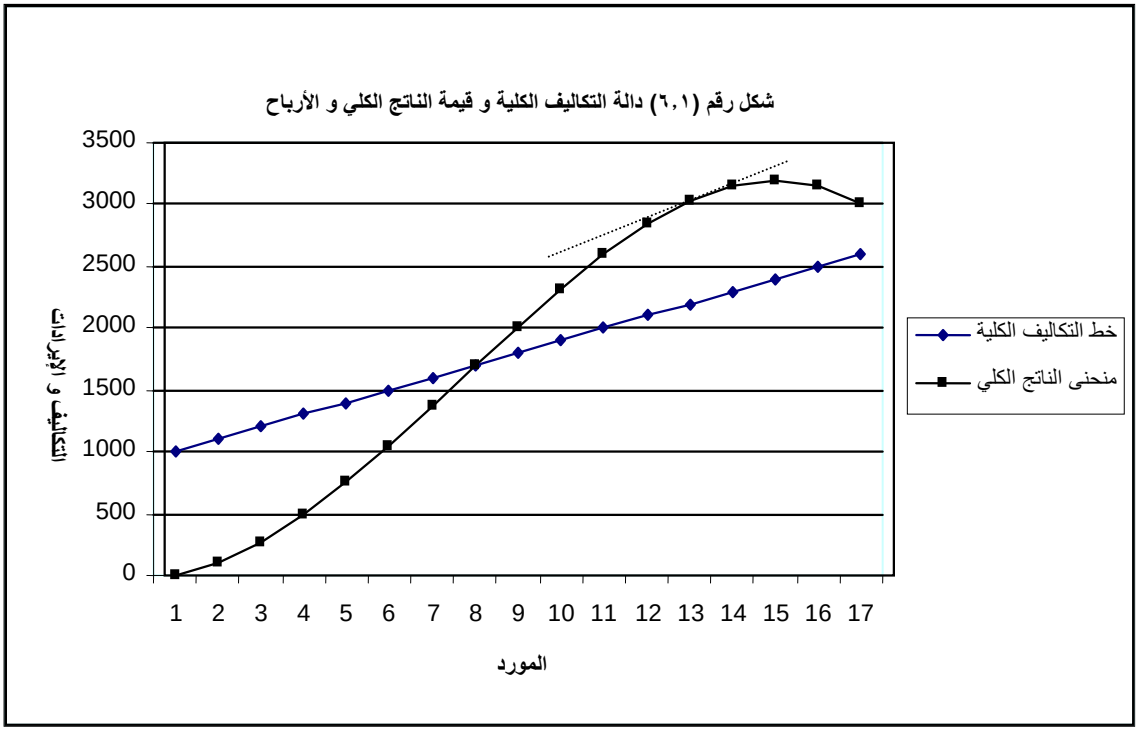
عند هذا المستوى من إستخدام المورد نجد أن المنتج استطاع أن يغطي التكاليف المتغيرة كافة و التي تبلغ ١٣٠٠ ريال بالإضافة إلى التكاليف الثابتة والتي تبلغ ١٠٠٠ ريال ثم يحصل على فائض (ربح أو صافي عائد) يقدر بمبلغ ٨٤٦ ريال. في هذه الحالة يقال أن المنتج حقق ربح اقتصادي فوق عادى في المدى القصير.

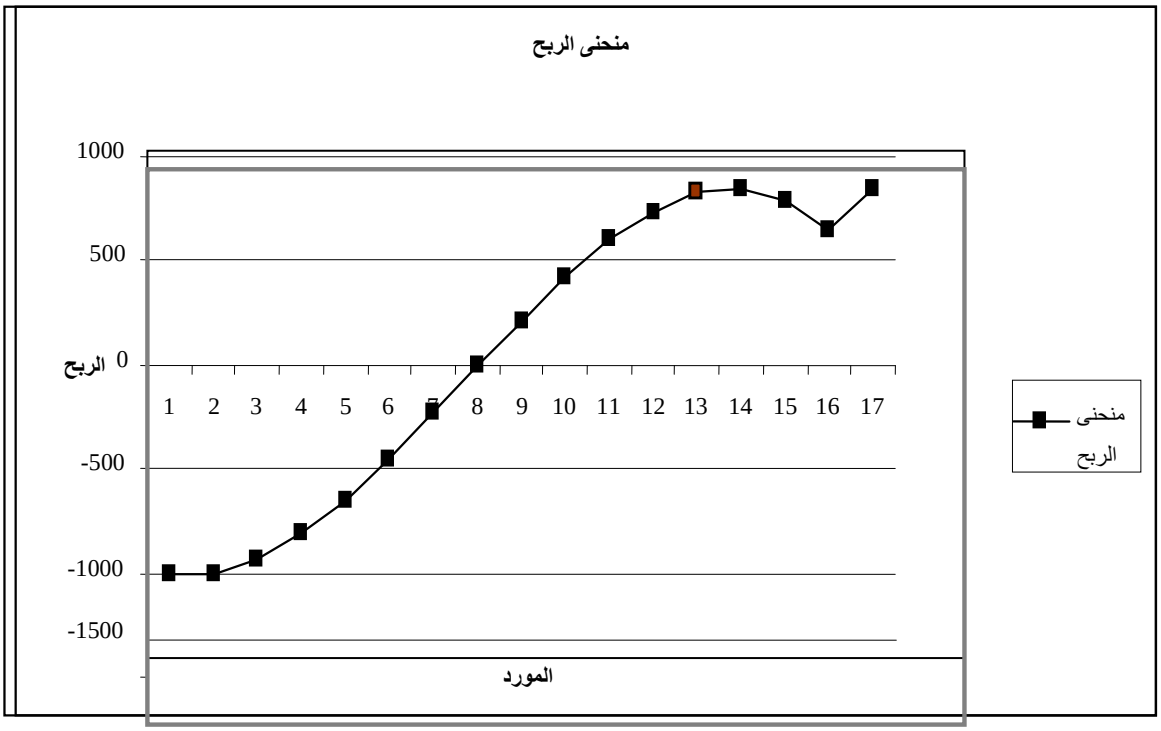
جدير بالذكر هنا أن كمية المورد المعظمة للربح قد لا يتحقق عندها أقصى ناتج ممكن. أي بمعنى آخر أن كمية الناتج المعظمة للربح ليست هي بالضرورة أقصى ناتج ممكن، ويتضح هذا من خلال بيانات الجدول 6.1، إذ تصل الأرباح إلى أقصاها عند إنتاج ١٥٧,٣ وحدة من الناتج وذلك من خلال تشغيل ١٣ وحدة من المورد المتغير في حين أن أقصى ناتج ممكن هو ١٥٩,٦ وحدة يتم الحصول عليه من خلال تشغيل ١٤ وحدة من المورد المتغير كما أنها تعطي ربح أقل قدره ٧٩٢ ريال بالمقارنة ب١٣ وحدة موردية.

بالتوقيع البياني لدالة التكاليف الكلية ودالة قيمة الناتج الكلي (عمود رقم ٦،٥ في الجدول (٦،١)) يمكن تحديد كمية المورد المعظمة للربح بيانياً والتي تتحقق عند أكبر مسافة (فرق) بين دالة الإيراد الكلي ودالة التكاليف الكلية في المدى القصير وذلك عند المستوى ١٣ وحدة من المورد المتغير (شكل ٦،١).

جدول رقم (٦،١) الإيرادات الكلية والتكاليف الكلية وصافي العائد بالريال

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
المورد ***X***	***الناتج*** ***Y***	***التكاليف الثابته الكلية*** ***TFC***	***التكاليف المتغيرة الكلية*** ***TVC***	***التكاليف الكلية*** ***TC***	***قيمة الناتج*** $TVP=P_Y Y$	***الربح*** ***TVP-TC***
0	0	1000	0	1000	0	-1000
1	4.9	1000	100	1100	98	-1002
2	13.2	1000	200	1200	264	-936
3	24.3	1000	300	1300	486	-814
4	37.6	1000	400	1400	752	-648
5	52.5	1000	500	1500	1050	-450
6	68.4	1000	600	1600	1368	-232
7	84.7	1000	700	1700	1694	-6
8	100.8	1000	800	1800	2016	216
9	116.1	1000	900	1900	2322	422
10	130.0	1000	1000	2000	2600	600
11	141.9	1000	1100	2100	2838	738
12	151.2	1000	1200	2200	3024	824
13	**157.3**	**1000**	**1300**	**2300**	**3146**	**846**
14	159.6	1000	1400	2400	3192	792
15	157.5	1000	1500	2500	3144	644
16	150.0	1000	1600	2600	3008	840


شكل رقم (٦،١) دالة التكاليف الكلية و قيمة الناتج الكلي و الأرباح
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
التكاليف و الإيرادات
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
المورد
خط التكاليف الكلية
منحنى الناتج الكلي


منحنى الربح
1000
500
0
-500
-1000
-1500
الربح
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
المورد
منحنى الربح

تـحديد الـــحجم الأمـــثل للـــموارد باســـتخدام الـــمعيار الـــحدي

يقصد بالمعيار الحدي *Marginal Criteria* إستخدام القاعدة الحدية لمعظمة الأرباح والتي تشير إلى أنه يتم إستخدام وحدات متتالية من المورد($X's$) حتى تتساوى قيمة الناتج الحدي للمورد *Value Marginal Product* مع سعر الوحدة من هذا المورد(P_x) أي $VMP = P_x$ ويعبر عن ذلك رياضياً كما يلي:

بإعادة كتابة دالة الربح كما في المعادلة (٦,٣):

$$\Pi = Y.P_Y - TFC - P_X.X$$

لتحديد كمية المورد المعظم للربح يتم تفاضل دالة الربح π بالنسبة لوحدات هذا المورد أي أن:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X} = P_Y \frac{\partial Y}{\partial X} - P_X = 0$$

ومن ثم:

$$P_Y MPP - P_X = 0$$

وعليه فإن:

$$P_Y MPP = P_X \qquad (٦,٤)$$

أي أن:

$$VMP = P_X$$

حيث أن MPP يشير إلى الناتج الحدي الفيزيقي للمورد X في حين تشير P_Y, P_X إلى سعر الوحدة من الناتج و سعر الوحدة من المورد المتغير على الترتيب، في حين تشير VMP إلى قيمة الناتج الحدي للمورد.

وحيث أن قيمة الناتج الحدي للمورد (VMP) هي عبارة عن ميل دالة الإيراد الكلي (TVP) كما أن سعر الوحدة من المورد يشير إلى التكاليف الحدية (ميل دالة التكاليف الكلية بفرض خطية هذه الدالة) فإن المساواة بينهما تتحقق أيضاً عند إستخدام القدر ١٣ وحدة من المورد المتغير كما هو موضح في الأشكال السابقة ومن المعادلة (٦,٤) يتضح أن:

$$MPP = \frac{P_X}{P_Y}$$

وهي صيغة أخرى لاستخدام المعيار الحدي لبلوغ معظمة أرباح المنتج إذ تشير إلى ضرورة أن يتساوى الناتج الحدي الفيزيقي للمورد MPP_x مع مقلوب النسبة السعرية (لاحظ أن $\frac{P_Y}{P_X}$ تشير إلى كمية المورد X المشتراة عندما يتم بيع وحدة واحدة من الناتج Y).

يوجد طريقة أخرى لتحديد كمية المورد المعظم للربح وذلك بدلاً من تفاضل دالة الربح بالنسبة للمورد X فإنه بتفاضل دالة قيمة الناتج الكلي (TVP) بالنسبة للمورد X بالإضافة إلى تفاضل دالة التكاليف الكلية بالنسبة لهذا المورد وذلك من خلال الخطوات التالية:

أولاً:

دالة الإيراد الكلي (TVP) يعبر عنها بحاصل ضرب كمية الناتج Y في سعر الوحدة من الناتج P_Y كالآتي:

$$TVP = Y.P_Y \qquad (٦,٥)$$

وبمفاضلة الدالة (٦,٥) بالنسبة للمورد X ينتج أن:

$$\frac{\partial TVP}{\partial X} = \frac{\partial (Y.P_Y)}{\partial X}$$
$$= P_Y \frac{\partial Y}{\partial X}$$

وهذا يعني أن:

$$\frac{\partial TVP}{\partial X} = P_Y.MPP = VMP \qquad (٦,٦)$$

ثانياً:

من دالة التكاليف الكلية TC التالية

$$TC = TFC + TVC \qquad (٦,٧)$$

نجد أنه بتفاضل هذه الدالة بالنسبة للمورد X أن:

$$\frac{\partial TC}{\partial X} = \frac{\partial TVC}{\partial X} = \partial\left(\frac{XP_X}{dX}\right) = P_X \frac{\partial X}{\partial X} = P_X \qquad (٦,٨)$$

ومن خلال المساواة بين ميل دالة التكاليف وميل دالة الإيراد الكلي والذي يتحقق بمساواة المعادلتين (٦ و٨) نجد:

$$VMP = P_X \qquad (٦,٩)$$

وهي نفس النتيجة المتحصل عليها كما في المعادلة (٦,٤).

ثانياً: معظمة الأرباح بتحديد الحجم الأمثل للإنتاج

إستخدام المعيار الكلي:

عن طريق الإيرادات الكلية TR والتكاليف الكلية TC وذلك بتوقيع البيانات الخاصة بهم في الجدول رقم (٦,١) بالإضافة إلى البيانات الخاصة بالإنتاج (عمود رقم ٢،٥،٦) بيانياً كما في الشكل رقم (٦,٢) والذي يوضح أن أقصى ربح يتحقق عندما يكون الفرق بين الإيرادات الكلية[٩] والتكاليف الكلية أكبر مايمكن وذلك بإنتاج ١٥٧,٣ وحدة.

ويمكن الحصول على دالة الأرباح الكلية مباشرة من خلال توقيع بيانات العمود (٧) مع بيانات العمود رقم (٢) بالجدول رقم (١) بيانياً شكل رقم (٢). وفي هذه الحالة فإن الأرباح يعبر عنها بأنها دالة للإنتاج الكلي. هذا ويلاحظ أن هذه النتيجة متفقة مع النتيجة المتحصل عليها باستخدام الحجم الأمثل للمورد إذ أن الحجم الأمثل للمورد (حجم المورد المعظم للربح) يتحقق عند إستخدام ١٣ وحدة من المورد، وعند هذا القدر من المورد يتم إنتاج ١٥٧,٣ وحدة من الناتج.

[٩] **كثيراً ما نوجه بتعبير قيمة الناتج الكلي *TVP* وتعبير الإيراد الكلي *TR* فهل هناك فرق بينهما؟**

الإيراد الكلي TR هو دالة لوحدات الناتج $(P_Y Y)$ أما قيمة الناتج الكلي (TVP) فدالة لوحدات المورد $(P_Y F(X))$ و الاثنتان متساويتان، تماما كما يكون إجمالي الإنفاق دالة لوحدات المورد والتكاليف الكلية عندما تكون دالة للناتج والاثنتان متساويتان.

إستخدام المعيار الحدي:

وفي هذه الحالة تعتبر الأرباح دالة للإنتاج، ولهذا فإن الربح يمكن أن يعبر عنه بالمعادلة رقم (٦,٣) المعاد كتابتها كالتالي:

$$\begin{aligned}\Pi &= TR - TC \\ &= YP_Y - P_X X - TFC\end{aligned} \qquad (٦,١٠)$$

وحيث أن المورد X في المعادلة (٦,١٠) دالة للناتج Y أي بمعنى آخر:

$$X = F^{-1}(Y) \qquad (٦,١١)$$

وهو مايطلق عليه معكوس دالة الإنتاج في المرحلة (I & II) للإنتاج في قانون تناقص الغلة.

بإحلال المعادلة (٦,١١) في المعادلة (٦,١٠) ينتج أن:

$$\Pi = YP_Y - P_X F^{-1}(Y) - TFC \qquad (٦,١٢)$$

بتفاضل دالة الربح (٦,١٢) بالنسبة للناتج Y ينتج أن:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y} = P_Y - P_X \frac{\partial X}{\partial Y} = 0$$

ولذلك فإن :

$$P_Y - P_X \frac{1}{\frac{\partial Y}{\partial X}} = 0$$

ومن ثم :

$$P_Y - P_X \frac{1}{MPP} = 0 \qquad (٦,١٣)$$

ومن المعلوم أن التكاليف الحدية MC هي تفاضل دالة التكاليف الكلية TC بالنسبة للناتج Y أو تفاضل دالة التكاليف المتغيرة TVC بالنسبة للناتجY كما يلي:

$$MC = \frac{\partial TC}{\partial Y} = \frac{\partial TVC}{\partial Y}$$
$$= \frac{P_X(\partial X)}{\partial Y}$$
$$= P_X\left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right) \qquad (٦,١٤)$$
$$= \frac{P_X}{\frac{\partial Y}{\partial X}} = \frac{P_X}{MPP}$$

ومن المعادلتين (٦,١٣ و ٦,١٤) يتضح أنه عند التوازن:

$$P_Y = MC \qquad (٦,١٥)$$

وحيث أننا نعمل في ظل سيادة المنافسة الكاملة فإن سعر الوحدة من الناتج P_Y يساوي الإيراد الحدي MR فإن المعادلة رقم (٦,١٥) يعاد كتابتها كالآتي:

$$MR = MC \qquad (٦,١٦)$$

أي أن معظمة الأرباح تتحقق في ظل المنافسة الكاملة عندما يتساوى الإيراد الحدي للمنتج مع تكاليفه الحدية.

ويمكن الحصول على النتيجة نفسها في المعادلة رقم (٦,١٦) بالتطبيق المباشر في دالة الربح التالية:

$$\Pi = TR - TC$$

وذلك عن طريق تفاضل دالة الربح لوحدات الناتج كما يلي:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y} = \frac{\partial TR}{\partial Y} - \frac{\partial TC}{\partial Y} = 0$$

ولهذا فإن :

$$\frac{\partial TR}{\partial Y} - \frac{\partial TC}{\partial Y} = 0$$

أي أن :

$$MR = MC$$

اشكل رقم (٦-٢) لناتج المعظم للربح

مقارنة معظمة الأرباح باستخدام وحدات المورد باستخدام وحدات الناتج

رغم اختلاف الأسلوب الذي يُبنى عليه تحديد حجم الإنتاج المعظم للأرباح ونظيره حجم مورد الإنتاج المعظم لهذا الربح، إلاّ أن النتيجة واحدة و متشابهة كما سبق ووضحناه. وتلخيصاً لهذين الأسلوبين نستعرض الآتي:

أولاً:

بالنسبة لتحديد حجم المورد (X) المعظم للربح نستخدم القاعدة المعروفة بمساواة قيمة الناتج الحدي للمورد VMPبسعر الوحدة من هذا المورد P_X أي أن:

$$VMP = P_X$$

$$P_Y MPP = P_X$$

وبمعنى آخر فأن: $$P_Y \frac{\partial Y}{\partial X} = P_X$$

$$P_Y \partial Y = P_X \partial X \qquad (٦,١٧)$$

ويلاحظ أن $P_Y \partial Y$ تقيس العائد المضاف من زيادة الناتج، في حين يقيس $P_X \partial X$ الزيادة في التكاليف المضافة لزيادة إستخدام المورد المتغير.

ثانياً:

فيما يتعلق بقاعدة تحديد حجم الناتج المعظم للربح فتتلخص في ضرورة مساواة التكاليف الحدية MC بسعر الوحدة من الناتج P_Y أي أن:

$$P_Y = MC$$

ويمكن إعادة كتابة هذه المعادلة بالرجوع إلى المعادلة رقم (٦,١٤) كما يلي:

$$P_Y = \frac{P_X}{MPP}$$

$$= \frac{P_X}{\frac{\partial Y}{\partial X}}$$

أي أن :

$$P_Y \partial Y = P_X \partial X \qquad (٦,١٨)$$

وهي النتيجة نفسها المتحصل عليها في المعادلة رقم (٦,١٧) ولكن بالرغم من ذلك ونظراً لأن الزيادة في وحدات الناتج (y) تؤدي إلى زيادة الإيراد الكلي (TR) بما يساوي الإيراد الحدي (MR) وأن الزيادة في وحدات المورد (x) تؤدي إلى زيادة التكاليف الكلية (TC) بما يساوي التكاليف الحدية MC فإنه لا يجب استخدام قاعدة تساوي MR مع MC عند الإشارة إلى زيادة العوائد أو التكاليف بزيادة القدر من الموارد بوحدة واحدة. كذلك وبالطريقة نفسها لايجب ستخدام قاعدة قيمة الناتج الحدي VMP مع تكاليف المورد الحدية P_X عند الإشارة إلى زيادة العوائد أو التكاليف بزيادة القدر من الناتج بوحدة واحدة.

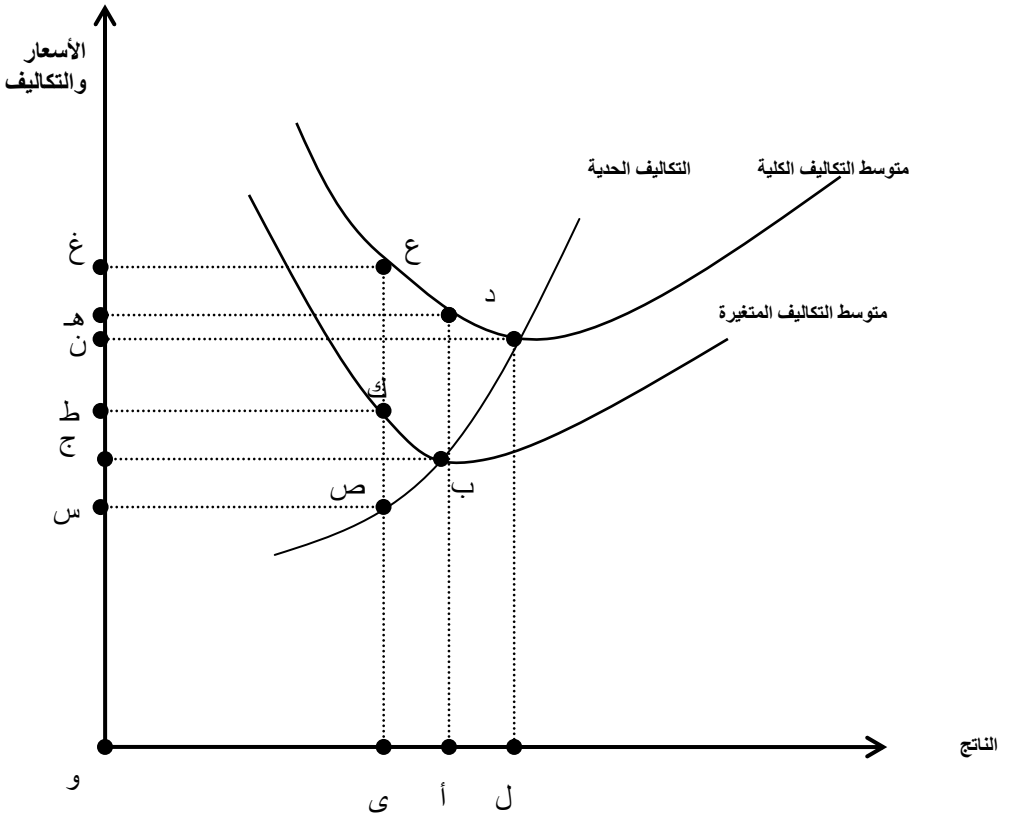
الـــتوازن في الـــــمدى الـــــقصير *Short-Run Equilibrium*

ذكرنا أن التوازن (معظمة الأرباح) للمنتج يتحقق عند مساواة التكاليف الحدية MC مع الإيراد الحدي MR الذي يساوى سعر الوحدة من السلعة P_Y وذلك في سوق المنافسة الكاملة.

وأمام هذه القاعدة فأن المنتج أمام حالتين:

<u>الأولى:</u>

تعرض المنتج لخسائر تساوي قيمة التكاليف الثابتة TFC وهذا يحدث عندما يواجه المنتج بسعر للوحدة المباعة مساوياً القدر (و ج) من الشكل (٦,٣)



شكل رقم ٦,٣ الناتج والتكاليف والأسعار في المدى القصير

وعند هذا السعر فإن الكمية التوازنية التي ينتجها المنتج هي القدر (**و أ**). عند هذا السعر وهذه الكمية تصبح إيرادات المنتج الكلية مساوية لمساحة المستطيل (**و أ ب ج**) التي هي عبارة عن حاصل ضرب الكمية المباعة (**و أ**) في سعر الوحدة المباعة (**و ج**) في حين تبلغ تكاليف الإنتاج الكلية المتوسطة التكاليف (**د أ أو و هـ د**)مضروبة في الكمية المباعة (**و أ**) ليصبح أجمالي تكاليف الإنتاج ممثلاً بمساحة المستطيل (**و أ د هـ**).

الفرق بين مساحة المستطيلين والمعبر عنها بمساحة المستطيل (**ج ب د هـ**) هي عبارة عن خسارة يتحملها المنتج تتمثل في مقدار التكاليف الثابتة الكلية لأن الإيرادات تغطي فقط تكاليف الإنتاج المتغيرة الكلية كما هو موضح بالشكل.

ورغم تحمل المنتج لهذه الخسارة إلاّ أنه ينصح بالإستمرار في الإنتاج لأن توقفه عن الإنتاج سوف لايعفيه من تحمل التكاليف الثابتة غير المرتبطة بالإنتاج عادةً، بل إذا توقف المنتج عن الإنتاج فإنه يفقده بعض الموارد الثابتة الأخرى كالعمالة الدائمة المدربة التي قد لايعوضها إذا أعاد نشاطه.

يأتي قرار المنتج في الإستمرار في مزاولة نشاطه في المدى القصير رغم تحمله خسائر تعادل التكاليف الثابتة في أن صموده دون غيره الذين تعرضوا لخسائر مثله سوف يحقق أرباحاً في المستقبل (المدى الطويل) يعادل على الأقل ما يعرف بالأرباح العادية.

الثانيه:

إذا انخفض السعر إلى مستوى (**و س**) فإن توازن المنتج وفقاً لقاعدة مساواة الإيراد الحدي (سعر الوحدة من الناتج) مع التكاليف الحدية يتحقق عند النقطة (**ص**) من الشكل (٦,٣)

عند هذا السعر المنخفض نجد أن الإيراد الكلي (مساحة المستطيل **و ى ص س**) لاتكفي حتى لسداد التكاليف المتغيرة الكلية (مساحة المستطيل **و ى ك ط**) وهنا يتحمل المنتج خسائر تساوي التكاليف الثابتة (مساحة المستطيل **ك ع غ ط**) وجزء من التكاليف المتغيرة (مساحة المستطيل **ص ك ط س**).

وفي هذه الحالة لا يوجد مبرر لدى المنتج في الاستمرار في العملية الإنتاجية ما دامت إيراداته لم تغط حتى التكاليف المتغيرة بل ويتحمل جزء منها بالإضافة إلى كل التكاليف الثابتة وهذا غير منطقي من الناحية الإقتصادية وعلى المنتج في هذه الحالة التوقف عن الإنتاج و تصفية نشاطه.

مما سبق يتضح أن الحد الأدنى من السعر الذي يقبل المنتج أن يعرض عنده هو السعر (**و ج**) وهو يعادل متوسط التكاليف المتغيرة وبالطبع أي سعر آخر أعلى من هذا المستوى سيكون في صالح المنتج مما يعني أن منحنى عرض المنتج في هذا المدى القصير هو ذلك الجزء الصاعد من التكاليف الحدية والواقع فوق متوسط التكاليف المتغيرة.

تلخيصاً لما سبق فإن توازن المنتج في المدى القصير يتطلب تحقيق ثلاث قواعد هي:

١- تساوي التكاليف الحدية MC مع الإيراد الحدي MR أو مع سعر الوحدة من الناتج P_Y أي أن:

$$MC = P_Y$$

٢- ان يكون سعر الوحدة من المورد P_x على الأقل مساوٍ لمتوسط التكاليف المتغيرة AVC:

$$P_x \geq AVC$$

٣- تصاعد منحنى التكاليف الحدية:

$$\frac{\partial MC}{\partial Y} \phi \ 0$$

مـــعظمـة الأربـــاح ومـعظمـة الـــناتج

ذكرنا أن معظمة الأرباح *Maximizing Profits* لاتتحقق بالضرورة عند نقطة معظمة الإنتاج *Maximizing Pproduction* ما يتبين ذلك من بيانات جدول رقم (٦،١) ويرجع ذلك إلى:

أ) يتضح من جدول رقم (٦،١) أن كفاءة العملية الإنتاجية تنخفض في المرحلة الثانية للإنتاج وقبل أن تنتهي هذه المرحلة نجد أن مايضيفه العنصر المضاف للتكاليف الكلية تفوق مايضيفه للإيراد الكلي.

ب) أن النسبة السعرية الموردية الناتجية ($\frac{P_x}{P_y}$) يمثلها خط مائل وغير موازٍ لأحد المحاور وبذلك يكون من المستحيل تماسه مع النقطة المعظمة للإنتاج وإنما قبلها. إذ أن المورد المتغير ليس حراً، ولو كان كذلك فإن خط السعر يصبح موازياً للمحور الأفقي ومن ثم الخط الموازى له يمس نقطة معظمة الإنتاج وهنا تتفق نقطة معظمة الإنتاج مع نقطة معظمة الربح.

مـنحنى الــطلب لـــعنصر الإنـــتاج الـــمتغير

تستخدم دوال الإنتاج *Production Function* عادة في إشتقاق منحنى طلب المزارع على عنصر الإنتاج المتغير(X). تماما كما هو الحال عند اشتقاقنا لمنحنى عرض المنتج من الجزء الصاعد من منحنى التكاليف الحدية MC فإن منحنى قيمة الناتج الحدي للمورد (VMP) والواقع في المرحلة الثانية للإنتاج يشكل دالة الطلب على هذا المورد.ويوضح الشكل رقم (٦,٤) كيفية إشتقاق منحنى طلب المورد المتغير الذي يشير إلى العلاقة العكسية بين الكمية المستخدمة من هذا المورد وبين النسبة السعرية الموردية الناتجية $\frac{P_x}{P_y}$.

ويتضح من هذه النسبة السعرية أنه كلما انخفضت فإن هذا الإنخفاض يعني إما إنخفاض سعر المورد P_x أو إرتفاع سعر الناتج P_y وكلاهما يشجع على زيادة الكمية المستخدمة من وحدات المورد المتغير(X) .

هذا وتشير كل نقطة على هذا المنحنى إلى الكمية من المورد(X) التي تحقق معظمة الأرباح للمنتج والتي عندها تتحقق المساواة بين الناتج الحدي للمورد مع النسبة السعرية كالآتي:

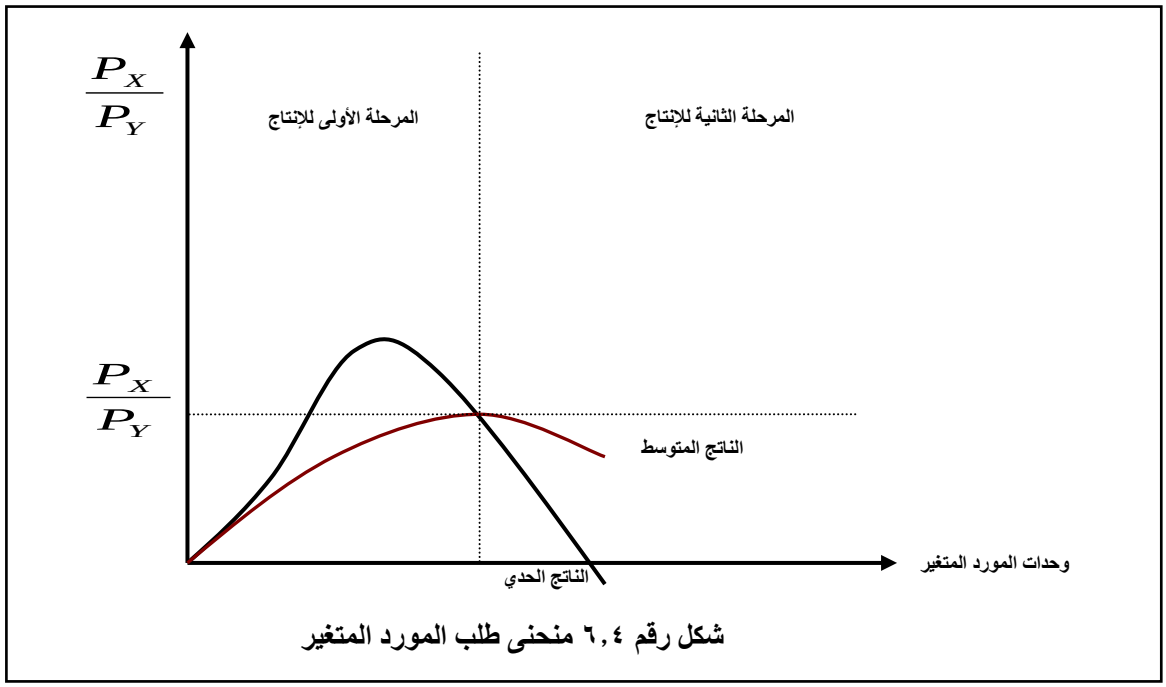
$$MPP_X = \frac{p_x}{p_y}$$

أو بمعنى آخر: $$MPP_X P_Y = P_X$$

أو عندما تتساوى قيمة الناتج الحدي للمورد المتغير VMP_x مع سعر الوحدة من هذا المورد P_x كالآتي:

$$VMP_X = P_X$$

هذا ويلاحظ أنه كثيراً ما يطلق على هذا النوع من الطلب بالطلب المشتق لأن الطلب على المورد عادة هو طلب مشتق من الطلب على الناتج لأنه إذا لم يكن الأخير فلا داعي للأول.



شكل رقم ٦,٤ منحنى طلب المورد المتغير

الباب السابع

٧,١ دالة الإنتاج لموردين

٧,٢ المسطح الإنتاجي *Production Surface*

٧,٣ منحنيات السواء *Isoquants*

٧,٤ خصائص منحنيات سواء الإنتاج:

١- إمكانية تجزئة الموارد:

٢- منحنيات السواء ذات إنحدار سالب:

٣- تحدب منحنيات سواء الإنتاج تجاه نقطة الأصل:

٤- منحنيات السواء لاتتقاطع:

٥- إمكانية إحلال الموارد:

٧,٥ أشكال منحنيات سواء الإنتاج *Isoquant Patterns*

أ)تناقص معدل الإحلال الحدي التقني:

ب) ثبات معدل الإحلال الفني التقني:

ج) عدم الإحلال الفني التقني:

٧,٦ مرونة إحلال الموارد *Elasticity of Factor Substitution*

دالـــة الإنـــتاج لـــــــــموردين

تطرقنا في الأبواب السابقة إلى القواعد الإقتصادية التي تحكم العملية الإنتاجية في حالة وجود عنصر واحد من عناصر الإنتاج مع ثبات باقي العناصر $y = f(x)$.ولكن هل هذه هي الطريقة الوحيدة لإنتاج المنتج (Y)؟

لذلك فإننا في هذا الباب سنحاول الإجابة على هذا السؤال وسوف نشتق القواعد الإقتصادية اللازمة في حالة وجود عنصرين متغيرين من عناصر الإنتاج $y = f(x_1, x_2)$ مع الإستعانة بالقواعد الأساسية التي تم التوصل إليها في المحاضرات السابقة. وللوصول إلى تلك القواعد سنفترض مايلي:

١ - سيادة المنافسة الكاملة Perfect Competion سواء في سوق موارد الإنتاج (X's) أو في سوق المنتجات (Y):

أي أن المنتج يستطيع شراء أية كمية من مورد الإنتاج بالسعر السائد في السوق، وكذلك يستطيع أن يبيع أي قدر من الإنتاج بالسعر السائد في السوق أيضاً، أي بمعنى آخر أن يكون منحنى عرض الموارد وكذلك طلب النواتج لانهائي المرونة للمنتج الفرد.

٢ - يوجد على الأقل عنصر إنتاجي بالعملية الإنتاجية يتصف بثبات الكمية المستخدمة منه:

أي أن تحليلنا يخضع لظروف المدى القصير *Short-run* ولهذا فإن قانون تناقص العائدات ينطبق على هذه الحالة والذي تنتفي صلاحيته في المدى الطويل.

وعلى ذلك فإن الدالة الإنتاجة التي سنبني عليها تحليلنا في هذا الجزء يمكن كتابتها كالتالي:

$$y = f(x_1, x_2 \mid \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_n)$$

حيث: y = الناتج، x_2, x_1 هما موارد الإنتاج المتغيرة التي تستعمل بالإضافة إلى الموارد الإنتاجية المفترض ثباتها وهي $x_3, \ldots, x_n$. وتكتب هذه الدالة في معظم الأحيان بالصورة التالية:

$$y = f(x_1, x_2) \qquad (٧,١)$$

المسطح الإنتاجي *Production Surface*

توضح الدالة رقم (٧،١) أن حجم معين من الإنتاج (Y) يمكن تحقيقه بأكثر من طريقة واحدة. وقد تبدو هذه الحقيقة واضحة في الزراعة إذ أن بعض المزراعين قد يستخدمون آلات أكثر وعمالة أقل مقارنةً بالبعض الآخر الذين يستخدمون عمالة أكثر وآلات أقل لتحقيق القدر نفسه من الناتج، وبين هاتين التوليفتين يوجد العديد من التوليفات من العمالة و الآلات للحصول على القدر نفسه من الناتج. ويوضح الجدول رقم (٧،١) مختلف التوليفات من الموردين X_2,X_1 التي تعطي القدر نفسه من الناتج Y.

جدول رقم (٧،١) مختلف التوليفات من الموردين X_2,X_1 للحصول على الناتج Y.

←X2 / X1 ↓	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	**0**	13	24	73	40	45	48	49	48	45	40
1	17	**30**	41	50	57	62	65	66	65	62	57
2	32	45	**56**	65	72	77	80	81	80	77	72
3	45	58	69	**78**	85	90	93	94	93	90	85
4	56	68	80	89	**96**	101	104	**105**	104	101	96
5	65	78	89	98	**105**	**110**	113	114	113	110	**105**[١٠]
6	72	85	96	**105**	112	117	**120**	121	120	117	112
7	77	90	101	110	117	122	125	**126**	125	122	117
8	80	93	104	113	120	125	128	129	**128**	125	120
9	81	94	**105**	114	121	126	129	130	129	**126**	121
10	80	93	104	113	120	125	128	129	126	125	**120**

[١٠] التوليفة ($x_1=5,x_2=10$) لاتتصف بالكفاءة الإنتاجية لأنه بالإمكان إنتاج القدر نفسه من الناتج ($y = 105$) بالكمية نفسها من x_1 وكمية أقل من x_2 . أي عند التوليفة ($x_1=5,x_2=4$) ومن ثم فإن هذه النقطة تقع على الجزء الموجب الميل لنفس منحنى الناتج المتساوي ومن ثم تستبعد من التحليل.

يتضح من الجدول (٧،١) أن إنتاج القدر ١٠٥ وحدة من الناتج يمكن تحقيقه من خلال التوليفات الخمس التالية من عنصري الإنتاج X_1,X_2 والموضحة بالجدول رقم (٧،٢) التالي:

جدول (٧،٢) التوليفات الموردية للحصول على الناتج Y البالغ ١٠٥ وحده

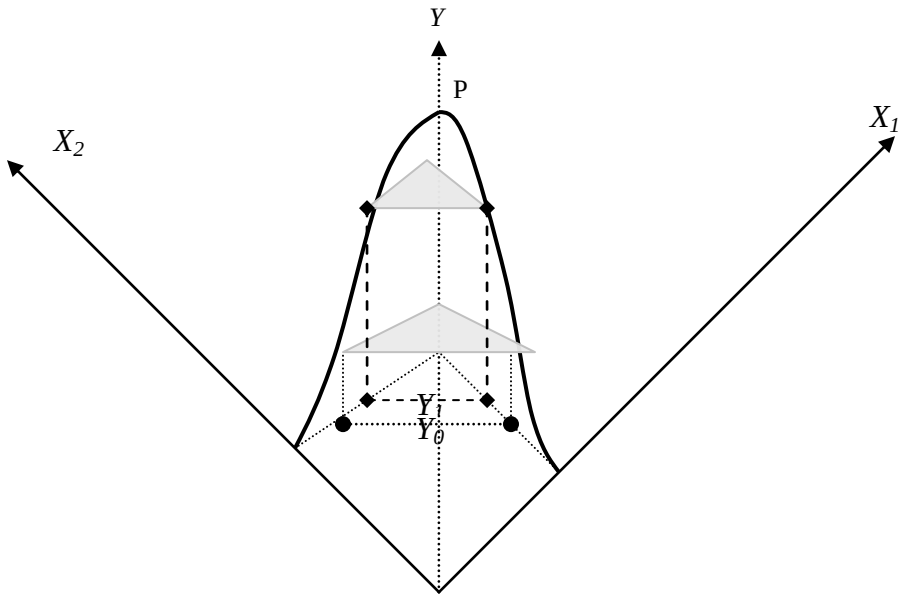
X_1	X_2
9	2
6	3
5	4
4	7
5	10

ويوضح الجدول (٧،٢) أن الناتج Y يمكن الحصول عليه باستخدام ٩ وحدات من X_1 مع ٢ وحدة من X_2 وهكذا. وإذا فرض أن بيانات جدول (٧،١) مشتقة من دالة الإنتاج التالية:

$$y = 18x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2$$

فإنه يمكن تصوير الدالة هندسياً كا في الشكل رقم (٧،١) والذي يشير إلى أن هذه الدالة ذو الثلاثة أبعاد تتساوى مع عدد المتغيرات (الموردين بالإضافة إلى الناتج).

من الشكل (٧،١) يتضح أن شكل دالة الإنتاج $Y=f(x_1,x_2)$ هو شكل يشبه الهضبة الجبلية قمته تمثل أقصى ناتج ممكن ويسمى هذا الشكل بالمسطح الإنتاجي وإذا أخذنا أي مقطع أفقي على هذه الهضبة فإن هذا المقطع والمشار إليه في الشكل بالمثلثات إنما يعبر عن مستوى الإنتاج أو ما يسمى سواء الإنتاج إذ أنه عند هذا المقطع يمكن الحصول على قدر واحد (إرتفاع واحد) من الناتج بتوليفات مختلفة من الموردين X_2,X_1.



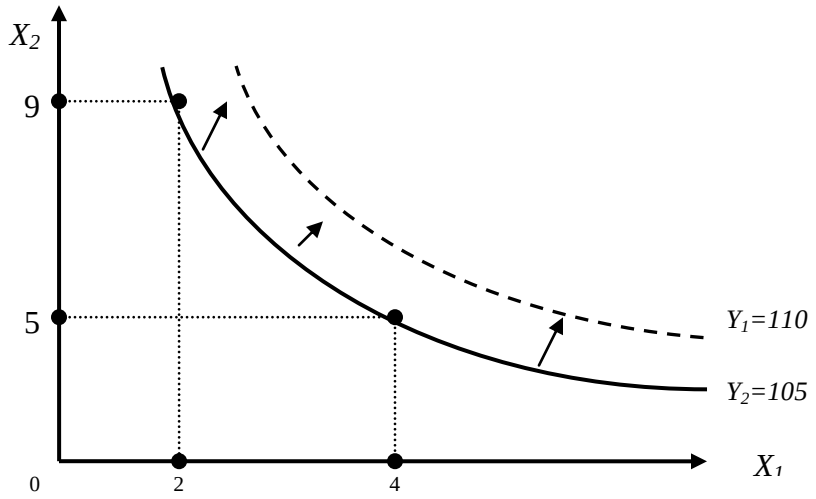
شكل رقم (٧,١) مسطح الإنتاج

مـــنحنيات ســـــواء الإنـــــــتاج *Isoquants*

يشير منحنى الناتج المتساوي إلى مختلف التوليفات من موردين (x_1,x_2) للحصول على القدر نفسه من الناتج. ومن خلال المقطع في مسطح الإنتاج أو من خلال الدوران حول هضبة الإنتاج عند مستوى معين ثابت من سطح الأرض فإننا نحصل على مايسمى بمنحنى سواء الإنتاج.

منحنيات الناتج المتساوي تعكس لنا العملية الإنتاجية وتعطينا قيماً محدّدة ومعينة لمستويات الإنتاج المختلفة، والتحرك من منحنى أقل إلى منحنى أعلى في خريطة الناتج المتساوي تعني زيادة في كمية الإنتاج من مقدار معين إلى مقدار آخر معين، وبالتالي يمكننا معرفة مقدار التغير في الإنتاج. الأرقام في منحنيات الإنتاج المتماثل تعتبر كمية أو قياسية وتوضح مستوى الإنتاج الفعلي الممكن الحصول عليه من توليفة من عناصر الإنتاج المختلفة..

ويوضح الشكل رقم (٧،٢) كيف أن منحنى سواء الإنتاج Y_2 بين مختلف التوليفات من الموردين X_1,X_2 للحصول على هذا القدر من الناتج والبالغ (١٠٥) وحدة. أما المنحنى Y_1 فيوضح مختلف التوليفات من الموردين X_1,X_2 للحصول على ناتج قدره (١١٠) وحدة من الناتج الذي بالطبع يشكل مستوى أعلى من الناتج عن سابقه.



شكل رقم (٧،٢) منحنى سواء الإنتاج

خـــصائص مـــــنحنيات ســـــواء الإنـــــتاج:

١ - إمكانية تجزئة الموارد:

إذ أن المنحنى ينحدر بانسيابية، وغير منكسر، ومتصل نظراً لإمكانية إستخدام وحدات صغيرة (أجزاء) *Fractions* من الموارد.

٢ - منحنيات السواء ذات إنحدار سالب:

أي تنحدر من أعلى إلى أسفل جهة اليمين، ومعنى ذلك أنه إذا زادت الكمية المستخدمة من أحد الموارد (مثلاً X_1) فإن هذا يستدعي إنقاص كمية المورد الآخر (مثلاً X_2) للحصول على نفس القدر من الناتج (Y). وتسمى عملية الإحلال هذه بمعدل الإحلال الحدي التقني *Marginal Rate of Technical Substitution (MRTS)* بين الموردين. ويعرّف هذا المعدل بأنه الكمية التي يجب أن تنخفض من المورد X_2 لتحل محلها وحدة إضافية من المورد X_1 للحصول على القدر نفسه من الناتج Y. ويقاس معدل الإحلال الحدي بين الموردين بميل منحنى سواء الإنتاج عند أية نقطة عليه. أي عن طريق إيجاد المشتقة الأولى لدالة المنحنى، ويعبر عن ذلك رياضياً كما يلي:

$$MRTS_{x_1x_2} = \frac{\Delta X_2}{\Delta X_1}$$

حيث يحل X_1 محل X_2 أما في حالة إحلال X_2 محل X_1 فتكتب المعادلة كالتالي:

$$MRTS_{x_2x_1} = \frac{\Delta X_1}{\Delta X_2}$$

وبالتالي فإن ميل منحنى الناتج المتساوي *The Slope of the Isoquant* يوضح المعدل الذي يتم فيه إستبدال كمية من عنصر إنتاجي معين (مثلاً X_2) بكمية من العنصر الآخر (مثلاً X_1) مع المحافظة على مستوى الإنتاج ثابتاً. وهو مايعرف بـ *MRTS* ويُفترض أن قياس هذا المعدل دائماً بكميات موجبة(لذا يتم حذف إشارة السالب (-) التي تتلازم مع ميل منحنى الناتج المتساوي). ويتم إستخدام فكرة الميل لمعرفة المدى *Range* الذي يتم فيه إحلال عنصر محل عنصر إنتاجي آخر على نفس المنحنى.

ويمكن حساب *MRTS* من الجدول (٧،٢) وذلك عندما نرغب في إحلال المورد X_1 محل المورد X_2 إذ يتضح أنه لزيادة الكمية المستخدمة من المورد X_1 بوحدة واحدة فإن هذا يستدعي إنخفاض الكمية المستخدمة من المورد الآخر X_2 بثلاثة وحدات ولهذا فإن *MRTS* لإحلال X_1 محل X_2 تقاس عند الوحدات الأولى كالتالي:

$$MRTS_{x_1x_2} = \frac{4-7}{5-4} = -3$$

وهذا يعني أنه لزيادة الكمية المستخدمة من X_1 بوحدة واحدة فإنه يلزم تخفيض الكمية المستخدمة من المورد X_2 بمقدار ثلاث وحدات. غير أن إستمرار إحلال X_1 محل X_2 تنخفض معه مقدرة X_1 على الإحلال محل X_2 وبدلاً من أن وحدة واحدة من X_1 تحل محل ثلاث وحدات من X_2 فإنه عند إحلال وحدة أخرى من X_1 محل X_2 فإنه يستدعي إنخفاض وحدات X_2 بمقدار وحدة واحدة أي يتم إحلال وحدة من X_1 محل وحدة واحدة من X_2 وهذا يرجع بالطبع إلى إنخفاض كفاءة *Efficiency* المورد الذي زاد إستخدامه مقابل إرتفاع كفاءة المورد الآخر الذي إنخفضت كميته مما أدى إلى إرتفاع كفاءته الإنتاجية ولذلك فإن *MRTS* عند نقطة الإحلال التالية مباشرة كما في الجدول (٧،٢) يتم حسابها كما يلي:

$$MRTS_{x_1x_2} = \frac{3-4}{6-5} = -1$$

هذا ويتم حساب *MRTS* للمعادلة التالية:

$$y = f(x_1, x_2)$$

وذلك من خلال التفاضل الكلي لهذه الدالة كما يلي:

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$$

ونظراً لأن التغير في *(dy)Y* لمنحنى سواء إنتاجي معين يساوي صفر لثبات مستوى الناتج فإن:

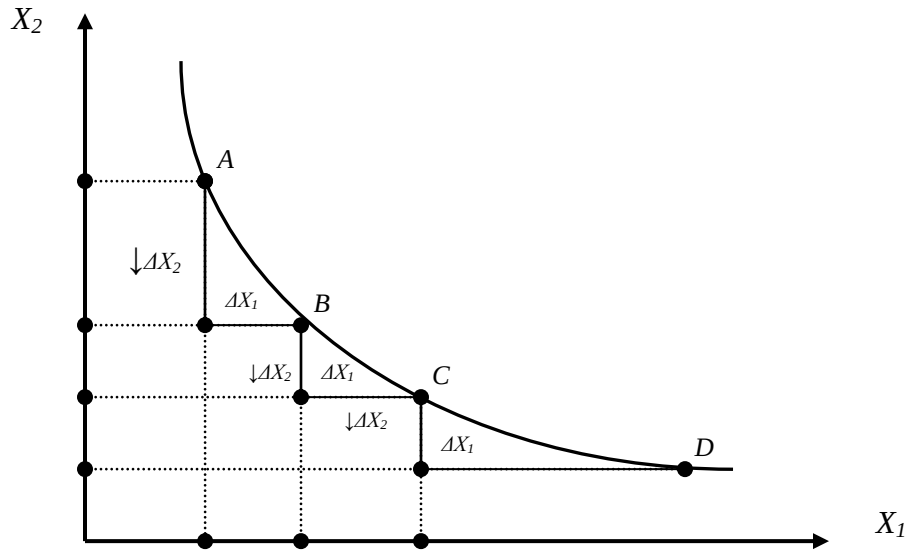
$$0 = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$$

ولهذا فإن ميل منحنى سواء الإنتاج يصبح:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1}{f_2}$$

حيث تشير f_2,f_1 إلى الإنتاجية الحدية للموردين x_2,x_1 على الترتيب أي أن ميل منحنى سواء الإنتاج يتناسب عكسياً مع مقلوب الإنتاجية الحدية للموارد .ونظراً لأن $MRTS$ يعبر عنها بالصيغة الموجبة فإن :

$$MRTS_{x_1x_2} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_1}{f_2}$$



شكل رقم (7.3) منحنى سواء الإنتاج ذا الميل السالب

٣ ـ تحدب منحنيات سواء الإنتاج تجاه نقطة الأصل:

وهذا راجع إلى أنه كلما زادت الكميات المستخدمة من عنصر الإنتاج وليكن X_1 ، تقل إنتاجيته الحدية، وبالتالي تنخفض الكمية التي يضحى بها من العنصر الآخر X_2 في سبيل إضافة وحدة من العنصر X_1 لأن الإنتاجية الحدية للعنصر الآخر X_2 أصبحت مرتفعة نسبياً.

أي انه كلما قلت الكمية المستخدمة من أحد العناصر تزداد إنتاجيته الحدية ولهذا يجب إحلال كمية كبيرة من العنصر الآخر للتعويض عن النقص الكبير في الإنتاج الذي يترتب على إنقاص كمية

العنصر الأول المستخدم ، وهذا نتيجة مايسمى بقانون تناقص الإنتاجية الحدية. ولكي يكون منحنى سواء الإنتاج محدباً تجاه نقطة الأصل فإن هذا يستدعي أن يكون تفاضل ميل منحنى سواء الإنتاج موجب الإشارة أي أن :

$$\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} \Phi \; 0$$

ونظراً لأن:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1}{f_2}$$

$$d\left|\frac{(dx_2)}{dx_1}\right|_{dy=0} = \frac{\partial(-f_1 / f_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial(-f_1 / f_2)}{\partial x_2} dx_2$$

$$= \frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = \frac{\partial(-f_1 / f_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(-f_1 / f_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1}$$

فإن:

$$= -\frac{f_2 f_{11} - f_1 f_{21}}{f_2^2} - \frac{f_2 f_{12} - f_1 f_{22}}{f_2^2} \cdot \left(\frac{f_1}{f_2}\right)$$

$$= -\frac{f_2 f_{11} + f_1 f_{21}}{f_2^2} + \frac{f_1 f_2 f_{12} - f_1^2 f_{22}}{f_2^3}$$

$$= -\frac{f_2^2 f_{11} + f_1 f_2 f_{21} + f_1 f_2 f_{12} - f_1^2 f_{22}}{f_2^3}$$

ولقد أشارت نظرية(*Young*) إلى أن التفاضل المشترك لا تتأثر قيمته باختلاف ترتيب المتغيرات

لهذا فإن: $f_{12} = f_{21}$

ومن هذا نجد أن:

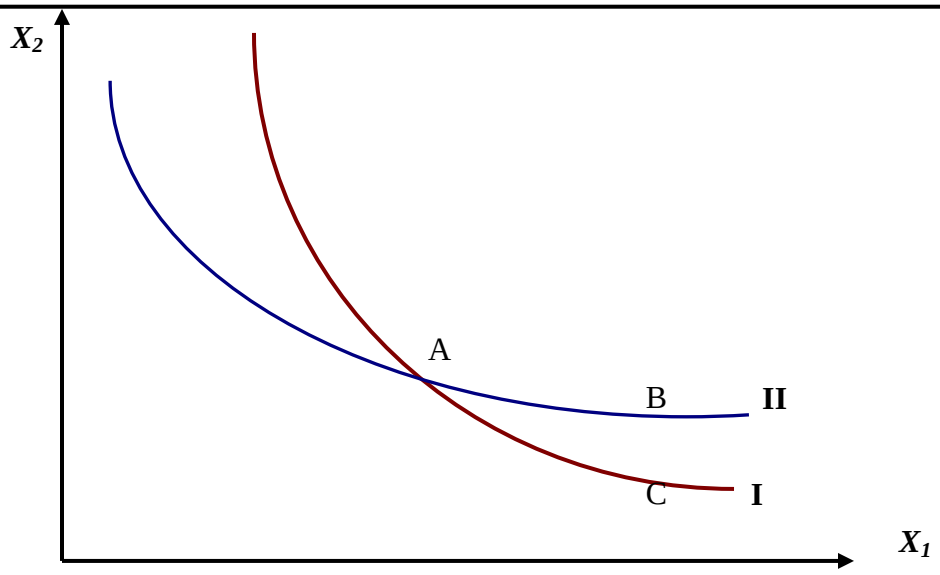
$$\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = -\frac{f_2^2 f_{11} + 2 f_1 f_2 f_{12} - f_1^2 f_{22}}{f_2^3} \qquad (٧,٢)$$

ولكي يكون منحنى السواء محدب تجاه نقطة الأصل فإن المعادلة (٧,٢) يجب أن تكون قيمتها موجبة (وذلك في منطقة النواتج الحدية، الموجبة للموارد).

من خاصية التحدب نعلم أن عملية الإحلال هذه لاتتم عادةً بمعدل ثابت وإنما لمعدل متناقص.

٤ - منحنيات السواء لاتتقاطع:

وهذا راجع إلى أنه إذا تقاطع منحنى سواء الإنتاج II, I في الشكل (٧،٤) فإن هذا يعني أن نقطة A تعطي مستوى الناتج نفسه على منحنى سواء الإنتاج II,I وحيث أن النقطتين A,B يقعان على منحنى سواء الإنتاج II ، وأن النقطتين C,A يقعان على منحنى سواء الإنتاج I ، ولإشتراك النقطة A بينهما فإن هذا يعني أن مستوى الإنتاج عند النقطة B يجب أن يساوي مستوى الإنتاج عند النقطة C حيث أن B,A متساويان، C,A متساويان فإن هذا يعني تساوي B مع C وهذا مخالف للواقع الذي يشير إلى أن منحنى السواء الأعلى مستوى II يعطي إنتاج أعلى من المنحنى I .



شكل رقم (٧،٤) تقاطع منحنيات سواء الإنتاج

٥ - إمكانية إحلال الموارد:

أي أنه يمكن زيادة إستخدام أحد المدخلات وإنقاص الكمية المستخدمة من المدخل الآخر ويتضح ذلك من خلال مناقشتنا لمعدلات الإحلال و سالبية الميل.

أشـــكال مـــــنحنيات ســـــــواء الإنـــــتاج *Isoquant Patterns*

تُعني أشكال منحنيات الإنتاج بتوضيح العلاقة بين عوامل الإنتاج $X's$ بعضها ببعض من جهه والناتج (Y) من جهة أخرى. أي بمعنى آخر توضيح مدى الإحلال الفني التقني بين العنصرين X_2,X_1 المفترض تأثيرهما على الإنتاج. وفي هذا الخصوص فإنه توجد العديد من العلاقات الإحلالية بين الموارد منها.

١) تناقص معدل الإحلال الحدي التقني:

يرجع هذا التناقص كما أشرنا إلى قانون تناقص العائدات الحدية أي بمعنى آخر وكما يتضح من معادلة معدل الإحلال الحدي التقني:

$$MRTS_{x_1x_2} = \frac{MPP_1}{MPP_2} = \frac{f_1}{f_2}$$

فإنه كلما زادت الوحدات المستخدمة من العنصر X_1 فإن الإنتاجية الحدية له MPP_1 تتناقص بينما تزداد الإنتاجية الحدية للعنصر الإنتاجي الآخر MPP_2 وهكذا فإن النسبة الكلية $\frac{MPP_1}{MPP_2}$ تتناقص باستمرار. ويتضح من الشكل (٧،٥-أ) أنه فيما بين النقطتين A,B على منحنى سواء الإنتاج فإنه يتم الإحلال بين الموارد وأن كان الإحلال متناقصاً. بل أكثر من ذلك نجد أنه إلى يسار النقطة A ويمين النقطة B فإنه يستحيل الإحلال بين الموارد إذ تتضاءل الإنتاجية الحدية للمورد MPP بل وتصل للصفر الذي استخدم قدر أكبر منه حتى أنه بعد هذه النقاط نجد أن الإنتاجية الحدية للمورد تكون سالبة فعند النقطة B على منحنى سواء الإنتاج نجد أن الإنتاجية للمورد X_1 وصلت إلى الصفر وبعدها فإن الإنتاجية الحدية للمورد X_1 تصبح سالبة. والشيء نفسه ينطبق على النقطة A المتعلقة بالمورد X_2 . وبالرجوع إلى دالة الإنتاج السابقة والمشتقة من الجدول (٧،١) يتضح أن الإنتاجية الحدية للمورد X_1 تساوي الصفر عندما تكون الكمية المستخدمة منه تساوي ٩ وحدات وتصل الإنتاجية الحدية للمورد X_2 للصفر عندما تكون الكمية المستخدمة منه تساوي ٧ وحدات، ويمكن الوصول إلى ذلك جبرياً كالتالي:

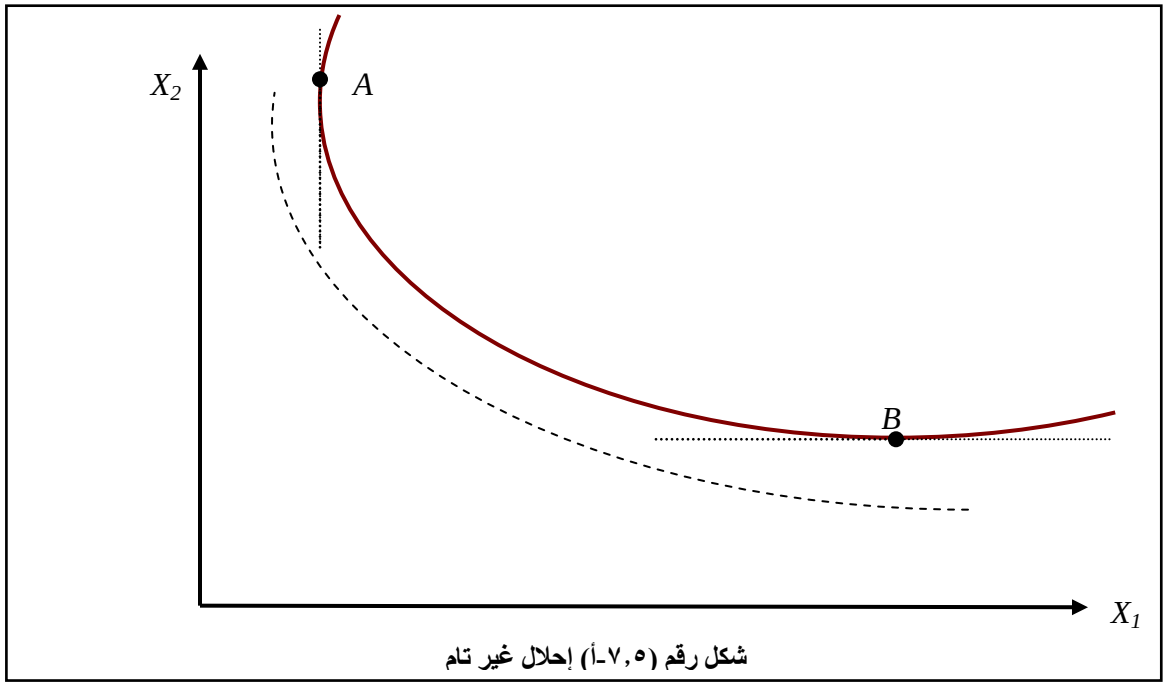
$$MPP_{x_1} = \frac{dy}{dx_1} = 18 - 2x_1 = 0$$

ولهذ فإن: $X_1=9$

كذلك فيما يتعلق بالعنصر الآخر X_2 نجد أن:

$$MPP_{x_2} = \frac{dy}{dx_2} = 14 - 2x_1 = 0$$

ولهذ فإن: $X_1=7$



شكل رقم (٧,٥-أ) إحلال غير تام

ومن ثم عند ثبات الكمية المستخدمة من المورد X_2 وزيادة الكمية المستخدمة من المورد X_1 بقدر أكبر من ٩ وحدات يعني أن ميل منحنى الناتج المتساوي أصبح موجباً وهذا يخالف الفرضية.

وتعرف هذه الحالة بأن الإحلال في هذه المنطقة هو إحلال غير كامل دائماً (*Imperfect Factor Substitutability*) وهذا يستدعي أن يكون منحنى سواء الإنتاج محدباً تجاه نقطة الأصل وسالب الميل أي أن :

$$\frac{dx_2}{dx_1} \pi\ 0, \frac{d^2x_2}{dx_1^2} \phi\ 0$$

٢) ثبات معدل الإحلال الفني التقني:

وهذا يعني أن الكمية المضحى بها من مورد الإنتاج X_2 عند زيادة المورد الإنتاجي الآخر X_1 بوحدة واحدة تكون ثابته، ولذلك فإن $MRTS_{12}$ تكون ثابته على طول منحنى السواء الذي يأخذ شكل المستقيم في هذه الحالة كما في الشكل (٧,٥-ب) وتتصف دالة الإنتاج في هذه الحالة بثبات الإنتاجية الحدية لكل عنصر أي أن كفاءة العنصر ثابته باستمرار إحلال عنصر آخر مكانه أي أنه:

$$MPP_1 = \frac{dy}{dx_1} = \alpha_1$$

كذلك:

$$MPP_2 = \frac{dy}{dx_2} = \alpha_2$$

وفي هذه الحالة تتخذ دالة الإنتاج الشكل الجبري التالي:

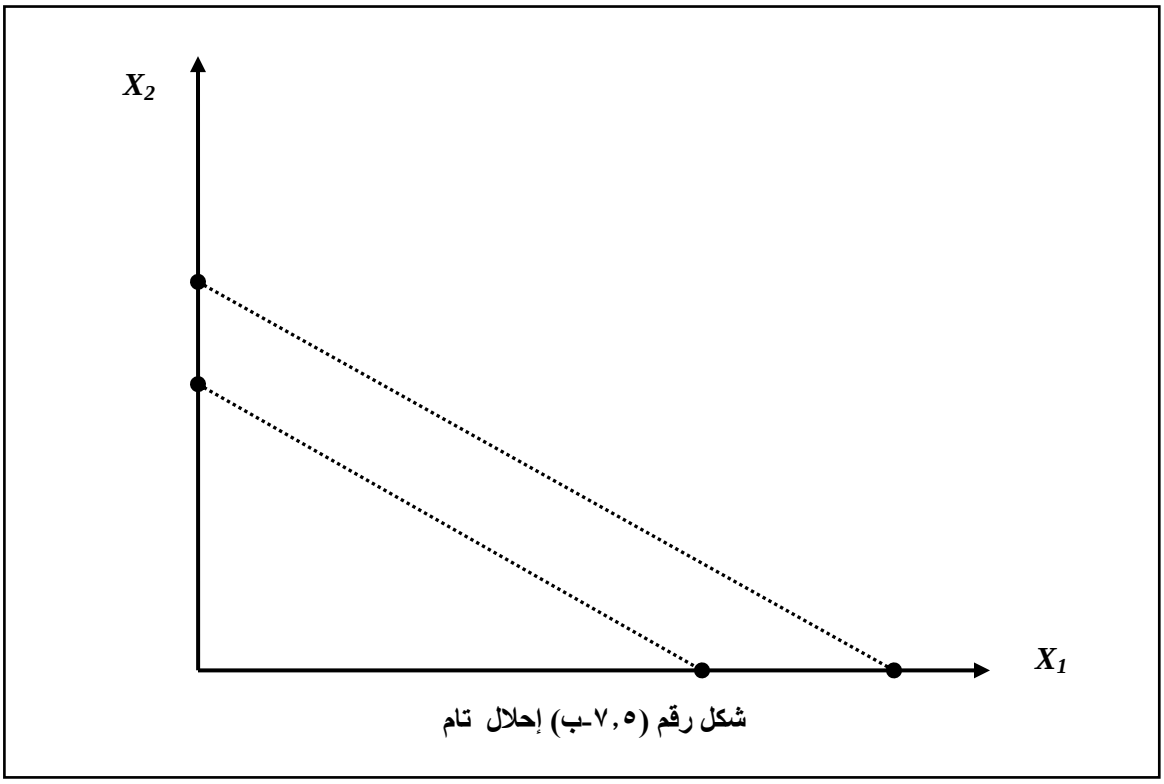
$$Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$$

بينما يكون شكل منحنى سواء الإنتاج كالتالي:

$$X_2 = \frac{Y}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} X_1$$

وتظل α_2, α_1 ثابته على طول خط السواء أو عند أي نقطة على منحنى سواء الإنتاج. وفي هذه الحالة فإن الموارد يمكن إحلالها إحلالاً كاملاً *Perfect Factor Substitutability* وهذا يعبر عنه رياضياً كما يلي:

$$\frac{dx_2}{dx_1} \pi \ 0, \frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = 0$$

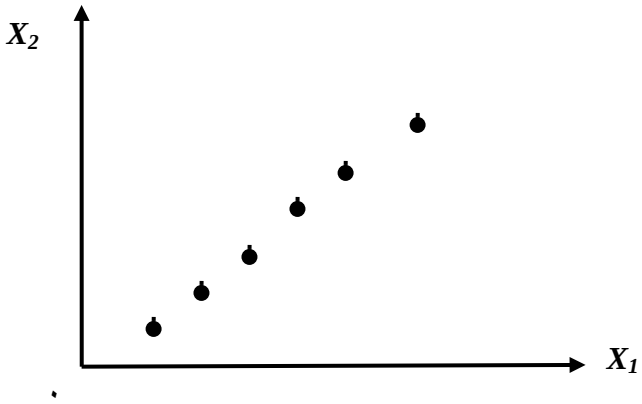


شكل رقم (٧,٥-ب) إحلال تام

٣) عدم الإحلال الفني التقني:

في بعض العمليات الإنتاجية لابد لعناصر الإنتاج أن تكون مخلوطة بنسبة ثابته وإلاّ فلا يكون هناك أي إنتاج. أي بمعنى آخر لايمكن إحلال أي عنصر محل عنصر إنتاجي آخر ويطلق على هذه الحالة عدم الإحلال التقني *No Factor Substitutability* فإذا فرض أن الناتج (Y) يستدعي مزج موردي الإنتاج X_2,X_1 بنسبة ٢:١ فإن هذا يعني أنه للحصول على وحدة واحدة من الناتج (Y) فإن هذا يتطلب إستخدام وحدة واحدة من المورد X_1 ووحدتين من المورد X_2 وهذا يعني بالطبع أن إستخدام وحدتين من X_1 يستدعي بالضرورة استخدام ٤ وحدات من X_2 لكي يزداد الإنتاج، وفي هذه الحالة فإن منحنى سواء الإنتاج يعبر عنه بنقط فقط إذ أن الإنتاج يظهر فقط عند هذه النقط كما في الشكل (٧,٥-ج). أبسط مثال لهذه الحالة هي العلاقة بين إنتاج الماء من الهدروجين والأكسجين إذ أن ذرتين من الهدروجين وذرة واحدة من الأكسجين تعطي جزئ الماء وبدون هذه التوليفة لايمكن

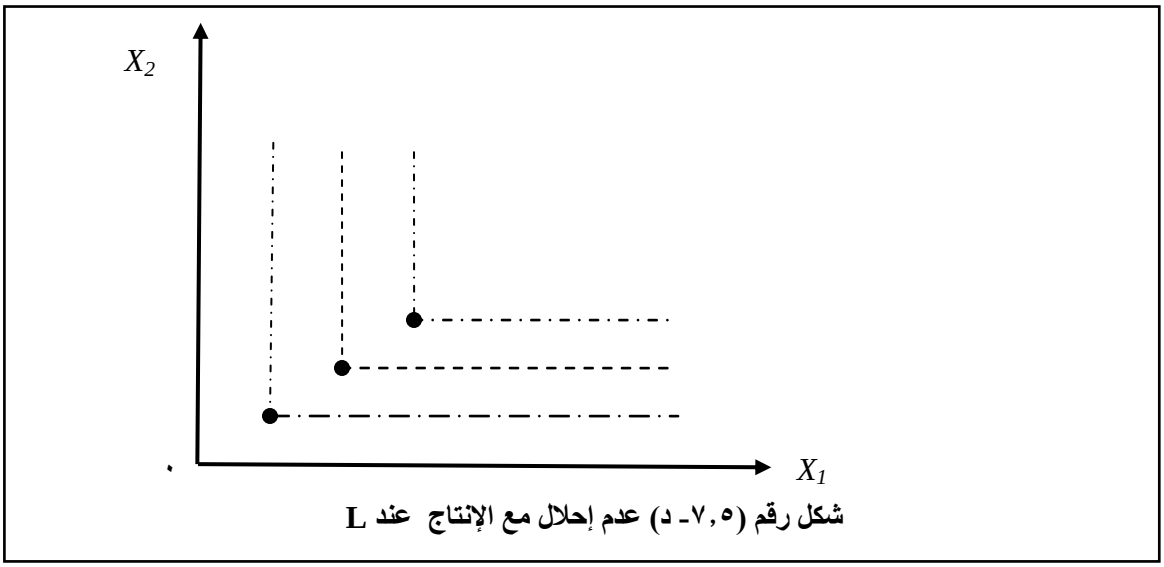
الحصول على الماء ولايمكن إحلال أي منها محل الآخر بل أن زيادة إحداهما مع ثبات الآخر قد ينخفض الإنتاج فأربع ذرات من الأكسجين وذرتين من الهدروجين قد لاتعطي ماء.



شكل رقم (٧,٥-ج) عدم إحلال مع إمكانية إختفاء

غير أنه توجد حالات أخرى تمتزج فيها الموارد وبنسبة ثابته ولكن في حالة زيادة أحد الموارد دون الأخرى فإن الإنتاج لن يزيد ولكن لن يختفي أيضاً وكمثال على ذلك الجرار وسائقة فزيادة عدد الجرارات مع وجود سائق واحد لا تؤثر على الإنتاج ولا يختفي الإنتاج.

وكذلك زيادة عدد السائقين على جرار واحد فإن هذا لايؤدي إلى إختفاء الإنتاج أيضاً وهذا يتضح من الشكل (٧,٥-د) إذ أن زيادة أحد الموارد لاتؤثر على الإنتاج ويكون شكل منحنى سواء الإنتاج في هذه الحالة آخذاً شكل حرف L وتكون أفضل نسبة لمزج موردي الإنتاج هي النسبة التي تتحدد عند نقط الأركان فقط.

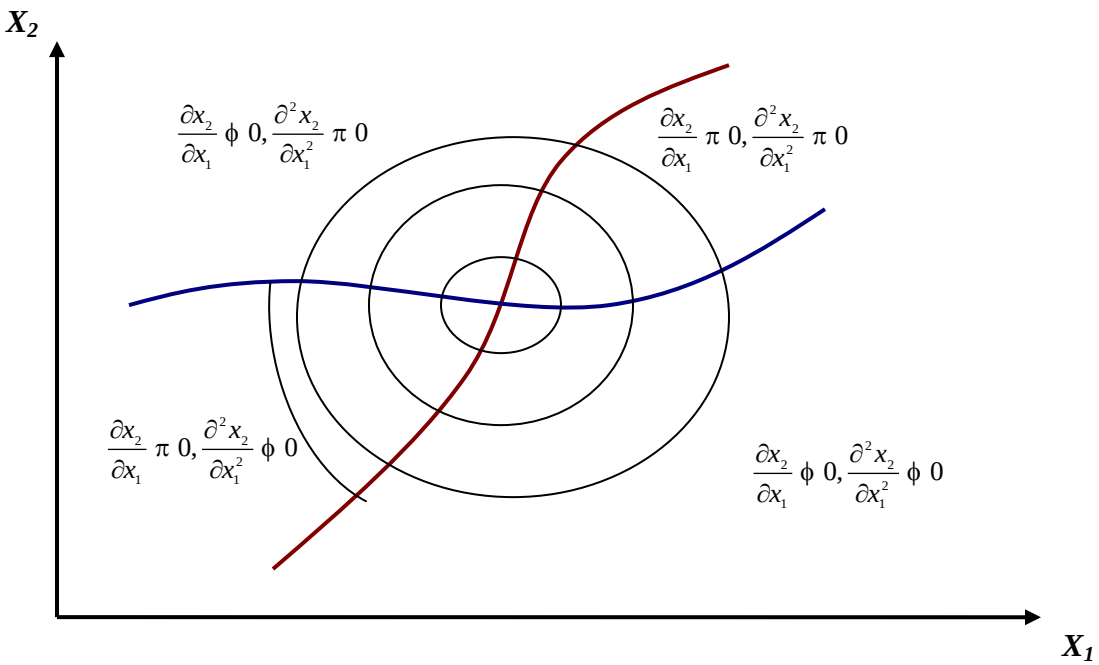


شكل رقم (٧,٥- د) عدم إحلال مع الإنتاج عند L

وإذا أريد للناتج أن يزيد فإن العنصرين يجب أن يزيدا بالنسبة نفسها وتعرف حالة عدم الإحلال الحدي التقني عادة في حالة الموارد المتلازمة والمتكاملة *Complementary Inputs* والتي يكون الإحلال فيها ممكن فقط على نقاط معينة على الخط المستقيم الواصل من نقطة الأصل والذي هو عبارة عن أركان منحنيات السواء. وفي هذه الحالة نجد أن منحنى السواء لايخضع لشروط منحنى السواء العادي الذي يفترض فيه إتصال التفاضل الجزئي الأول والثاني *Continuous First and Second Partial Derivatives* وعليه فإن $\frac{dx_2}{dx_1}$ وكذلك $\frac{d^2x_2}{dx_1^2}$ في هذه الحالة غير معرّفة على كل أجزاء منحنى سواء الإنتاج.

هذا ويطلق على دالة الإنتاج التي تتخذ هذا الشكل من منحنيات السواء بدالة إنتاج **ليونتيف** *Leontief Production Function* أو **دالة الإنتاج ثابته النسب** *Fixed Proportion Production Function*.

هذا وقد يتخذ منحنى سواء الإنتاج أشكالاً أخرى غير تلك التي ذكرت مثل الشكل المقعر تجاه نقطة الأصل والشكل الموجب الإنحدار و المحدب تجاه المحور X_2 . ولكن مثل هذه الحالات نادرة. وعموماً يمكن توضيح بعض الأشكال التي سبق ذكرها لمنحنى سواء الإنتاج من خلال المسطح الإنتاجي بشكل (٧,٦) التالي:



شكل رقم (٧،٦) مسطح إنتاجي يبين منحنيات سواء موجبة الميل وأخرى سالبة الميل

مـــرونة إحـــــلال الـــــــموارد *Elasticity of Factor Substitution*

تعرف مرونة إحلال المورد (σ) بأنها معدل التغير النسبي في الموارد لمعدل التغير النسبي في معدل الإحلال التقني أي أن:

$$\sigma = \frac{\partial(X_2/X_1)}{(X_2/X_1)} \Big/ \frac{\partial(f_1/f_2)}{(f_1/f_2)}$$

$$= \frac{\partial(X_2/X_1)}{\partial(f_1/f_2)} \cdot \frac{f_1/f_2}{X_2/X_1}$$

$$= \frac{\partial(X_2/X_1)}{\partial MRTS} \cdot \frac{MRTS}{(X_2/X_1)}$$

وتنحصر قيمة (σ) عادة بين (الصفر ومالانهاية) لمنحنيات سواء الإنتاج المحدبة، وكلما كَبُرت قيمة (σ) إزدادت درجة الإحلال بين الموردين X_2,X_1 ، وإذا بلغت قيمة (σ) مالانهاية فإن الإحلال بين الموارد يكون كامل، أما إذا كانت قيمة (σ) مساوية للصفر فإنه لا يوجد إحلال بين الموارد.

ومن الجدير بالذكرأن قيمة **(σ)** تتباين من نقطة إلى أخرى على المسطح الإنتاجي، وفي هذه الحالة فإننا نكون أمام دالة إنتاج تتسم بتغير قيمة مرونة الإنتاج *Variable Elasticity of Substitution* ***(VES)***. غير أنه إذا كانت قيمة (σ) ثابتة لبعض الدوال فإن هذه الدوال يطلق عليها دوال الإنتاج ذات مرونة الإحلال الثابتة *Constant Elasticity of Substitution* ***(CES)*** إلاّ أنه إذا كانت قيمة مرونة الإحلال ثابتة و تساوي الوحدة فإننا أمام دالة إنتاج كوب دوجلاس ***Cobb-Douglas*** ***(C-D)***.

كما تجدر الإشارة أيضاً إلى أن قيمة معامل مرونة إحلال الموارد يمكن أن تحدد العلاقة بين الموردين X_2,X_1 في العملية الإنتاجية ، فعلى سبيل المثال إذا كانت قيمة معامل هذه المرونة موجبة فإن العنصرين X_2,X_1 هما عنصرين إحلاليين *Substitute* أي يمكن أن يحل أحدهم محل الآخر في

العملية الإنتاجية. أما إذا كانت قيمة معامل مرونة الإحلال سالبة فإن X_2,X_1 مكملان *Complimentary* لبعضهما البعض في العملية الإنتاجية.

تهدف مرونة الإحلال (*Elasticity of Substitution*) إلى معرفة مدى سهولة إحلال عنصر إنتاجي محل عنصر إنتاجي آخر للحصول على نفس المستوى من الإنتاج ، وتعرف على أنها التغير النسبي في نسب عناصر الإنتاج إلى التغير النسبي في الأسعار النسبية لهذه العناصر وعلى افتراض أن دالة الإنتاج تتكون من عنصرين فقط هما العمل (L) ورأس المال (K) وان سعر عنصر العمل هو (w) وسعر عنصر راس المال هو (r)، لذا فإنه يمكن تعريف مرونة الإحلال (σ) على أنها التغير النسبي في نسبة راس المال إلى العمل $\left(\frac{K}{L}\right)$ الناتجة عن التغير النسبي في نسبة سعر العمل وراس المال $\left(\frac{W}{r}\right)$ ويمكن صياغتها بالشكل التالي:

$$\sigma = \frac{\%\Delta\left(K/L\right)}{\%\Delta\left(w/r\right)} = \frac{\Delta\left(K/L\right)/\left(K/L\right)}{\Delta\left(w/r\right)/\left(w/r\right)} \cdots\cdots\cdots$$

$$= \frac{d\left(K/L\right)}{d\left(w/r\right)} \cdot \frac{\left(w/r\right)}{\left(K/L\right)} \qquad (٧,٣)$$

ومن تعريف مرونة الإحلال نجد أنها تتعلق بشكل منحنى الناتج المتساوي، وبالتحديد في درجة انحنائه أو تقعره، وتبحث في مدى سهولة إحلال عنصر العمل محل عنصر رأس المال عند تغير الأسعار النسبية مع البقاء على نفس منحنى السواء.

يمثل البسط في المعادلة (٧,٣) التغير النسبي في نسبة رأس المال إلى العمل $\left(\frac{K}{L}\right)$، وهنا تجدر الإشارة إلى أن نسبة رأس المال إلى العمل عند أي نقطة على منحنى الناتج المتساوي يمكن قياسها بميل الخط الصادر من نقطة الأصل إلى هذه النقطة ففي الشكل (٧,٧) نلاحظ أن نسبة راس المال إلى العمل عند النقطة A أكبر منها عند النقطة B أي أن:

$$\left(\frac{K}{L}\right)_A \phi \left(\frac{K}{L}\right)_n$$

والسبب في ذلك هو أن كمية راس المال المستخدمة عند النقطة A أكبر من كمية راس المال المستخدمة عند النقطة B:($K_1>K_2$)، كما أن كمية العمل المستخدمة عند النقطة A اقل من كمية العمل المستخدمة عند النقطة B ($L_1< L_2$) وهذا يعني انه للنسبة $\left(\frac{K}{L}\right)_A$ فإن البسط مرتفع والمقام منخفض وهذا ما يجعلها أكبر من $\left(\frac{K}{L}\right)_B$، نستنتج من ذلك أن النسبة $\left(\frac{K}{L}\right)$ تنخفض مع الاستمرار في إحلال العمل محل رأس المال مثل الانتقال من A إلى B على منحنى السواء Q_0 .

أما بالنسبة للمقام في المعادلة (٧,٣) فانه يمثل التغير النسبي في نسبة أسعار عناصر الإنتاج، وحيث إن تعظيم الإنتاج يتطلب تساوي نسبة أسعار عنصري الإنتاج مع معدل الإحلال الفني (النسبة بين الإنتاجية الحدية لعنصري الإنتاج) أي أن:

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r}$$

وكما نعلم فإنه عند الانتقال من النقطة A إلى B على منحنى السواء المتساوي Q_o فإن معدل الإحلال الفني يتناقص مع زيادة الوحدات المستخدمة من العمل ($\downarrow MP_L$) وانخفاض الكميات المستخدمة من راس المال ($\uparrow MP_K$) أي أن:

$$MRTS_A \phi MRTS_B$$

أو

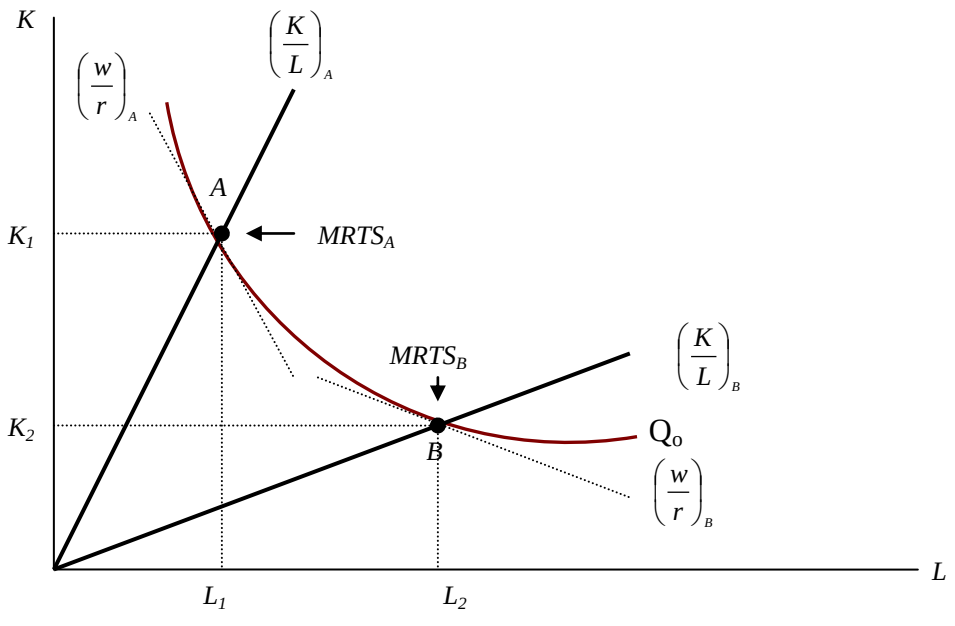
$$\left(\frac{w}{r}\right)_A \Phi \left(\frac{w}{r}\right)_B$$

وبالتعويض عن ذلك في المعادلة (٧,٣) نحصل على الصيغة التالية لمرونة الإحلال:

$$\sigma = \frac{\%\Delta\left(K/L\right)}{\%MRTS} = \frac{\partial\left(K/L\right)}{\partial(MRTS)} \cdot \frac{MRTS}{\left(K/L\right)}$$

وتجدر الإشارة إلى أن معامل مرونة الإحلال بين عنصري الإنتاج (σ) يأخذ دائماً قيماً موجبة لأن قيمة البسط بالسالب وقيمة المقام أيضا بالسالب، والسبب في كون كل من البسط والمقام يأخذ قيماً سالبة هو أن إحلال العمل محل راس المال (الانتقال من النقطة A إلى B على منحنى السواء Q_o) يترتب عليه انخفاض النسبة $\left(\frac{K}{L}\right)$ التي في البسط وكذلك انخفاض $MRTS$ الذي في المقام.

أخيراً يلاحظ أن قيمة معامل مرونة الإحلال تتراوح بين صفر وما لانهاية فمثلاً تكون ($\sigma = \infty$) عندما يأخذ منحنى الناتج المتساوي شكل خط مستقيم بمنعى أن هناك إحلالاً تاماً بين عنصري العمل وراس المال، والسبب في ذلك هو إن $MRTS$ لن يتغير مع تغير $\left(\frac{K}{L}\right)$، أما عندما يأخذ منحنى الناتج المتساوي شكل زاوية قائمة فإن مرونة الإحلال ستكون مساوية للصفر ($\sigma = 0$) وذلك لأنه ليس هناك إمكانية للإحلال بين عناصر الإنتاج حيث $\left(\frac{K}{L}\right)$ ستكون ثابتة.



شكل رقم (٧,٧) مرونة الإحلال بين عناصر الإنتاج

الباب الثامن

٨,١ خطوط التكاليف المتساوية *Isocost Lines*

٨,٢ تحديد توليفة الموارد الأقل تكلفة

١- الطريقة الجدولية.

٢- الطريقة الهندسية.

٣- الطريقة الجبرية.

أ) الشرط الضروري *Necessary Condition*

ب) الشرط الكافي *Sufficient Condition*

٨,٣ تحديد توليفة الموارد التي تعظم أرباح المنشأة الإنتاجية

١- الطريقة الجدولية.

٢- الطريقة الهندسية.

٣- الطريقة الجبرية.

أ) الشرط الضروري *Necessary Condition*

ب) الشرط الكافي *Sufficient Condition*

٨,٤ المنطقة الإقتصادية وخطوط التوسع والخطوط الحرجة للمنشأة

أولاً: خطوط التوسع للمنشأة *Expansion Paths*

ثانياً: الخطوط الحرجة *Ridge Lines*

ثالثاً : المنطقة الإقتصادية *Economic (Rational) Zone*

٨,٥ الكفاءة الإقتصادية *Economic Efficiency*

خـــطوط الـــتكاليف الـــــمتساوية *Isocost Lines*

نظراً لإفتراضنا أن المدخلات الإنتاجية ($X's$) يمكن أن تحل محل بعضها البعض، فإن تكاليف هذه المدخلات تدخل ضمن نطاق التكاليف المتغيرة *Variable Costs* وبالتالي فإن أي توليفة *Alternative* أو مجموعة من مدخلات الإنتاج لها تكلفة تميزها عن أي توليفة أخرى. فإذا إعتبرنا (r_1) مقياس لسعر الوحدة من المورد X_1 وأن (r_2) مقياس لسعر الوحدة من X_2 فإن التكاليف المتغيرة لهذين الموردين (TVC) هي كالتالي:

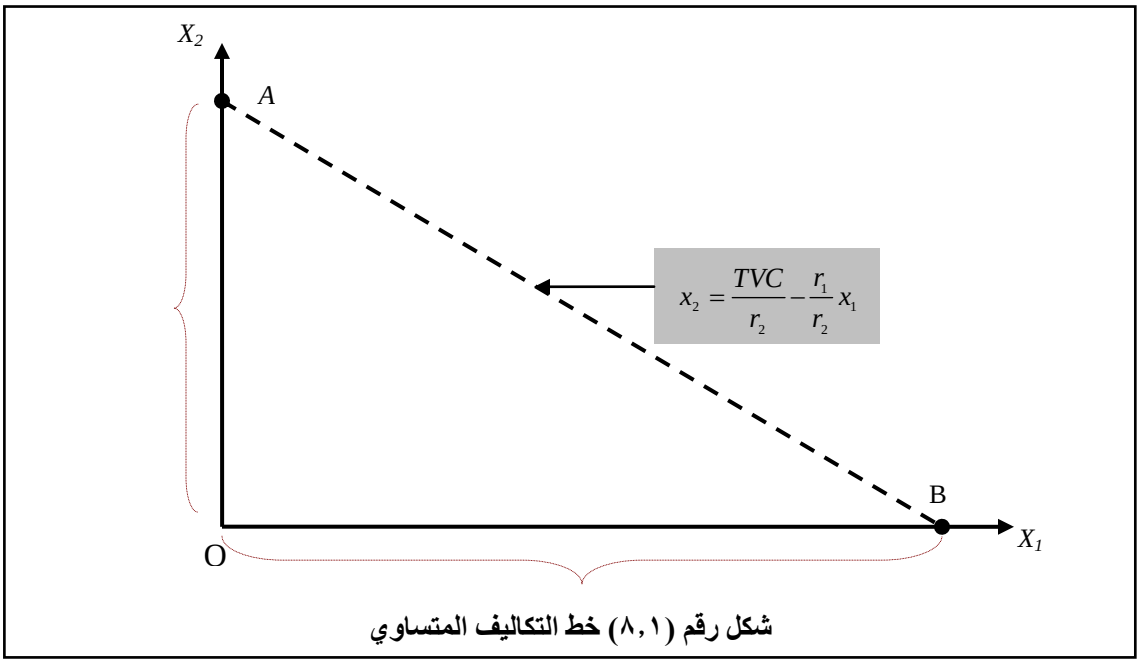
$$TVC = r_1 x_1 + r_2 x_2$$

أي أن:

$$x_2 = \frac{TVC}{r_2} - \frac{r_1}{r_2} x_1 \qquad (٨,١)$$

ويطلق على هذه المعادلة معادلة خط سواء التكاليف أو خط التكاليف المتساوي وهي كما يلاحظ معادلة من الدرجة الأولى (خطية) ويعرف خط سواء التكاليف بأنه ذلك الخط الذي يوضح كافة التوليفات من الموردين X_2, X_1 التي تُكَلِف نفس التكاليف.

ويتضح من الشكل (٨,١) أنه إذا أنفق المنتج التكاليف جميعها والمخصصة لشراء الموارد المتغيرة (TVC) على شراء المورد X_2 فإنه يحصل على الكمية OA من X_2 وفي هذه الحالة فإن: $OA = \frac{TVC}{r_2}$ أي أن الكمية OA تقدر بقسمة إجمالي التكاليف المتغيرة الكلية TVC على سعر المورد X_2 وهو (r_2) وفي هذه الحالة فإنه يستخدم صفر من X_1.



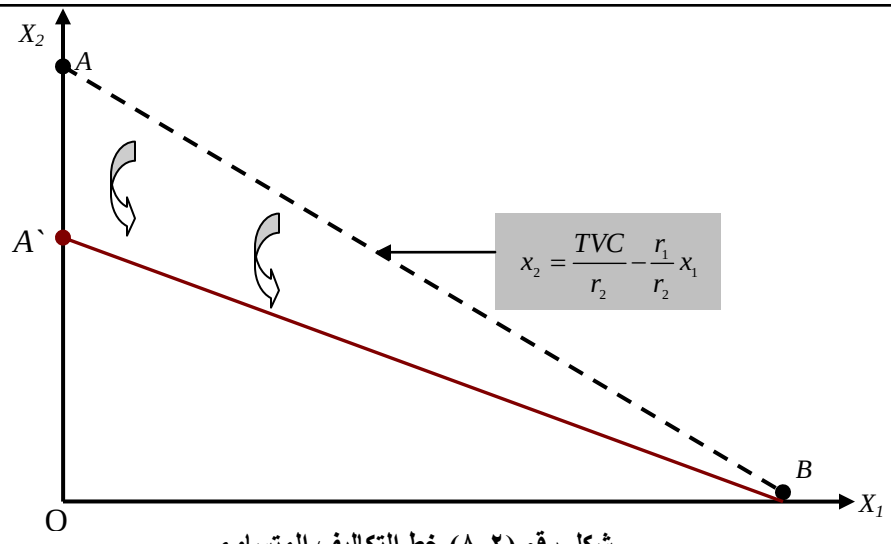
شكل رقم (٨،١) خط التكاليف المتساوي

أما إذا قرر المنتج إستخدام كل المتاح لديه والمخصص لشراء الموارد المتغيرة لشراء المورد X_1 فإنه يمكنه أن يشتري القدر OB من X_1 و الذي يتم الحصول عليه من قسمة كل التكاليف المتغيرة على سعر X_1 وهو r_1 أي أن $OB = \frac{TVC}{r_1}$ وفي هذه الحالة أيضاً فإنه لا يبقى شيء من التكاليف المتغيرة لشراء مورد الإنتاج X_2. وبتوصيل النقطتين AB فإننا نحصل على ما يسمى بخط التكاليف المتساوي والتي توضح النقاط التي تقع عليه فيما بين النقطتين $A\&B$ كافة التوليفات من الموردين X_2,X_1 والتي يمكن شراؤها بغرض إستخدامها في العملية الإنتاجية بالقدر نفسه من التكاليف والتي كانت تنفق على أحد الموردين فقط. ويتضح من المعادلة (٨،١) أن ميل خط سواء التكاليف هو:

$$\frac{\partial X_2}{\partial X_1} = -\frac{r_1}{r_2} \qquad (٨،٢)$$

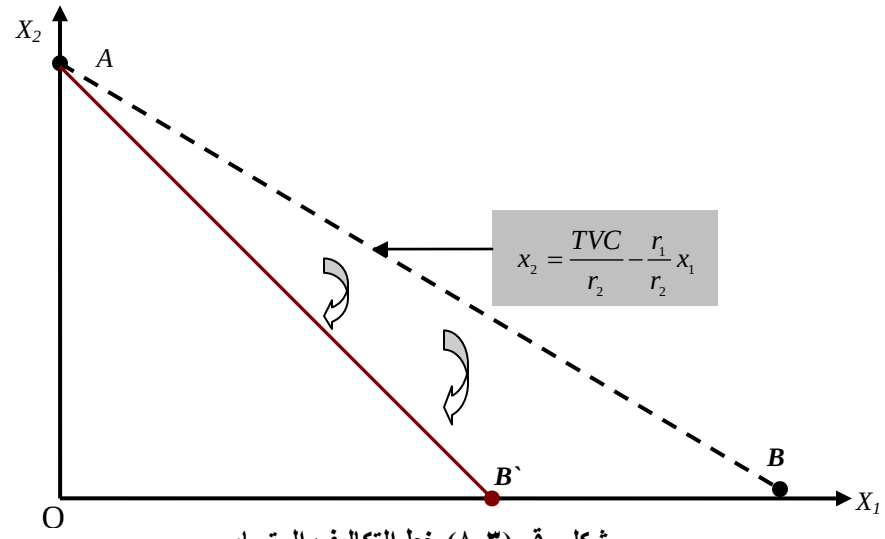
فإذا تغير أحد الأسعار أو كليهما بنسب مختلفة فإن الميل سوف يتغير. فيلاحظ من معادلة الميل (٨،٢) أنه إذا إرتفع سعر أحد الموارد ليكن سعر المورد X_2 أي (r_2) مع بقاء سعر المورد X_1 أي r_1 ثابت فإن خط التكاليف سوف يتحرك تجاه نقطة الأصل صانعاً زاوية أقل ميلاً مع محور X_1. وبمعنى

آخر فإن النقطة A سوف تتحرك إلى أسفل $A`$ لأنه سوف يشترى قدر أقل من المورد X_2 لإرتفاع سعره الشكل (٨,٢) .



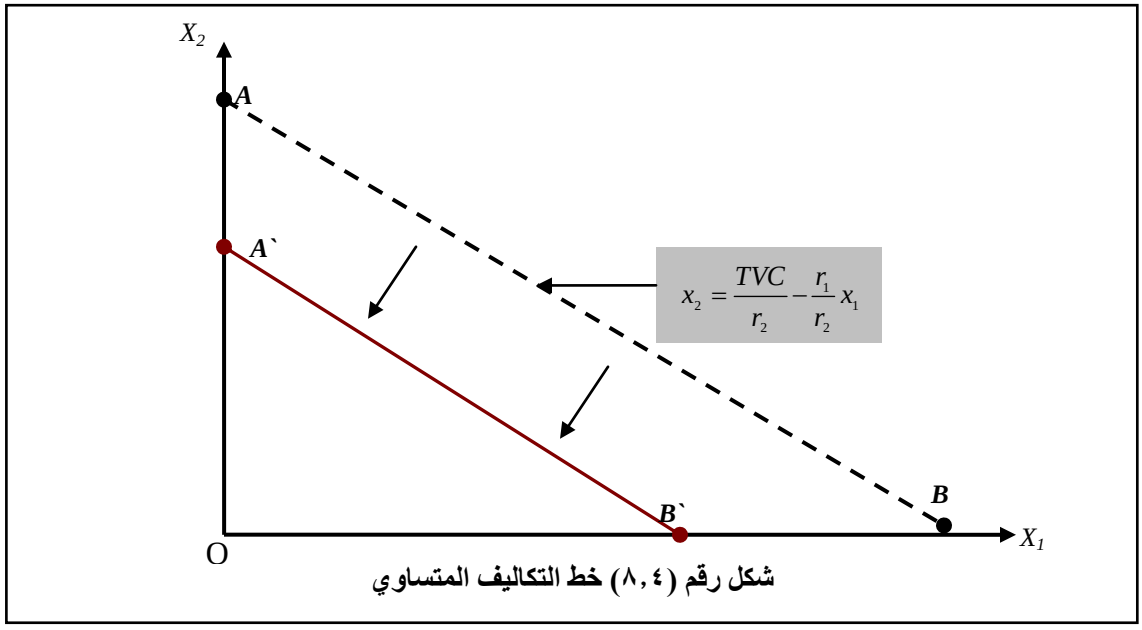
شكل رقم (٨,٢) خط التكاليف المتساوي

أما إذا إرتفع سعر المورد X_1 مع بقاء سعر المورد X_2 كما هو فإن خط سواء التكاليف يصبح أكبر ميلاً لإرتفاع r_1 مع بقاء r_2 كما هي وهذا يعني أن خط سواء التكاليف سوف يتحرك على المحور الأفقي تجاه نقطة الأصل $B`$ صانعاً بذلك زاوية أكبر ميلاً مع المحور الأفقي شكل (٨,٣).



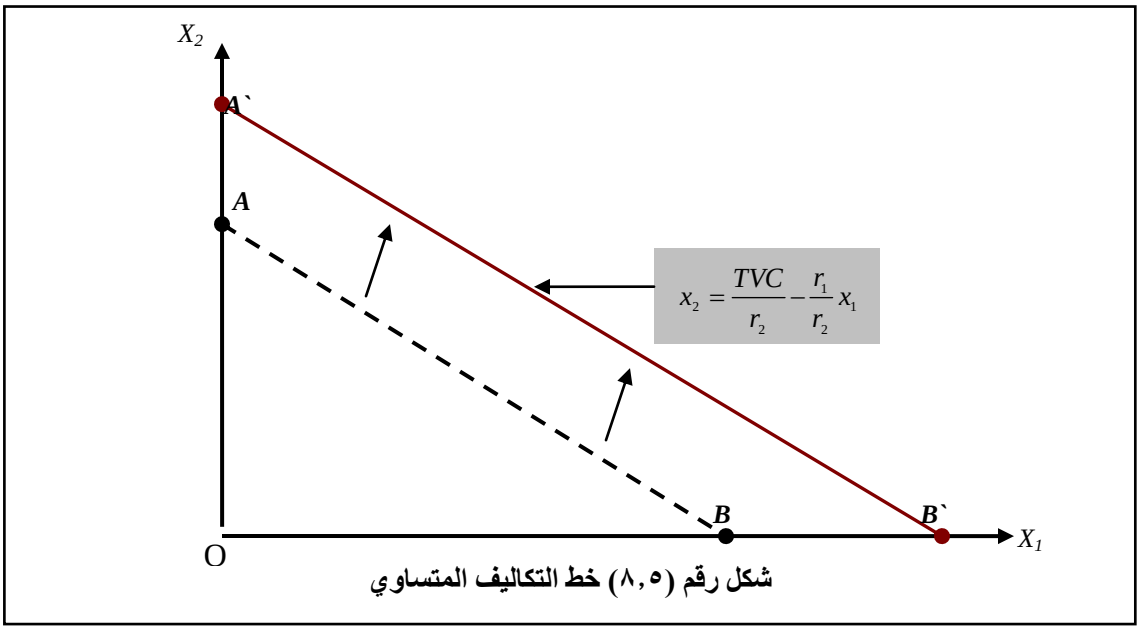
شكل رقم (٨,٣) خط التكاليف المتساوي

كما يلاحظ أنه قد يتحرك خط سواء التكاليف برمته موازياً لنفسه أما تجاه نقطة الأصل أو بعيداً عنهما وهذا متوقف على النسبة السعرية $\frac{r_1}{r_2}$ فإذا إرتفع كلاهما بنسبة متساوية فإن خط سواء التكاليف سوف يتحرك موازياً لنفسه تجاه نقطة الأصل مشترياً بذلك قدر أقل من كلا الموردين عن سابقه (*A`&B`*) شكل (٨،٤).



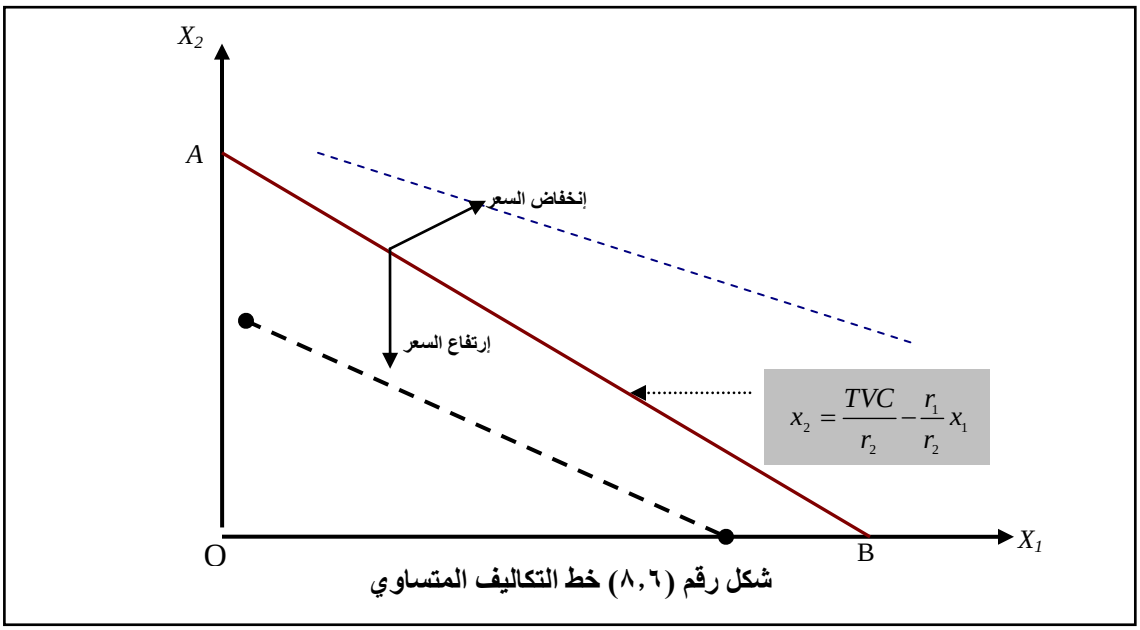
شكل رقم (٨،٤) خط التكاليف المتساوي

أما إذا إنخفض سعر الموردين r_2,r_1 بالنسبة نفسها فإن خط سواء التكاليف سوف يتحرك موازياً لنفسه بعيداً عن نقطة الأصل وبعيداً عن وضعه الحالي مشترياً بذلك قدراً أكبر من كلا الموردين لإنخفاض أسعارهما عن ذي قبل (*A`&B`*) شكل(٨-٥).



شكل رقم (٨,٥) خط التكاليف المتساوي

أما إذا حدث أن إنخفض سعرا الموردين أو إرتفعا ولكن بنسب مختلفة فإن منحنى سواء التكاليف ينتقل برمته غير موازياً لنفسه من جهة اليمين أو جهة اليسار وفقاً لنوع التغير في أسعار الموارد شكل(٨-٦)..



شكل رقم (٨,٦) خط التكاليف المتساوي

تـــحديد تـــوليفة الـــموارد الأقـــل تـــكلفة

يطلق عادة على توليفة الموارد الأقل تكلفة بالتوليفة المثلى *Optemum* لأنه عندها يمكن الحصول على أقصى ناتج ممكن في حدود الإمكانيات المادية المتاحة. ويمكن تحديد تلك التوليفة بإحدى الطرق التالية:

١ - الطريقة الجدولية Table Method

٢ - الطريقة الهندسية Graphecal Method

٣ -الطريقة الجبرية Algebraic Method

أولاً: الـــطريقة الـــجدولية

لتحديد توليفة الموارد الأقل تكلفة أو بمعنى آخر الحجم الأمثل من الموارد الذي يحقق هدف المنتج المتمثل في هذه الحالة في تدنية تكاليف الإنتاج فإنه يلزم معرفة أسعار الموارد r_2,r_1 وكذلك كمية هذه الموارد المستخدمة، ومنها يتم معرفة التوليفة الأقل تكلفة. فإذا كان سعر المورد X_1 هو (٢) ريال وسعر المورد X_2 هو (٣) ريال و أن المطلوب إنتاج ١٠٥ وحدة من الناتج Y فإن الجدول (٨,١) يوضح مختلف التوليفات الموردية وكذلك التكاليف المتغيرة الكلية لهذه الموارد.

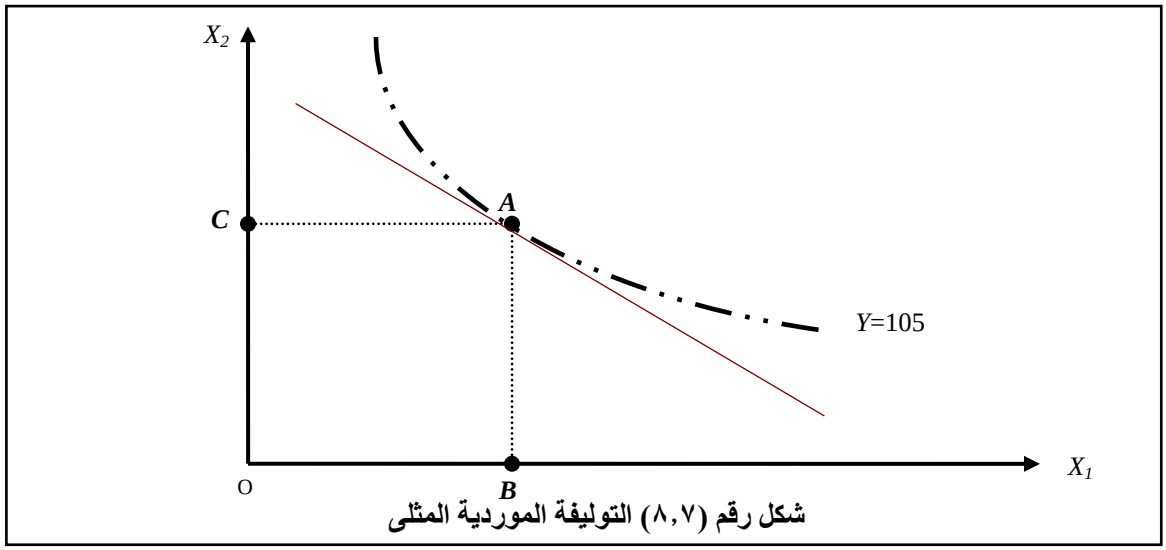
جدول رقم (٨,١) توليفة الموارد الأقل تكلفة لإنتاج ١٠٥ وحده من الناتج

كمية المورد X_1	كمية المورد X_2	تكاليف المورد X_1 r_1X_1	تكاليف المورد X_2 r_2X_2	إجمالي التكاليف المتغيرة TVC
9	٢	18	6	24.0
6	٣	12	9	21.0
5	٤	10	12	22.0
4.4	٥	8.8	15	23.8
4.1	٦	8.2	18	26.8
4.0	٧	8.0	21	29.0
4.1	٨	8.2	24	32.2

من الجدول(٨,١) يتضح أنه لإنتاج القدر ١٠٥ وحدة من الناتج بأقل قدر من التكاليف المتغيرة TVC فإن هذا يستدعي إستخدام القدر ٣ وحدات من الموارد X_2 وكذلك ٦ وحدات من المورد X_1 وباجمالي تكاليف متغيره قدرها ٢١ ريال ويتضح من الجدول أن أدنى تكلفة متغيرة هي ٢١ ريال وبها يمكن إستخدام ٣ وحدات من X_2 بالإضافة إلى ٦ وحدات من المورد X_1 ليحقق بذلك هدف المنتج من تدنية تكاليف إنتاجه.

ثانياً: الـطريقة الـــهندسية

تتحدد توليفة الموارد المثلى التي تحقق تدنية التكاليف عند نقطة تماس منحنى سواء الإنتاج *Isoquant* مع خط التكاليف المتساوي *Isocost*. أي عند النقطة A في الشكل (٨,٧) تتحدد الكمية المثلى من الموردين وهي القدر OB من المورد X_1 والقدر OC من المورد X_2 .



شكل رقم (٨,٧) التوليفة الموردية المثلى

عند النقطة A في الشكل (٨,٧) يتضح مايلي :

a. ***ميل منحنى سواء الإنتاج هو:***

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{MPP_{x1}}{MPP_{x2}}$$

أي أن ميل منحنى سواء الإنتاج يساوي معكوس الإنتاجية الحدية لموارد الإنتاج وهو نفسه معدل الإحلال الحدي التقني أي أن:

$$MRTS_{x_1,x_2} = -\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{MPP_{x_1}}{MPP_{x_2}}$$

b. ***ميل خط سواء التكاليف هو:***

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{r_1}{r_2}$$

ج) من أ، ب يتضح أنه عند النقطة A يتساوى ميل منحنى سواء الإنتاج مع ميل خط التكاليف المتساوي أي أنه عند النقطة A نجد أن[11]:

$$MRTS_{x_1,x_2} = -\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{r_1}{r_2} \qquad (٨,٣)$$

ثم إذا عُرفت أسعار الموارد وكمياتها فإنه يتم تقدير معدل الإحلال الحدي التقني *MRTS*، وعند تساوي هذا المعدل مع معكوس النسبة السعرية $-\frac{r_1}{r_2}$ تتحدد كمية الموارد التي تحقق تدنية تكاليف الإنتاج بالقدر *OC* من X_2 و *OB* من X_1

ثالثاً: الطريقة الجبرية

وفي هذه الحالة نفرض أن المطلوب إنتاج حجم معين من الناتج *Y* كما يلي:

$$\overline{Y} = f(x_1, x_2)$$

وذلك بأقل قدر من التكاليف:

$$TVC = r_1 x_1 + r_2 x_2$$

والمطلوب تحديد كمية المورد X_1 وكذلك X_2 التي تحقق هدف المنتج.

[11] من الشكل يلاحظ أيضاً أن ميل خط التكاليف يتساوي مع ميل منحنى سواء الإنتاج عند مستوى أقل من الإنتاجية (Y=100) أي عند C,B ولكن توليفة الموارد عند هاتين النقطتين ليست هي التوليفات المثلى التي تتحدد فقط عندما يمس خط التكاليف المتساوي أعلى منحنى سواء إنتاجي ممكن.

وفي هذه الحالة تصبح المسألة كما يلي :

$$Min \qquad r_1 x_1 + r_2 x_2 \qquad .$$

$$st \wedge \wedge \bar{Y} = f(x_1, x_2)$$

ولنتمكن من حل هاتين المعادلتين اللتين تهدفان إلى تحديد كمية الموارد التي تحقق هدف المنتج من تدنية تكاليفه الإنتاجية فإننا لذلك نستخدم ما يسمى بطريقة لاجرانج *Lagrange* وتصبح المسألة وفقاً لهذه الطريقة كما يلي:

$$L = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \lambda(\bar{y} - f(x_1, x_2)) \qquad (٨,٤)$$

حيث λ هو معامل لاجرانج. ولتحقيق هدف المنتج هناك شرطان:

١- الشرط الضروري *Necessary Condition*

وفيه يتم إجراء التفاضل الجزئي للدالة بالنسبة لمتغيرات المعادلة ومساواتها بالصفر كما يلي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = r_1 - \lambda f_1(x_1, x_2) = 0 \qquad (٨,٥)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = r_2 - \lambda f_2(x_1, x_2) = 0 \qquad (٨,٦)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \bar{Y} - f(x_1, x_2) = 0 \qquad (٨,٧)$$

من المعادلتين (٨,٥،٨,٦) يتضح مايلي:

$$r_1 = \lambda f_1(x_1, x_2) \qquad (٨,٨)$$

$$r_2 = \lambda f_2(x_1, x_2) \qquad (٨,٩)$$

وبقسمة المعادلة(٨,٨) على المعادلة (٨,٩) ينتج مايلي:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{f_1}{f_2} = MRTS_{12} \qquad (٨,١٠)$$

وهي نفس النتيجة السابق التوصل إليها في المعادلة (٨,٣). ومن مجموعة المعادلات (٨,٥،٨,٦،٨,٧) يتضح أن:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f_1}{r_1} = \frac{f_2}{r_2} \qquad (٨,١١)$$

٢- الشرط الكافي *Sufficient Condition*

إن الشرط الضروري لتدنية أو معظمة أي دالة غير كافٍ لإظهار نوع هذه العلاقة الدالة إذ يتفق الشرط الضروري في كلتا الدالتين حيث يتم مساواة التفاضلات الأولى للمتغيرات في الدالة بالصفر مما يعني ضرورة إيجاد شرط آخر كافٍ لتحديد نوع الدالة (نهاية عظمى أم صغرى) وحيث أننا أمام مشكلة إيجاد الشرط الكافي لتدنية التكاليف فإن هذا يستدعي أولاً إيجاد التفاضل الثاني لمجموعة المعادلات (٨,٥،٨,٦،٨,٧) وعلى سبيل المثال التفاضل الثاني للدالة (٨,٥) هو كما يلي:

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = \partial r_1$$

$$(٨,١٢) = \left[-\lambda\left(\partial \frac{f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \partial \frac{f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2\right)\right] + [(f_1(x_1, x_2)(-\partial\lambda)]$$

$$\therefore -\lambda f_{11} dx_1 - \lambda f_{12} dx_2 - f_1 d\lambda = dr_1$$

بنفس الطريقة نجد أن التفاضل الثاني للدالة (٨,٦) هو كما يلي:

$$-\lambda f_{21} dx_1 - \lambda f_{22} dx_2 - f_2 d\lambda = dr_2$$

كذلك بالنسبة للدالة (٨,٧)

$$-f_1 dx_1 - f_2 dx_2 = 0$$

ويمكن وضع مجموعة معادلات (٨,١٢) في شكل مصفوفات كالتالي:

$$\begin{vmatrix} -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -f_1 \\ -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ d\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dr_1 \\ dr_2 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad (٨,١٣)$$

ويتطلب الشرط الكافي أن تكون محددة هيسيان سالبة أي أن :

$$\begin{vmatrix} -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -f_1 \\ -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix} \pi\ 0$$

ومن المعادلة (٨,١١) نجد أن:

$$f_1 = \frac{r_1}{\lambda}$$
$$f_2 = \frac{r_2}{\lambda} \qquad (٨,١٤)$$

و بالتعويض من (٨,١٤) في محددة هيسيان وضرب العمودين الأولين في المقدار $\frac{-1}{\lambda}$ ثم ضرب العمود الثالث في المقدار $-\lambda^2$ وضرب الصف الثالث في المقدار λ نحصل على:

$$\begin{vmatrix} -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -\frac{-r_1}{\lambda} \\ -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -\frac{-r_2}{\lambda} \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \frac{-r_1}{\lambda} \\ f_{21} & f_{22} & \frac{-r_2}{\lambda} \\ \frac{r_1}{\lambda^2} & \frac{r_2}{\lambda^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{\lambda} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -r_1 \\ f_{21} & f_{22} & -r_2 \\ -r_1 & -r_2 & 0 \end{vmatrix} \pi\ 0$$

وبما ان $\lambda>0$ (مقلوب التكاليف الحدية للنقود) فإن:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -r_1 \\ f_{21} & f_{22} & -r_2 \\ -r_1 & -r_2 & 0 \end{vmatrix} \Phi\ 0 \qquad (٨,١٥)$$

أي أن الشرط الكافي لتدنية التكاليف يستوجب أن تكون قيمة المحددة (٨,١٥) موجبة. هذا وإذا كانت المشتقات الثانية تتطابق مع محدد هيسيان تكون كل نقطة تماس بين منحنى الإنتاج المتماثل وخط التكاليف المتساوي نقطة معظمة الإنتاج و تدنية التكاليف في آن واحد.

تـــحديد تـولـــيفة الـــموارد الـــتي تـــعظم أربـاح الـــمنشأة الإنـــتاجية

هناك أيضاً ثلاثة طرق لتحديد توليفة الموارد التي تعظم الربح وهي:

١ - الطريقة الجدولية.

٢ - الطريقة الهندسية.

٣ - الطريقة الجبرية.

وسوف يتم التركيز على الطريقة الجبرية مع توضيح رسم بياني يحدد مستوى الإستخدام الأمثل للموارد المتغيرة التي تحقق أهداف المنتج (تعظم الإنتاج، تدني التكاليف، تعظم الربح) كما يلي:

بافتراض أن دالة الإنتاج كتالي:

$$Y = f(x_1, x_2)$$

وأن معادلة التكاليف تأخذ الصورة التالية:

$$TC = r_1 x_1 + r_2 x_2 + b$$

حيث: Y= كمية الناتج، X_2, X_1= موارد الإنتاج، r_2, r_1= أسعار موارد الإنتاج، b= التكاليف الثابتة، TC= التكاليف الكلية. مما سبق يتضح أن معادلة الربح يمكن كتابتها كما يلي:

$$\Pi = P_y Y - r_1 x_1 - r_2 x_2 - b$$

وبالتعويض في دالة الإنتاج يمكن إعادة كتابة دالة الربح π كما يلي:

$$\Pi = P_y f(x_1, x_2) - r_1 x_1 - r_2 x_2 - b$$

ولتحقيق هدف المنتج لمعظمة الأرباح فإن هناك شرطان هما:

الشرط الأساسي الضروري *Necessary Condition*

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = P_y \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} - r_1 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = P_y \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} - r_2 = 0$$

ومن الشرط الأساسي نحصل على القانون الأساسي لمعظمة الأرباح وهو:

$$P_y MPP_{x_1} = r_1$$
$$P_y MPP_{x_2} = r_2$$

وهذا يعني حتى يتحقق تعظيم الربح فلا بد من تحقيق المعادلتين التاليتين:

$$VMP_{x_1} = r_1$$
$$VMP_{x_2} = r_2$$

أي ضرورة تساوي قيمة الناتج الحدي للمورد الإنتاجي مع سعر الوحدة من هذا المورد الإنتاجي.

ومن هذا الحل يمكن الحصول على منحنى الطلب للمورد الأول وكذلك على منحنى الطلب للمورد الثاني والذي يتخذ كل منهما الصورة التالية:

$$x_1^* = h_1(P_y, r_1, r_2)$$
$$x_2^* = h_2(P_y, r_1, r_2)$$

وفي حالة معرفة قيم كل من r_2, r_1, P_y فإنه يمكن تحديد الكمية من X^*_1, X_2^* التي تؤدي لتعظيم الربح .

الشرط الكافي *Sufficient Condition*

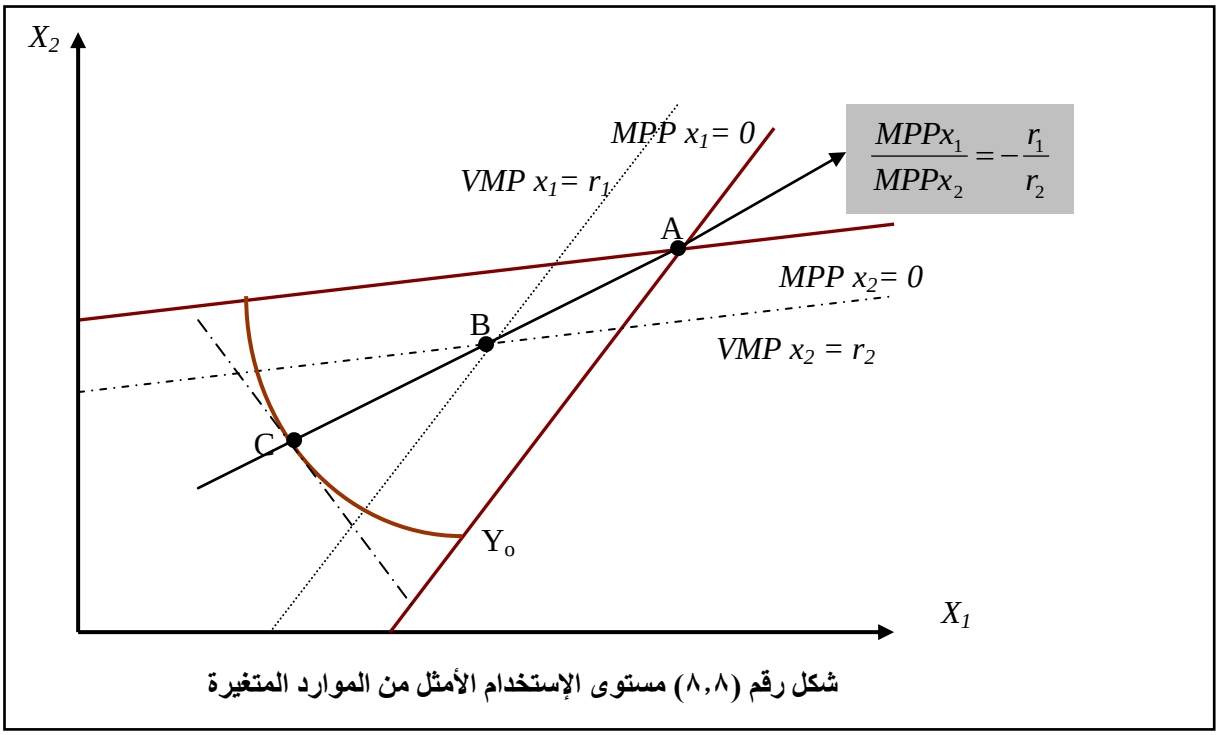
للتأكد من أن مستوى الإستخدام من X_2, X_1 المتحصل عليه من الشرط الأساسي يؤدي فعلاً إلى تعظيم الربح فإنه لابد من التأكد من توفر الشرط الكافي والذي يتطلب سالبية التفاضل الثاني لدالة الربح بالنسبة لوحدات المورد المتغير كما يلي:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1^2} \pi \ 0$$
$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2^2} \pi \ 0$$

بالإضافة إلى القيمة الموجبة لمحددة هيسيان كما يلي:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \Phi \ 0$$

ويوضح الشكل (٨،٨) مستوى الإستخدام الأمثل للمتغيرين X_2, X_1 المحققة للأهداف المختلفة للمنتج



شكل رقم (٨,٨) مستوى الإستخدام الأمثل من الموارد المتغيرة

من الشكل (٨,٨) يتضح أن مستوى الإستخدام الأمثل من الموارد والذي يؤدي إلى تعظيم الإنتاج الكلي *Maximizing Total Production* يتحقق عند النقطة (*A*) ومستوى الإستخدام الأمثل الذي يؤدي إلى تعظيم الربح *Maximizing Profit* يتحقق عند النقطة (*B*) بينما مستوى الإستخدام الأمثل الذي يحقق اقل تكلفة لإنتاج الناتج *Minimizing Costs* (Y_0) يتحقق عند النقطة (*C*) .

جدول رقم (٨,٢) القوانين الإقتصادية المحققة عند النقاط السابقة تكون كما يلي:

النقطة	القانون
A	$MPP_{x1}=MPP_{x2}=0$
B	$VMP_{x1}=r_1$ $VMP_{x2}=r_2$
C	$\frac{MPP_{x_1}}{MPP_{x_2}} = \frac{r_1}{r_2}$

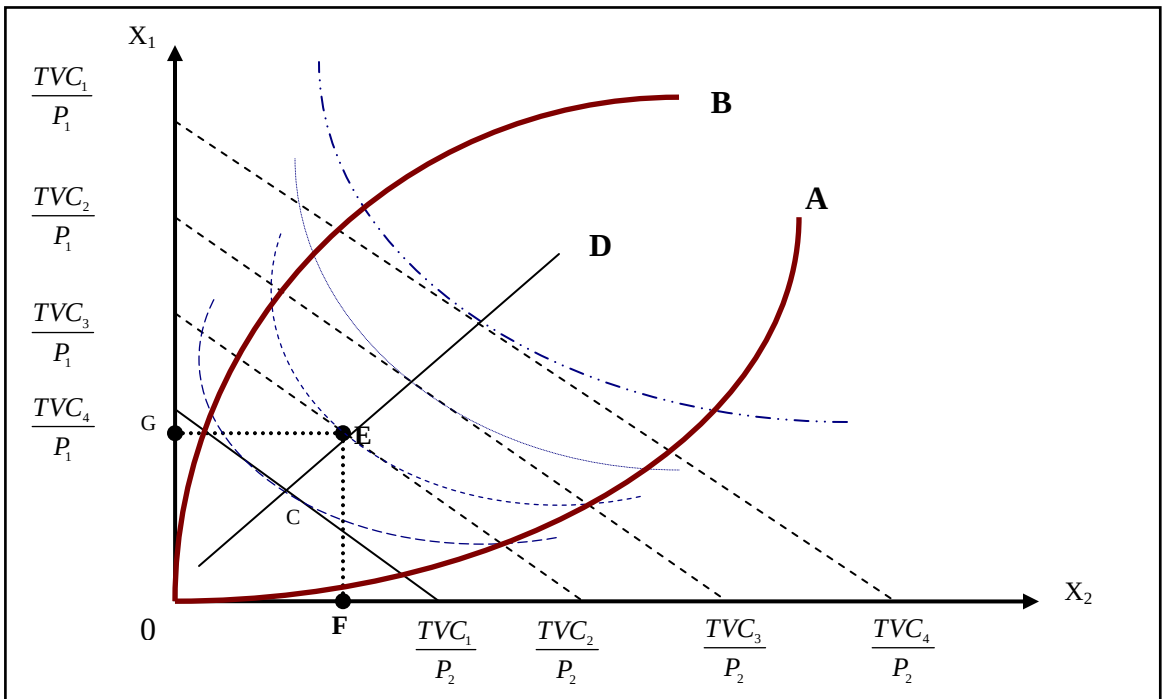
ومن الشكل (٨,٨) السابق يتضح أن نقطة تدنية التكاليف *Minimizing Costs* (C) ليس بالضرورة أن تكون نفس النقطة التي تؤدي إلى تعظيم العائد النقدي (B) ولكن نقطة تعظيم العائدات هي نفسها نقطة تدنية التكاليف.

المنطقة الإقتصادية وخطوط التوسع والخطوط الحرجة للمنشأة

أولاً: خطوط التوسع للمنشأة *Expansion Paths*

تسعى المنشأة كما سبق إيضاحه إلى الوصول لأعلى منحنى إنتاج متساوي *Isoquant* يكون متفقاً مع خط التكلفة المتساوية *Isocost*. وعند تماس الخطين تتحدد التوليفة الموردية المثلى.

ولتوضيح الفكرة التي يتم بها إختيار مجموعة العناصر X_2,X_1 والتي يجب على المنشأة إستخدامها إذا ما أرادت التوسع في الإنتاج فإن ذلك يأتي من خلال الشكل التالي والذي يضم خطوط التكاليف المتساوية وخطوط الإنتاج المتساوية



شكل رقم (٨,٩) المنطقة الإقتصادية والخطوط الحرجة و خطوط التوسع

ويتضح من الشكل (٨,٩) أن أقصى ناتج يمكن بلوغه مثلاً عند خط التكاليف المتساوية TVC_2 هو Y_2 من السلعة حيث يمس خط التكلفة المتساوية أعلى منحنى ناتج متساوي ممكن عند النقطة E، ويتحقق ذلك عندما يكون سعر المورد X_2 هو P_2 وسعر المورد X_1 هو P_1 وإنفاق المنشأة هو TVC_2 . وبذلك تستخدم المنشأة المجموعة الموردية التي تتكون من القدر OF من المورد X_2 و OG من المورد X_1 .

تجدر الإشارة إلى أن إستخدام المنشأة لأية مجموعة أخرى تقع على خط التكلفة المتساوية نفسها سوف يؤدي بها إلى الإنتقال إلى منحنى ناتج متساوي مثل مستوى ناتج أقل من Y_2 والذي يمثل إجمالي الإنفاق TVC_2 أقل تكلفة ممكنة لإنتاج المستوى Y_2 من السلعة نفسها.

تجدر الإشارة هنا إلى أن تغير إجمالي الإنفاق مع ثبات أسعار العنصرين X_2,X_1 سوف يؤدي إلى إنتقال خط التكلفة المتساوية موازياً لنفسه نحو اليمين أو اليسار حسب طبيعة وإتجاه التغير في الإنفاق. فإذا كان إجمالي الإنفاق TVC_1 أقل من TVC_2 فإن خط التكلفة المتساوية سنتقل موازياً لنفسه نحو اليسار، وفي هذه الحالة يمس منحنى الناتج المتساوي الذي يمثل المستوى Y_1 من السلعة. ويعني ذلك أن TVC_1 هي أقل تكلفة ممكنة لإنتاج الكمية Y_1 من السلعة وإذا كان إنفاق المنشأة هو TVC_3 أكبر من TVC_2 ، فإن خط التكلفة المتساوية سينتقل موازياً لنفسه نحو اليمين ، وفي هذه الحالة يمس منحنى الناتج المتساوي الذي يمثل المستوى Y_3 من السلعة. وهذا معناه أن TVC_3 تمثل أقل تكلفة ممكنة لإنتاج المستوى Y_3 من السلعة وهكذا.

ويطلق على الخط الواصل بين جميع نقاط التوازن (الممر CD) عند مختلف مستويات الإنفاق وثبات أسعار موارد الإنتاج باصطلاح الممر التوسعي الأمثل للمنشأة *Expansion Path*، ذلك الخط الذي يربط جميع نقاط توليفات الموارد الأقل تكلفة على خريطة سواء المنشأة، وكما سنرى فيما بعد أنه على الممر التوسعي الأمثل للمنشاة تتحقق الكفاءة الإنتاجية والسعرية للمنشأة حيث يتم إنتاج أقصى ناتج ممكن وبأقل قدر من التكاليف.

هذا ويتفق مفهوم الممر التوسعي الأمثل *Expansion Path* مع مفهوم ما يسمى بخط تساوي معدلات الإحلال الحدية أو خطوط التوسع للمنشأة *Isoclines* إلاّ أن الفرق هنا في أن الممر التوسعي

يعتبر حالة خاصة من حالات *Isoclines* الذي يربط مختلف التوليفات الموردية التي يمكن إستخدامها لإنتاج قدر معين من الناتج بأقل قدر من التكاليف ويتحقق هذا من خلال تماس خطوط التكاليف المتساوية مع منحنيات الناتج المتساوي، وبالطبع عند نقاط التماس هذه قد تتساوى معدلات الإحلال الحدية للموارد ويكون أمام المنشأة فرصة إختيار التوليفة المثلى من هذه الموارد والتي تتحدد من خلال النسبة السعرية لهذه الموارد. أي بمعنى آخر فإن الممر التوسعي الأمثل للمنشأة يمكن إشتقاقه رياضياً من دالة الإنتاج المعبر عنها رياضياً كما يلي:

$$Y = Ax_1^{b1}\, x_2^{b2} \qquad (٨,١٦)$$

وذلك من خلال التطبيق في معادلة التوليفة الأقل تكلفة والتي تتحدد من خلال الصيغة:

$$MRTS_{21} = -\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = \frac{MPP_{x_2}}{MPP_{x_1}} = \frac{P_{x_2}}{P_{x_1}} \qquad (٨,١٧)$$

ومن المعادلة (٨,١٦) وبفرض أن $b_2 = b_1$ وأن سعر (تكلفة) الوحدة من المورد X_1 هو ٢ ريال و سعر الوحدة من المورد X_2 هو ٣ ريال فإن المعادلة الرياضية للمر التوسعي الأمثل للمنشأة تأخذ الصورة التالية:

$$\frac{MPP_{x_2}}{MPP_{x_1}} = \frac{\partial Y / \partial x_2}{\partial Y / \partial x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{2}$$

أي أن $x_1 = \frac{3}{2} x_2$ وهكذا فإن الصيغة الرياضية العامة للمر التوسعي الأمثل للمنشأة حسب دالة الإنتاج كالتالي :

$$x_1 = \frac{P_{x_2}}{P_{x_1}}(x_2) \qquad (٨,١٨)$$

غير أن شرط تماس خطوط التكاليف المتساوية مع منحنيات الإنتاج المتساوية غير ضروري في خطوط التوسع للمنشأة *Isoclines* إذ يعرف الأخير بأنه ذلك الخط الذي يربط مختلف النقاط على منحنيات سواء الإنتاج والتي لها نفس الميول وهكذا فإنه تتعدد منحنيات *Isoclines* بتعدد ميول منحنيات سواء الإنتاج ومن ثم فإن معادلة مثل هذا الخط هي :

$$MRTS_{21} = -\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = \frac{MPP_{x_2}}{MPP_{x_1}} = K$$

حيث K هي مقدار ثابت. ونظراً لأن MPP_{x1}, MPP_{x2} هما دالتان للمورد X_2, X_1 فإن المعادلة (٨,١٨) يعبر عنها بصورة عامة كما يلي:

$$x_1 = f(x_2)$$

ثانياً: الخطوط الحرجة *Ridge Lines*

تمثل الخطوط الحرجة حالة خاصة من حالات *Isoclines* إذ تربط الخطوط الحرجة النقاط التي تتساوى عندها ميول منحنيات سواء الإنتاج والتي تكون عندها الإنتاجية الحدية لأحد الموارد مساوية للصفر فمن الشكل السابق يتضح أن هناك خطان حرجان هما OA, OB ويربط الخط OB جميع النقاط التي تكون عندها الإنتاجية الحدية للمورد X_1 مساوية للصفر أي أن $MPP_{x1}=0$ إذ يستحيل الإحلال الإقتصادي لأي قدر من المورد X_1 محل المورد X_2 وأن هذا الإحلال بلغ أقصاه عند تلك النقاط وعليه نجد أن مماس هذه النقاط يكون رأسياً. وبالمثل نجد أن الخط الحرج OA يضم جميع النقاط التي تكون عندها الإنتاجية الحدية للمورد X_2 مساوية للصفر أي أن $MPP_{x2}=0$ أي أنه عند هذه النقاط فإن إحلال المورد X_2 محل المورد X_1 بلغ أقصاه وأي إحلال زائد هو إحلال غير اقتصادي وأن مماس هذه النقاط يكون خطاً أفقياً.

ثالثاً : المنطقة الإقتصادية *Economic (Rational) Zone*

يتضح مما سبق ومن الشكل السابق أن الخطوط الحرجة تضم النقاط التي يصل عندها إحلال الموارد إلى أقصى ما يمكن ولهذا فإن هذه الخطوط تحصر فيما بينها ما يسمى بالمنطقة الإقتصادية وإن خارج هذه الخطوط فإن الإحلال بين الموارد يكون غير إقتصادي فمثلاً نجد انه على يمين الخط الحرج OA فإن مزيداً من إحلال المورد X_2 يستدعي إستخدام قدر أكبر من المورد X_1 للحصول على القدر نفسه من الناتج وهذا بالطبع تصرف غير رشيد، وبالمثل على يسار الخط الحرج OB فإن مزيداً من إستخدام المورد X_2 لايعني تخفيض القدر المستخدم من المورد X_2 بل على العكس فإن المزيد من X_1 يصحبه المزيد من المورد X_2 وهذا أيضاً سلوك غير رشيد. ومن هذا يتضح أن المنطقة الإقتصادية هي تلك المنطقة التي تقع بين الخطوط الحرجة والتي يتحقق من خلالها الإحلال الإقتصادي للموارد.

هذا وتجدر الملاحظة هنا أن $MRTS_{21}$ للخط الحرج OA يعبر عنه بالصيغة التالية:

$$MRTS_{21} = \frac{MPP_{x_2}}{MPP_{x_1}} = \frac{0}{MPP_{x_1}} = 0$$

وعلى هذا الخط أيضاً فإن :

$$MRTS_{12} = \frac{MPP_{x_1}}{0} = \infty$$ غير محدد،

بالمثل نجد أن $MRTS_{12}$ على الخط الحرج OB هو غير محدد:

$$MRTS_{12} = \frac{MPP_{x1}}{MPP_{x2}} = \frac{MPP_{x_1}}{0} = \infty$$ غير محدد،

غير محدد، وعلى هذا الخط أيضاً نجد أن :

$$MRTS_{21} = \frac{MPP_{x_2}}{MPP_{x_1}} = \frac{0}{MPP_{x_1}} = 0$$

وبالنظر إلى المورد X_2 فإنه على يمين الخط الحرج OA نجد أن:

$$MRTS_{21} \pi 0$$

حيث أن:

$$MPP_{x_2} \ \pi \ O$$

كما أنه يسار الخط الحرج OB بالنسبة للمورد X_1 نجد أن:

$$MRTS_{12} \ \pi \ 0$$

حيث أن:

$$MPP_{x_1} \ \pi \ 0$$

ومن ثم فإنه على يمين الخط الحرج OA وعلى يسار الخط الحرج OB تظهر المرحلة الثالثة للإنتاج للموردين X_2,X_1 على الترتيب، ومن هنا تظهر أهمية الخطوط الحرجة لأنها تحصر المنطقة الإقتصادية أو المنطقة الرشيدة للإنتاج والتي لاتحوي بداخلها الإنتاجية الحدية السالبة للموارد.

الكفاءة الإقتصادية *Economic Efficiency*

تتضمن الكفاءة الإقتصادية كلا من الكفاءة التقنية أو الإنتاجية (*Technical Efficiency*) بالإضافة إلى الكفاءة السعرية (*Price (Allocative) Efficiency*). وتعتبر المنشأة ***A*** أكثر كفاءة من المنشأة ***B*** إذا استطاعت إنتاج قدر معين من الناتج بقدر أقل من التكاليف أو إذا استطاعت إنتاج قدر أعلى من الناتج بالقدر نفسه من التكاليف.

كما أن المنشأة تكون أكثر كفاءة سعرية إذا ما استخدمت الموارد بالطريقة التي تعظم أرباحها، ومن الشكل رقم (٨،١٠) يمكن توضيح مفهوم الكفاءة بشقيها التقني *Technical* والسعري *Allocative*. والذي يرجع الفضل في اكتشافه إلى فارل *Farrell* عام ١٩٥٧م[١٢] . إن منحنى الإنتاج ***QQ`*** يضم كافة المنشآت التي تتسم بالكفاءة التقنية أي أن المنشآت ***D,K,B,A*** لها كفاءة تقنية تعادل ١٠٠% بالنسبة للمنشآت الأخرى التي إما لاتتمتع بالكفاءة التقنية مثل المنشآت ***E,G*** حيث تنتج نفس القدر من الناتج ولكن بقدر أكبر من الموارد، أو أنها منشآت لايتحقق معها أي إنتاج مثل ***H,I*** لأنها تقع في منطقة الإنتاج غير المتحقق *Infeasible*.

[١٢] Farrell, M. J. (1957). The Measurement of Productive Efficiency. J. Roy. Statist. Soc., Series A (General). 120: 253 – 81.

لإيضاح شقي الكفاءة الإقتصادية(التقنية والسعرية) للمنشأة ***E*** فإن الكفاءة التقنية لهذه المنشأة هي $\frac{0B}{0E}$ إذ أن المنشأة ***B*** كما سبق إيضاحه تتمتع بكفاءة تقنية تساوي ١٠٠% أما الكفاءة التقنية للمنشأة ***E*** أقل من نظيرتها للمنشأة ***B*** الواقعة على منحنى سواء الإنتاج الذي يضم المنشآت التي تتمتع بكفاءة تقنية تساوي ١٠٠%.

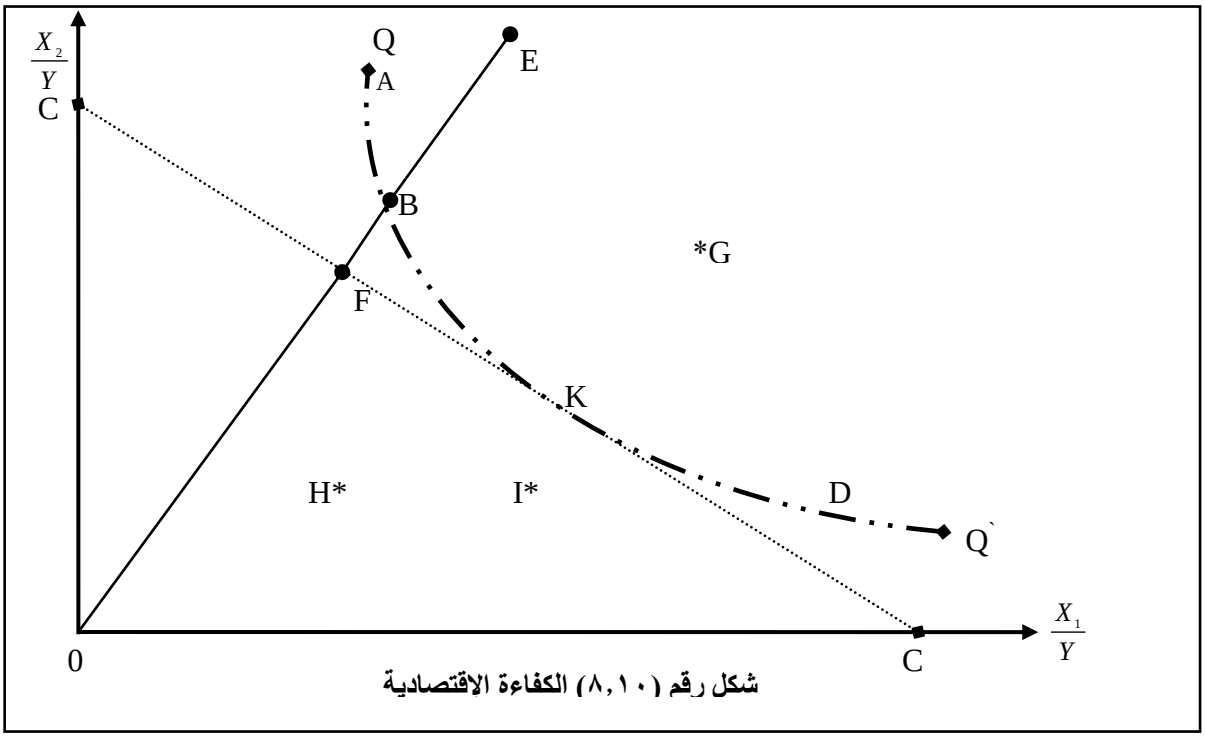
ويتضح من الشكل (٨،١٠) أيضاً أنه في ظل وجود خط التكاليف المتساوي ***CC`*** فإن المنشأة ***K*** هي الوحيدة التي تحقق معظمة الأرباح أي يتحقق معها شق الكفاءة السعرية أي هي أكثر كفاءة من الناحية الإقتصادية عن المنشأة ***B*** التي تتمتع فقط بالكفاءة التقنية إذ أنها تقطع خط التكاليف ***CC`*** عند النقطة ***F*** والتي عندها تكون النسبة السعرية لموردي الإنتاج X_1 ،X_2 مختلفة عن نظيرتها عند النقطة ***K*** وبهذا فإن الكفاءة السعرية للمنشأة ***B*** تقاس بالنسبة $\frac{0F}{0B}$ وهي أقل من الوحدة إذ أنه بدلاً من إنفاق القدر ***0F*** يتم إنفاق القدر ***0B*** لإنتاج وحدة الناتج.

فإذا فرض أن المنشأة ***E*** عدلت من أوضاعها و إستخدمت توليفة الموارد التي تستخدمها ***K*** مع تثبيت كفاءتها التقنية عند ***E*** فإن تكلفتها سوف تنخفض بما يوازي النسبة $\frac{OF}{OB}$ ما دامت لم تتغير أسعار الموارد. على هذا فإن الكفاءة الإقتصادية للمنشأة ***E*** هي عبارة عن حاصل ضرب الكفاءة التقنية في الكفاءة السعرية أي أن الكفاءة الإقتصادية للمنشأة هي:

$$\left(\frac{OB}{OE}\right)\left(\frac{OF}{OB}\right)=\frac{OF}{OE}$$

ومن ثم فكلما إقتربت المنشأة ***E*** من ***QQ`*** تزداد كفاءتها الإقتصادية.[١٣]

[١٣] Coelli, T.J., D.S., Prasada Rao, and G. E., Battese. (1998). An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis. Kluwer Academic Publishers,. London. UK



شكل رقم (٨,١٠) الكفاءة الإقتصادية

الباب التاسع

٩,١ دالة إنتاج كوب-دوجلاس

٩,٢ *خصائص دالة* إنتاج كوب-دوجلاس:

٩,٣ تعظيم أرباح المنشأة باستخدام دالة كوب-دوجلاس

٩,٤ أهم عيوب دالة كوب دوجلاس

٩,٥ إشتقاق دالة التكاليف من دالة إنتاج كوب دوجلاس

٩,٦ دالة الإنتاج ذات مرونة الإحلال الثابتة *(CES)*

٩,٧ خصائص دالة *CES*

٩,٨ أهم عيوب دالة *CES*

٩,١٠ دالة الإنتاج ذات مرونة الإحلال المتغيرة *VES*

٩,١١ خصائص مرونة الإحلال في الدالة *VES*

٩,١٢ أهم عيوب دالة *VES*

٩,١٣ الدوال الإنتاجية الجبرية من الدرجة الثانية

٩,١٤ خصائص الدوال الإنتاجية الجبرية من الدرجة الثانية

٩,١٥ أهم عيوب الدوال الإنتاجية الجبرية من الدرجة الثانية

٩,١٦ دوال الإنتاج غير الجبرية

٩,١٧ خصائص دوال الإنتاج غير الجبرية

دالـــة إنـــتاج كـــــوب-دوجـــــــلاس

Cobb-Douglas Production Function (C-D)

يمكن أن نخلص مما سبق إلى أن هناك ثلاثة قوانين أساسية تحكم العملية الإنتاجية وهي:

١- وجود علاقة طردية بين حجم الإنتاج (y) والمستخدم من عوامل الإنتاج($x's$).

٢- قانون تناقص الغلة *Low of Diminishing Return*: حيث تتناقص الإنتاجية الحدية لعوامل الإنتاج عند زيادتها.

٣- قانون عائد السعة : فيمكن لعائد السعة أن يكون ثابتاً، أو متناقصاً، أو متزايداً.

ولقد أكتشف الإقتصاديان *Paul Douglas,C.W Cobb* بإستخدام بيانات عن علاقات واقعية للإنتاج على مدى أربعة وعشرين عاماً دالة من أكبر مميزاتها طواعيتها لتطبيق القونين الثلاثة السابق الإشارة إليها. وقد إرتبطت هذه الدالة بإسميهما عام ١٩٢٧م ويمكن كتابتها كما أتت في دراستهما رياضياً كما يلي:

$$\hat{Y} = \beta_o L^{\beta_1} K^{\beta_2} \qquad (٩,١)$$

حيث:

Y= الناتج،

L= العمالة (رجل/سنة)،

K= رأس المال،

B_o = مقدار ثابت،

B_1,β_2= عوامل موجبة تختلف قيمتها من دالة لأخرى.

تعتبر هذه الدالة التي حاول فيها الإقتصاديان *Paul Douglas,C.W Cobb* تطويع بيانات عن الصناعة الأمريكية في الفترة من ١٨٩٩-١٩٢٢م لقياس مدى مساهمة العمالة ورأس المال في الإنتاج من أهم أدوات التحليل الإقتصادي التي ظهرت حتى الآن والتي إنتشرت بشكل واسع وما زالت تستخدم بكثرة في مجال الدراسات الإقتصادية، فضلاً عن أن هذه الدالة تعتبر الأداة التي مكّنت

الإقتصاديين من بناء نماذج وإكتشاف دوال أخرى أدت إلى إحداث طفرة واضحة في أساليب التحليل الإقتصادي في عصرنا هذا ولهذا فإن دراسة هذه الدالة بالتفصيل من كافة جوانبها تعد هدفاً أساسياً في هذا الجزء من المادة.

كيفية إنطباق القوانين الثلاثة أعلاه على هذه الدالة:

أولاً: مرونة الإنتاج بالنظر إلى عامله

ويقصد بها درجة إستجابة التغير في حجم الإنتاج نتيجة التغير في حجم أحد عوامل الإنتاج المستخدمة. بمفاضلة الدالة (٩,١) بالنسبة للعامل L يتضح أن:

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial L} = \hat{\beta}_1 (\hat{\beta}_o L^{\hat{\beta}_1 - 1} K^{\hat{\beta}_2})$$
$$= \hat{\beta}_1 \frac{(\hat{\beta}_o L^{\hat{\beta}_1} K^{\hat{\beta}_2})}{L}$$
$$= \hat{\beta}_1 \frac{\hat{Y}}{L}$$

بالقسمة على $\frac{\hat{Y}}{L}$ ينتج أن :

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial L} \frac{L}{\hat{Y}} = \hat{\beta}_1 \qquad (٩,٢)$$

ويطلق على $\hat{\beta}_1$ مرونة الإنتاج بالنسبة للعامل L (العمالة) حيث أن النتيجة في المعادلة (٩,٢) تشير إلى أن:

$\hat{\beta}_1$ = التغير النسبي في حجم الناتج ($\hat{Y}$) / التغير النسبي في عنصر العمل (L)

وبالطريقة السابقة نفسها يمكن إثبات أن مرونة الإنتاج بالنسبة للعامل K تساوي $\hat{\beta}_2$ أي أن:

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial L} \frac{K}{\hat{Y}} = \hat{\beta}_2 \qquad (٩,٣)$$

والنتيجتان (٩,٢،٩,٣) تثبتان القانون الأول.

فإذا زادت نسبة المستخدم من عامل الإنتاج L أو K بنسبة ١% يزداد الإنتاج الكلي بنسبة $\hat{\beta}_1$ % في حالة L ، $\hat{\beta}_2$ % في حالة K.

ثانياً: تــناقص الـــــغلة

يعني قانون تناقص الغلة، تناقص الإنتاجية الحدية. وكما وجدنا من المعادلة (٩,١) أن الإنتاجية الحدية للعامل L هي:

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial L} = \hat{\beta}_1 \frac{\hat{Y}}{L} \qquad (٩,٤)$$

وقياساً على ذلك فإن الإنتاجية الحدية للعامل K هي:

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial K} = \hat{\beta}_2 \frac{\hat{Y}}{K} \qquad (٩,٥)$$

المعادلتين (٩,٤،٩,٥) تظهران أن الإنتاجية الحدية لعامل الإنتاج L ($\hat{\beta}_1 \frac{\hat{Y}}{L}$) تتناقص بزيادة المستخدم من L وكذلك الإنتاجية الحدية لعامل الإنتاج K ($\hat{\beta}_2 \frac{\hat{Y}}{K}$) تتناقص هي الأخرى بزيادة المستخدم من K.

ثالثاً: غـــــلة الـــــحجم

تبين غلة الحجم نسبة الزيادة في حجم الإنتاج الكلي الناتجة من زيادة في مستوى النشاط(أي جميع عوامل الإنتاج المستخدمة) بنسبة معينة. فإذا بدأنا بالدالة:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_o L^{\hat{\beta}_1} K^{\hat{\beta}_2}$$

فإذا قررنا زيادة مستوى النشاط بالنسبة A فإن:

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= \hat{\beta}_o (AL)^{\hat{\beta}_1} (AK)^{\hat{\beta}_2} \\ &= \hat{\beta}_o A^{\hat{\beta}_1} L^{\hat{\beta}_1} (A^{\hat{\beta}_2} K^{\hat{\beta}_2}) \\ &= A^{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2} (\hat{\beta}_o L^{\hat{\beta}_1} K^{\hat{\beta}_2}) \\ &= A^{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2} \hat{Y}\end{aligned} \qquad (٩,٦)$$

أي إذا زاد حجم النشاط بنسبة A فإن حجم الإنتاج الكلي سيزيد بنسبة $A^{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2}$ والمعادلة (٩,٦) يمكن أن تساعدنا في تقدير عائد السعة *Returns to Scale* وعلى ذلك إذا كانت:

(١) $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 = ١$ فإن هذا يعني ثبات عائد السعة *Constant Returns to Scale*.

(٢) $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 > ١$ فإن هذا يعني تزايد عائد السعة *Increasing Returns to Scale*.

(٣) $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 < ١$ فإن هذا يعني تناقص عائد السعة *Decreasing Returns to Scale*.

بالإضافة إلى الخصائص السابق الإشارة إليها فإن دالة كوب- دوجلاس Cobb-Douglas تتسم أيضاً بالتالي:

١- إن الدالة خطية في الصورة اللوغاريتمية أي أن:

$$\log \hat{Y} = \log \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 \log L + \hat{\beta}_2 \log K \qquad (٩,٧)$$

وتعد الصيغة (٩,٧) ذات أهمية خاصة إذ أن الدالة يتم تقدير معلماتها وهي في هذه الصورة المبسطة.

٢- الناتج الحدي للمورد يعتبر دالة للناتج المتوسط فإذا كان الناتج الحدي للمورد مثلاً هو:

$$MP_L = \frac{\partial \hat{Y}}{\partial L} = \hat{\beta}_1 \frac{\hat{Y}}{L} \phi\ 0$$

$$= \hat{\beta}_1 (AP_L) \phi\ 0 \qquad (٩,٨)$$

حيث AP تشير إلى الناتج المتوسط الذي يساوي الناتج الكلي $\hat{Y}$ مقسوماً على مورد الإنتاج L أي $\frac{Y}{L}$ ، المعادلة (٩,٨) توضح أن مرونة الإنتاج للمورد L تساوي نسبة الإنتاج الحدي لمتوسط إنتاج المورد نفسه أي أن :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{MP_L}{AP_L}$$

أي أن الناتج الحدي يظل موجباً مادام مورد الإنتاج كذلك كما أن مجموعة النقاط التي تكون فيها الإنتاجية الحدية للموارد مساوية للصفر على خريطة سواء الإنتاج تشكل الخطوط الحرجة *Ridge Lines* للدالة والتي تحصر بداخلها توليفة الموارد الأكثر كفاءة من الناحية التقنية و التي يطلق عليها أيضاً المنطقة الرشيدة للإنتاج.

٣- تسمح دالة كوب دوجلاس بظهور أحد المراحل الثلاث للإنتاج والتي تكون فيها الإنتاجية الحدية إما ثابته، متزايدة، أو متناقصة ويظهر هذا من خلال التفاضل الثاني للناتج $\hat{Y}$ بالنسبة لمستوى مورد الإنتاج كما يلي:

$$\frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial L^2} = \hat{\beta}_1 (\hat{\beta}_1 - 1) \frac{\hat{Y}}{L^2} \qquad (٩,٩)$$

ويتضح من التفاضل الثاني أن قيمته سواء كانت صفرية، موجبة، أو سالبة إنما تتوقف على قيمة $\hat{\beta}_1$.

٤- دالة كوب – دوجلاس هي دالة متجانسة من الدرجة $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2$ أي أن درجة التجانس تتوقف على مجموع مرونات الإنتاج E حيث:

$$E = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2$$

وكما سبق وأشرنا فإن درجة التجانس قد تكون مساوية للوحدة أو الصفر أو أكبر من الوحدة وذلك في حالات ثبات عائد السعة أو تناقصها أو تزايدها على الترتيب. هذا وتشير درجة التجانس إلى مدى إستجابة الناتج للتغير في عنصري الإنتاج بنسبة واحدة.

٥- أن القيم الموجبة لمرونة إنتاج الموردين والتي تقل عن الوحدة في هذه الدالة، إنما تعني أن منحنى سواء الإنتاج محدب تجاه نقطة الأصل مما يعني تناقص معدل الإحلال الحدي *Marginal Rate of Technical Substitution (MRTS)* بين الموردين أي أن:

$$MRTS_{LK} = \frac{\partial \hat{Y} / \partial L}{\partial \hat{Y} / \partial K} = \frac{\hat{\beta}_1 \hat{Y} / L}{\hat{\beta}_2 \hat{Y} / K} = \frac{\hat{\beta}_1 K}{\hat{\beta}_2 L} \qquad (٩,١٠)$$

ويتضح من المعادلة (٩,١٠) أنه كلما زاد إحلال L محل K فإن $MRTS_{LK}$ يتناقص باستمرار.

٦- الدالة ليس لها نهاية عظمى ومن ثم ليس لها خطوط حرجة.

٧- يتوقف الأسلوب التقني (طريقة مزج الموارد) على النسبة $\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2}$ في المعادلة (٩,١٠) فمع ثبات معامل عنصر رأس المال $\hat{\beta}_2$ فإن زيادة معامل العمالة ($\hat{\beta}_1$) تعني إستخدام إسلوب تكثيف العمالة *Labour Intensive Technique* في الإنتاج على حساب الآلات أي بمعنى آخر إستخدام قدر أكبر من العمالة والعكس إذا كانت قيمة $\hat{\beta}_2$ أكبر من قيمة $\hat{\beta}_1$ فإن إستخدام إسلوب تكثيف رأس المال *Capital Intensive Technique* هو الأفضل للإنتاج. هذا وتجدر الإشارة إلى أن إختيار أي من الأسلوبين إنما يتوقف على أسعار هذين الموردين.

٨- ثبات مرونة الإحلال ومساواتها للوحدة، تعرّف مرونة الإحلال *The Elasticity of Substitution* بانها التغير النسبي في الموارد إلى التغير النسبي في معدل الإحلال الحدي أي أن:

$$\sigma = \text{التغير النسبي في } K/L \quad / \quad \text{التغير النسبي في } MRTS$$

حيث σ هي مرونة الإحلال، ولإثبات أن مرونة إحلال دالة *C-D* ثابته ومساوية للوحدة فإن:

$$\sigma = \frac{\partial(K/L)/(K/L)}{\partial(\partial K/\partial L)/(\partial K/\partial L)}$$
$$= \frac{\partial(K/L)/(K/L)}{\frac{\partial(\hat{\beta}_1/\hat{\beta}_2.K/L)}{(\hat{\beta}_1/\hat{\beta}_2.K/L)}} \qquad (٩,١١)$$
$$= \frac{\partial(K/L)(\hat{\beta}_1/\hat{\beta}_2)}{(\hat{\beta}_1/\hat{\beta}_2)\partial(K/L)} = 1$$

مما يعني أن الممر التوسعي لدالة كوب-دوجلاس يكون خطاً مستقيماً كما هو موضح بالمعادلة التالية:

$$K = (\hat{\beta}_2/\hat{\beta}_1)(\frac{r_1}{r_2})L$$

تـــعظيم أربـــاح الـــمنشأة باســـتخدام دالة كـــوب- دوجـــلاس

تعرف أرباح المنشأة بأنها الفرق بين الإيراد الكلي و التكاليف الكلية. فإذا فرض أن الإيراد الكلي يأخذ الشكل :

$$TR = Y.P_Y$$

حيث تشير TR إلى الإيراد الكلي في حين تشير كل من P_y,Y إلى الناتج الفيزيقي و سعر الوحدة من الناتج على الترتيب. وبفرض وجود موردين إنتاجيين فقط هما X_2,X_1 فإن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل:

$$TC = P_{x_1}X_1 + P_{x_2}X_2 + TFC$$

حيث تشير TFC إلى التكاليف الثابته الكلية في حين تشير كل من $P_{x_1}X_1$, $P_{x_2}X_2$ إلى سعر الوحدة من الموردين X_2,X_1 على الترتيب. وحيث أن دالة الربح تأخذ الصورة التالية:

$$\Pi = YP_y - P_{x_1}X_1 - P_{x_2}X_2 - TFC \qquad (٩,١٢)$$

هناك طرق ثلاث لتعظيم أرباح المنشأة وإن كانت جميعها تأتي في النهاية بنتيجة واحدة وهي:

الطريقة الأولى:

وذلك بإحلال دالة الإنتاج في المعادلة (٩,١٢) وبعدها يتم إيجاد التفاضلات الجزئية للمتغير π بالنسبة لمتغيرات المعادلة وهي في هذه الحالة X_2,X_1.

الطريقة الثانية:

وفيها يتم الإستعانة بمضروبات لاجرانج وفيها تتحول دالة الربح (٩,١٢) إلى دالة لاجرانج كما يلي:

$$\Pi = YP_y - P_{x_1}X_1 - P_{x_2}X_2 - TFC - \lambda[Y - F(X_1, X_2)]$$

حيث λ تشير إلى معامل لاجرانج *Lagrange Multiplier* وباقي العوامل كما هي معرفة سابقاً، ثم يتم إجراء التفاضلات الجزئية للمتغيرات X_2,X_1 بالإضافة إلى المتغير λ و المتغير Y مع ملاحظة أن (YP_y) يعبر عن الإيراد الكلي في هذه الحالة ولا يتم إحلال الدالة $Y=f(X_2,X_1)$ محل Y في جزئية الإيراد الكلي.

الطريقة الثالثة:

وفيها يتم إستخدام مضروبات لاجرانج ولكن لإيجاد توليفة الموارد الأقل تكلفة. أي أن دالة الهدف تكون تدنية تكاليف المنشأة في ظل قيد دالة الإنتاج. وتصبح دالة الهدف في هذه الحالة كما في المعادلة التالية:

$$LC = P_{x_1}X_1 + P_{x_2}X_2 + TFC + \lambda[\overset{o}{Y} - F(X_1, X_2)]$$

ثم يتم إيجاد التفاضلات الجزئية لدالة الهدف للمتغيرات λ, X_1, X_2 في حين $\overset{o}{Y}$ تشير إلى ثبات الإنتاج عند $\overset{o}{Y}$ ولا يتم إجراء التفاضل بالنسبة له. وفي مناقشتنا سوف نستخدم الطريقة الثانية ومن خلال إستخدام دالة إنتاج كوب-دوجلاس المشار إليها في المعادلة (٩,١) تصبح دالة الهدف كما يلي:

$$\Pi^* = P_y\hat{Y} - rK - wL - TFC - \lambda(\hat{Y} - \hat{\beta}_o L^{\hat{\beta}_1} K^{\hat{\beta}_2})$$

أي أن:

$$\Pi^* = TR - rK - wL - TFC - \lambda(\hat{Y} - \hat{\beta}_o L^{\hat{\beta}_1} K^{\hat{\beta}_2})$$

حيث:

Π^*=أقصى ربح،

r = سعر الوحدة من رأس المال (سعر الفائدة)،

w = أجر العامل،

TFC= إجمالي التكاليف الثابته،

λ = معامل لاجرانج،

P_y = سعر الوحدة من الناتج Y،

TR= الإيراد الكلي. باقي المتغيرات تم تعريفها سابقاً في المعادلة (٩,١).

ولتحديد كميات الموارد التي تحقق هدف المنشأة في معظمة أرباحها فإن ذلك يستدعي تحقيق شرطين:

الشرط الضروري:

وفيه يجب مساواة التفاضلات الجزئية لدالة الهدف لمتغيرات الدالة بالصفر كما يلي:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = -w + \lambda\hat{\beta}_1 \frac{\hat{\beta}_o L^{\hat{\beta}_1} K^{\hat{\beta}_2}}{L} = 0$$

ومنها:

$$w = \lambda\hat{\beta}_1 \frac{\hat{Y}}{L}$$

و بالمثل: $$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = -r + \lambda \hat{\beta}_2 \frac{\hat{\beta}_o L^{\hat{\beta}_1} K^{\hat{\beta}_2}}{K} = 0$$

ومنها: $$r = \lambda \hat{\beta}_2 \frac{\hat{Y}}{K}$$

كذلك: $$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \hat{Y}} = P_Y - \lambda = 0$$

ومنها: $$P_Y = \lambda$$

كذلك: $$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda} = -\hat{Y} + \hat{\beta}_o L^{\hat{\beta}_1} K^{\hat{\beta}_2} = 0$$

ومنها فإن: $$\hat{Y} = \hat{\beta}_o L^{\hat{\beta}_1} K^{\hat{\beta}_2}$$

الـشرط الــكافــي:

لمعظمة أرباح المنشأة يستدعى أن تكون التفاضلات الثانية لدالة الربح لموارد الإنتاج سالبة أي أن:

(أ) $$\frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial K^2} = PF_{11} \pi 0$$

(ب) $$\frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial L^2} = PF_{22} \pi 0$$

(ج) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial K^2} & \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial K \partial L} \\ \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial L \partial K} & \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial L^2} \end{vmatrix} = P^2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \pi 0$$

حيث:

$$f_{11} = \frac{\hat{\beta}_2(\hat{\beta}_2 - 1)\hat{Y}}{K^2}$$

$$f_{22} = \frac{\hat{\beta}_1(\hat{\beta}_1 - 1)\hat{Y}}{L^2}$$

$$f_1 = \hat{\beta}_1\hat{\beta}_o L^{\hat{\beta}_1 - 1}K^{\hat{\beta}_2}$$

$$f_{12} = \frac{\hat{\beta}_1\hat{\beta}_o L^{\hat{\beta}_1 - 1}K^{\hat{\beta}_2}}{LK}$$

$$= \frac{\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2\hat{Y}}{LK}$$

$$f_{21} = \frac{\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2\hat{Y}}{LK}$$

وحيث أن سعر الوحدة من الناتج P_y موجبة فإن تحقيق الشرط الكافي لمعظمة أرباح المنشأة يستدعي أن:

$$f_{11} = \frac{\hat{\beta}_2(\hat{\beta}_2 - 1)\hat{Y}}{K^2} \ \pi \ 0$$

$$f_{22} = \frac{\hat{\beta}_1(\hat{\beta}_1 - 1)\hat{Y}}{L^2} \ \pi \ 0$$

$$f_{11}f_{22} \ \Phi \ f_{12}f_{21}$$

$$\frac{\hat{\beta}_1\hat{\beta}_o(\hat{\beta}_1 - 1)(\hat{\beta}_2 - 1)\hat{Y}^2}{L^2K^2} \ \Phi \ \frac{(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2)^2\hat{Y}^2}{L^2K^2}$$

أي أن :

$$(\hat{\beta}_1 - 1)(\hat{\beta}_2 - 1) \ \Phi \ \hat{\beta}_1\hat{\beta}_2$$

وهذا يستدعي بالطبع أن تكون :

$$\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \ \pi \ 1$$

أي أن شرط معظمة الأرباح بافتراض سيادة المنافسة الكاملة في أسواق الموارد وسوق الناتج يستدعي أن تكون الدالة متجانسة من الدرجة أقل من الوحدة أي بمعنى آخر في ظل تناقص عوائد السعة.

أهـــم عـــيوب دالـــــة كـــوب – دوجـــلاس

أوضح ريدر[14] *Reder* عام ١٩٤٣م أن أهم عيوب دالة (*C-D*) هي:

١- ثبات الإنتاجية الحدية لعناصر الإنتاج خاصة العمل داخل المنشأة و المتحصل عليه من معادلة *C-D* وذلك كما يلي: $\frac{\partial Y}{\partial L} = \beta_1 \frac{Y}{L}$ والذي يتفق مع النتيجة التي توصل إليها دوجلاس *Douglas* من أن معدل الأجر w يتساوى مع الإنتاجية الحدية للعمل أي أن :

$\frac{\partial Y}{\partial L} = w$ هو أمر غير ممكن خاصة إذا واجه عنصر العمل ظروف تشغيل إحتكار القلة في سوق العمل إذ تدفع المنشآت للعمل أجراً أقل من إنتاجيته الحدية.

أضاف كارتر[15] *Carter* ١٩٥٦م أن أمام بساطة وسهولة قياس دالة *C-D* فإن هناك ثمناً لهذا يتمثل في:

٢- ثبات المرونة الإنتاجية للموارد وكذلك ثبات مرونة الإحلال إذ أن كفاءة المورد قد تتناقص باستمرار إضافة وحدات متتالية منه ومن ثم إنخفاض إنتاجيته الحدية.

٣- الدالة غير قادرة على التعبير عن مراحل الإنتاج الثلاث معاً في آن واحد أي أنها غير قادرة على إظهار الأحوال التي تعكس العائد الحدي المتزايد والمتناقص بالإضافة إلى العائد الحدي السالب معاً.

في حين ذكر هيثفيلد[16] *Heathfield* ١٩٧١م:

٤- دالة *C-D* هي دالة تطبيقية فقط للموارد الإحلالية وليس المكملة ولهذا فإن الدالة تصلح فقط للمدى البعيد إذ يمكن أن تتحول الموارد المكملة في المدى القريب إلى إحلالية في المدى البعيد.

---

[14] Reder, M.W., "An Alternative Interpretation of Cobb-Douglas Function." Econometerics Vol. 11., July-October, 1943.
[15] Carter, H.O., "Modification of the Cobb-Douglas Function to Destroy Constant Elasticity and Symmetry. Resource Productivity, Returns to Scale, and Farm Size." The Iwa State College Press, 1956.
[16] Heathfield, Davied F., "Production Functions." The Macmillan Press LTD, 1971.

أما يوتوبولس و نوجنت [17] *Yotopoulos, Pan A-and Deffery B.Nugent* ١٩٧٦م فأضافوا أن:

٥- ثبات مرونة الإحلال لدالة *C-D* ومساواتها للوحدة إنما تعني أن الممر التوسعي للمنشأة هو خط مستقيم أي أن مقدرة الموارد على الإحلال محل بعضها البعض هي مقدرة ثابته. ليس هذا فحسب فإذا إشتملت الدالة على أكثر من متغيرين مستقلين فإن هذا يعني أن الممرات التوسعية لكل عنصرين إنتاجيين في الدالة يجب أن تكون خطية وهذا بالطبع أمر بالغ الصعوبة إن لم يكن نادر الحدوث، فلا يمكن أن تظل جميع الموارد بالكفاءة نفسها مع إستمرار إحلالها محل بعضها.

٦- تشترط دالة *C-D* ضرورة وجود كل عناصر الإنتاج حتى تتم العملية الإنتاجية إذ أن غياب أحدهما يؤدي إلى تلاشي الدالة كلية.

[17] Yotopoulos, Pan A-and Deffery B.Nugent., " Economics of Development, Empirical Investigation." Harper and Row Publishers, 1976.

إشـــتقاق دالـــة الـــتكاليف من دالـــة إنـــتاج كـــوب – دوجـــلاس

إذا فرض أن دالة كوب دوجلاس تأخذ الشكل التالي:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

وأن دالة التكاليف للمنشأة هي:

$$C = rK + wL$$

حيث:

Y= الناتج، K= رأس المال، L= العمل، r= سعر رأس المال، w = سعر وحدة العمل، C= التكاليف الكلية (المتغيرة)، A,α,β= معاملات الدالة.

باستخدام مضروبات لاجرانج فإن كميات الموارد التي تحقق تدنية التكاليف الإنتاجية ،تعني مساواة التفاضلات الجزئية للدالة لهذه المتغيرات بالصفر كما يلي:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial l} = w - \lambda\beta\frac{Y}{L} = 0$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial K} = r - \lambda\alpha\frac{Y}{K} = 0$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial l} = Y - AK^{\alpha}L^{\beta} = 0$$

وهذا مايسمى بالشرط الضروري لتدنية التكاليف الإنتاجية للمنشأة، ومن هذا الشرط الضروري يتضح أن :

$$\frac{\alpha L}{\beta K} = \frac{r}{w}$$

وعلى هذا فإن:

$$K = \frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta}L$$

وباحلال K المتوصل إليها في معادلة الإنتاج الأصلية ينتج أن:

$$Y = A\left(\frac{w}{r} \quad \frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha L^{\alpha+\beta}}$$

ومنها ينتج أن دالة الطلب المشروط لعنصر العمل تكون كالتالي:

$$L^{*} = \left[\frac{Y}{A} \quad \left(\frac{r}{w} \quad \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

وبإحلال L في معادلة الممر التوسعي $\left(K = \frac{w}{r} \quad \frac{\alpha}{\beta} L\right)$ نحصل على دالة الطلب المشترط لعنصر رأس المال والتي تكون كالتالي:

$$K^{*} = \left(\frac{w}{r} \quad \frac{\alpha}{\beta}\right)\left[\frac{Y}{A}\left(\frac{r}{w} \quad \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

ثم بإحلال المعادلتين الأخيرتين L^{*},K^{*} في معادلة التكاليف الأصلية نحصل على دالة التكاليف المطلوبة:

$$C = r\left(\frac{w}{r} \quad \frac{\alpha}{\beta}\right)\left[\frac{Y}{A}\left(\frac{r}{w} \quad \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + w\left[\frac{Y}{A}\left(\frac{r}{w} \quad \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

ويتضح من هذه المعادلة أن التكاليف دالة لكل من الناتج Y و أسعار الموارد r,w بالإضافة إلى معاملات دالة كوب دوجلاس A,α,β.

دالـــــــــة الإنـــــــــــتاج ذات مـــــــــــرونة الإحـــــــــــلال الـــــــــــــثابتة

The Constant Elasticity of Substitution Production Function (CES)

أشار أرو *Arrow*، تشنري *Chenery* ومنهاس*Minhas* بالإضافة لى سولو *Solw* سنة ١٩٦١م إلى أن معدل الإحلال الثابت بين موردي العمل ورأس المال والمساوي للوحدة في دالة كوب دوجلاس هو أخطر عيوبها وعليه ولتلافي هذا العيب تم إبتكار دالة *CES* التي تفترض ثبات مرونة الإحلال بين الموارد ولكن عدم مساواة تلك المرونة للوحدة، هذا وتأخذ هذه المعادلة التي يطلق عليها أحياناً دالة *ACMS* نسبة إلى الحروف الأولى لمكتشفيها الشكل الرياضي التالي:

$$Y = A\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} \qquad (٩,١٣)$$

حيث:

Y= الناتج،

A= ثابت الدالة ويطلق عليه **معامل الكفاءة،**

δ = معامل توزيع حيث يوضح مدى مساهمة كل من رأس المال والعمل في الإنتاج وعادة ماتنحصر قيمة هذا المعامل بين الوحدة والصفر ($0<\delta<1$).

ρ = **معامل الإحلال،** يوضح مرونة الإحلال بين الموارد وعادة ما تكون قيمته أكبر من أو يساوي الوحدة ($\rho\geq1$). L,K= متغير رأس المال والعمل على الترتيب.

خـــــــــصائص دالـــــــــــة *CES*[١٨]:

١- الإنتاجية الحدية للموارد موجبة فمثلاً نجد أن الإنتاجية الحدية لمورد رأس المال يمكن أن يعبر عنها بالمعادلة التالية:

$$MP_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = -\frac{A}{-\rho}(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}-1}(-\delta\rho K^{-\rho-1}) \quad (٩,١٤)$$
$$= \delta A(\frac{Y}{K})^{1+\rho}$$

ونظراً لأن A,δ هي عوامل موجبة فإن MP في المعادلة (٩,١٤) موجب للقيم الموجبة لرأس المال K.

٢- تناقص معدل الإحلال الحدي التقني بين رأس المال والعمل حيث أن:

$$MRTS_{LK} = \frac{\partial K}{\partial L} = \frac{\delta}{1-\delta}(\frac{K}{L})^{\rho+1}$$

٣- الدالة ليس لها نهاية عظمى وليس لها خطوط حرجة.

٤- مرونة الإحلال ثابتة ولا تساوي الوحدة إنما تعتمد على قيمة ρ كما هو موضح بالمعادلة التالية:

[18] Arrow,K.D.,H.B. Cheney, B-S.Minhas, and R.M.Solow, Capital –Labour Sabstitution and Economic Efficiency, The Review of Economics and Statistic , Vol.3,No.3, August, 1961.

$$\sigma = \frac{\frac{d(\frac{K}{L})}{\frac{K}{L}}}{\frac{d(MRTS)}{(MRTS)}}$$

$$= \frac{\frac{d(\frac{K}{L})}{\frac{K}{L}}}{\frac{d(\frac{\delta}{1-\delta})(\frac{K}{L})^{\rho+1}}{(\frac{\delta}{1-\delta})(\frac{K}{L})^{\rho+1})}}$$

$$= \frac{\frac{d(\frac{K}{L})}{\frac{K}{L}}}{\frac{d(\frac{K}{L})^{\rho+1}}{(\frac{K}{L})^{\rho+1}}} \qquad (٩,١٥)$$

$$= \frac{1}{\rho+1}$$

وحيث قيمة ρ ثابتة، فإن σ أيضاً ثابتة غير أن قيمة الأخيرة تختلف باختلاف قيمة ρ فإذا كانت:

(أ) ρ= **صفر** فإن الدالة تتسم بثبات مرونة الإحلال ومساواتها للوحدة وتتفق الدالة في هذه الحالة مع دالة كوب دوجلاس.

(ب) P= -١ فإن منحنى سواء الإنتاج يكون خطاً مستقيماً حيث الإحلال لانهائياً بين الموارد.

(ت) P(>)- ١ فإن منحنى سواء الإنتاج يكون أكبر ميلاً حيث يكون الإحلال مرتفعاً لإرتفاع مرونة الإحلال.

(ث) ρ(>)-١ فإن منحنى سواء الإنتاج يتخذ الشكل المقعر تجاه نقطة الأصل على عكس المألوف الذي يتصف بالتحدب تجاه نقطة الأصل.

٥- الدالة تتميز بعدم مساواة مرونة الإحلال للوحدة كما أن الدالة تسمح بالإحلال والتكامل بين عناصر الإنتاج فإذا كانت مرونة الإحلال أكبر من الصفر ($\sigma>0$) فإن هذا يعني أن الموارد

إحلالية، أما إذا كانت الموارد **مكملة** فإن مرونة الإحلال تأخذ القيمة أقل من الصفر ($\sigma<0$)، وعلى هذا فإن الدالة تصلح لوصف بيانات المدى القصير والمدى الطويل بعكس الحال في دالة كوب دوجلاس التي تصلح لبيانات المدى الطويل فقط.

أهـــــــم عـــــــــيوب دالـــــــــة *CES*:

أ- من الصعب إستخدام هذه الدالة للبيانات الخاصة بأكثر من متغيرين مستقلين.

ب- ثبات مرونة الإحلال رغم أنها لا تساوي الوحدة إلاّ أن الدالة مازالت مقيدة بهذا الشرط.

ت- الدالة يمكن أن تصف أحد المراحل الثلاثة المعروفة للإنتاج وليس جميعها في آن واحد وتتفق في هذا مع دالة كوب دوجلاس.

دالـــــة الإنـــــتاج ذات مـــــرونة الإحـــــلال الـــــــمتغيرة[١٩]

The Variable Elasticity of Substitution Production Function (VES)

تعد دالة *VES* تطويراً جديداً لدالة كوب دوجلاس و دالة *CES* حيث تحررت من شرط ثبات مرونة الإحلال، وتأخذ الدالة الصورة الرياضية التالية:

$$Y=\left[\alpha K^{-\left(\frac{1}{b}-1\right)}+a^{-\frac{1}{b}}\frac{1-b}{1-b-c}\left(\frac{K}{L}\right)^{-\frac{c}{b}}L^{-\left(\frac{1}{b}-1\right)}\right]^{\frac{-1}{\frac{1}{b}-1}}$$

وبفرض أن :

$$\theta=\frac{1-b}{1-b-c},\ a^{-\frac{1}{b}}=(1-\alpha)A^{-\rho} \qquad (٩,١٦)$$
$$\rho=\frac{1}{b}-1$$

فإن الدالة (٩,١٦) يمكن إعادة كتابتها كما يلي:

$$Y=\left[\alpha K^{-\rho}+A(1-\alpha)\theta\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho C(1+\rho)}L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} \qquad (٩,١٧)$$

يلاحظ من المعادلة (٩,١٧) أنها تتخذ شكل دالة *CES* فيما عدا أن دالة *VES* تحتوي على عنصر ثالث وهو نسبة رأس المال إلى العمل $\frac{K}{L}$.

[19] Sato,R.and Hofman,R.F., Production Functions with Variable Elasticity of Factor Substitution: Analysis and Testing, Review of Economics and Statistics, Vol. 50, 1968.

وتتسم مرونة الإحلال في الدالة *VES* بالخصائص التالية:

١- مرونة الإحلال في الدالة *VES* تأخذ الصورة التالية:

$$\sigma = \frac{b}{1 - c(1 + \frac{\partial K}{\partial L} \cdot \frac{L}{K})} \qquad (٩,١٨)$$

فإذا كانت $C=0$ فإن $CES=VES$

أما إذا كانت $C=0$ $b=1$ فإن $VES = C\text{-}D$

٢- تتفق دالة *VES* مع كل من دالة *CES* ,*C-D* في أن دالة الناتج الحدي للمورد هي دالة موجبة الميل.

ومن أهم عيوب دالة *VES* مايلي:

١- يصعب تعميم الدالة لأكثر من متغيرين.

٢- الدالة غير خطية المعلمات *Coefficients* مما يشكل صعوبة في تقديرها.

الـــــــدوال الإنـــــــــتاجية الـــــــــجبرية مـــــن الـــــــــدرجة الـــثانية

Quadratic Production Functions

تتخذ الصورة العامة للدوال الجبرية من الدرجة الثانية الشكل التالي:

$$Y = a_o + a_1X_1 + a_2X_2 + \frac{1}{2}b_1X_1^2 + \frac{1}{2}b_2X_2^2 + b_3X_1X_2 \qquad (٩,١٩)$$

حيث:

Y= الإنتاج،

X_1,X_2 = مورديِ العمل ورأس المال،

a_o= ثابت الدالة،

a,b= معاملات الدالة.

وتـــــتسم هـــــذه الـــــــدالة بالـــــــخصائص الـــــــتالية:

١- الدالة غير متجانسة.

٢- إذا كانت قيمة $b_3<0$ (أقل من الصفر) فإن الدالة تصلح للموارد **المتنافسة**

أما إذا كانت قيمة b_3 = الصفر فإن الدالة يمكن تطبيقها في حالة الموارد **المستقلة،**

أما إذا كانت قيمة $b_3>0$ (أكبر من الصفر) فالدالة تطبيقية في حالة الموارد **المكملة**.

٣- الخطوط الحرجة موجبة الميل إذا كانت الموارد **مكملة،** وسالبة الميل إذا كانت الموارد **متنافسة،** وخطوط مستقيمة موازية للمحورين إذا كانت الموارد **مستقلة**.

٤- منحنيات السواء محدبة تجاه نقطة الأصل.

٥- يمكن أن تصف الثلاث مراحل للإنتاج.

ومن أهم عيوبها هو صعوبة تطبيقها لأكثر من متغيرين.

دوال الإنـــــــــتاج غـــــــــير الـــــــــجبرية[٢٠]

Transcendental Production Functions

تتخذ الصورة الرياضية العامة لهذه الدوال الشكل الرياضي التالي:

$$Y = cX_1^{a_1} e^{b_1 x_1} X_2^{a_2} e^{b_2 x_2} \text{K } X_n^{a_n} e^{b_n x_n} \qquad (٩,٢٠)$$

حيث:

Y= الإنتاج،

e= أساس اللوغاريتم الطبيعي،

$X_1, X_2, \ldots, X_n$= عوامل الإنتاج،

$C, a_1, a_2, \ldots, a_n$= معاملات الدالة.

هذا ويمكن أن تتحول هذه الدالة إلى دالة إنتاجية في متغير واحد مباشرة و بالتالي تتخذ الدالة الشكل الجديد التالي:

$$Y = CX^a e^{bx} \qquad (٩,٢١)$$

يركز الإقتصاديون كثيراً على خصائص الدالة (٩,٢١) كبديل للدالة (٩,٢٠) حتى يسهل فهم طبيعة هذه الدالة التي تتلخص في التالي :

١- الناتج الحدي للمورد موجب للقيم الموجبة لهذا المورد كالتالي:

$$\frac{\partial K}{\partial X} = Y\left(\frac{a}{x} + b\right)$$

بمساواة التفاضل الجزئي بالصفر يمكن إيجاد قيمة X المعظمة للإنتاج كما يلي:

$$x = -\frac{a}{b} \qquad (٩,٢٢)$$

بمساواة التفاضل الثاني بالصفر يمكن إيجاد قيمة X عند نقطة إنقلاب الدالة كما يلي:

[20] Holter,Carter, and Hocking, "A Note on the Transcendental Production Function." Journal of Farm Economics, 39,1957>

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} = Y(\frac{a^2 - a}{X^2} + \frac{2ab}{X} + b^2) = 0$$

ومنها فإن:

$$X = \frac{-a + \sqrt{a}}{b} \qquad (٩,٢٣)$$

٢- من أهم ما يجذب الانتباه لهذه الدالة هي أنه عندما تتخذ (b) في المعادلة (٩,٢٢) والمعادلة (٩,٢٣) قيمة سالبة أو قيمة أكبر من الوحدة فإن الدالة سوف تنطبق عليها الصورة الكلاسيكية حيث سيزداد الناتج Y بمعدل متزايد، ثم معدل متناقص، حتى يصل الناتج أقصاه ثم يتناقص الإنتاج بزيادة كمية المورد المستخدم كما يشير لذلك قانون تناقص الغلة.

٣- تتحول الدالة إلى دالة كوب دوجلاس وهي دالة جبرية عندما تساوي (b) الصفر ويصبح الشكل العام للدالة كما يلي:

$$Y = CX^a \qquad (٩,٢٤)$$

٤- الدالة غير متجانسة في صورتها العامة إلا إذا تحقق الشرط التالي: $b_1 = b_2 = 0$ وفي هذه الحالة فإن الدالة سوف تتخذ شكل دالة كوب دوجلاس.

٥- مرونة إنتاج الموارد X_2, X_1 تأخذ الصورة التالية:

$$E_1 = b_1 X_1 + a_1$$
$$E_2 = b_2 X_2 + a_2$$

حيث E_2, E_1 تشير إلى مرونة الإنتاج للموارد X_1 و X_2 على الترتيب.

٦- منحنى سواء الدالة محدب تجاه نقطة الأصل إذا تحقق شرط التجانس.

٧- إذا تحقق شرط التجانس فإن الخطوط الحرجة تحصر الموارد المكملة ولكن على نقاط الخطوط الحرجة فإن الموارد لاتتصف بالإستقلالية.

جدول (٩,١) يوضح ملخصاً لبعض خصائص الدالة غير الجبرية

$$Y = CX^{a}e^{bx}$$

$Y = CX^{a}e^{bx}$	قيمة (a)	قيمة (b)
تزداد بمعدل متناقص حتى $x = -(\frac{a}{b})$ ، ثم تتناقص	$0 \pi a \leq 1$	$b \pi 0$
تزداد بمعدل متزايد حتى $x = \frac{(-a+\sqrt{a})}{b}$ ، ثم تزداد بمعدل متناقص حتى $x = -(\frac{a}{b})$ ثم تتناقص	$a \phi 1$	
تتزايد بمعدل متناقص	$0 \pi a \pi 1$	$b = 0$
تتزايد بمعدل ثابت	$a = 1$	
تتزايد بمعدل متزايد	$a \phi 1$	
تتزايد بمعدل متناقص حتى $x = \frac{(-a+\sqrt{a})}{b}$ ، ثم تتزايد بمعدل متزايد	$0 \pi a \pi 1$	$b \phi 0$
تتزايد بمعدل متزايد	$a \geq 1$	

الباب العاشر

١٠,١ إنتاج سلعتين أو أكثر

١٠,٢ منحنى الإمكانيات الإنتاجية

١٠,٣ إشتقاق منحنيات الإمكانيات الإنتاجية من الدوال الإنتاجية

١٠,٤ منحنى الإمكانيات الإنتاجية والعلاقات بين السلع المنتجة

أ) السلع المتنافسة *Competitive Products*.

ب) السلع المتكاملة *Complementary Products*.

ت) السلع المستقلة *Supplementary Products*.

ث) السلع المرتبطة *Joint Products* .

١٠,٥ توليفة النواتج المعظمة لإيرادات المنشأة

أ) المعدل الحدي لإحلال النواتج.

ب) خط العائد المتساوي.

١٠,٦ أساليب تحديد توليفة النواتج المعظمة لأرباح المنشأة عندما تكون الموارد محدودة:

١- الأسلوب الجدولي:

٢- الأسلوب البياني:

٣- الأسلوب الجبري:

١٠,٧ توليفة النواتج المعظمة لإنتاج ناتج ثالث

١٠,٨ منطقة مورد واحد بين عدد من النواتج

١٠,٩ منقطة موردين بين ناتجين:

١٠,١٠ منطقة العديد من الموارد بين العديد من المنتجات

إنـــــــتاج ســـــــــــلعتين أو أكـــــــــــــثر

مـــــــنحنى الإمـــــــــكانيات الإنـــــــــتاجية

The Production Possibility Curve

عندما تكون الموارد محدودة لدى المنشأة (المنتج) وأن أمام هذه المنشأة (المزرعة) سلعتين أو منتجين أو محصولين فإن محدودية الموارد تعني أن هذه المنشأة لا يمكنها إستخدام تلك الموارد المحدودة بالطريقة المثلى في كلا المنتجين، بمعنى آخر فإن محدودية الموارد المثلى تعني أن الكمية الكلية المتاحة من الموارد تعد أقل من الكمية الموردية المثلى اللازمة لكلا الناتجين هذا ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً بالمعادلة التالية:

$$f(Y_1, Y_2 \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0 \qquad (١٠,١)$$

حيث تشير Y_2, Y_1 إلى الناتجين أو الكمية المنتجة من السلعة الأولى Y_1 والكمية المنتجة من السلعة الثانية Y_2، في حين تشير X_2, X_1 إلى الكميات المحدودة من الموارد المتاحة $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

ومن هذا المفهوم يتضح أن هناك ترابطاً معيناً بين السلعتين Y_2, Y_1 ويعتمد مدى هذا الإرتباط على العلاقة الفنية والاقتصادية بينهما *Technical and Economical Relationship*. فعلى سبيل المثال قد يستدعي التوسع في إنتاج Y_1 سحب بعض من الموارد المتاحة التي كانت تخصص لإنتاج Y_2 مما يؤدي إلى إنخفاض كمية Y_2 المنتجة. ولكن في بعض الحالات الأخرى فإن التوسع في إنتاج إحدى هذه السلع يؤدي إلى التوسع في إنتاج السلعة الأخرى. وعلى ذلك فإن هدف المنتج في هذه الحالة وأمام هذه الموارد المحدودة ينحصر في كيفية تحديد الحجم الأمثل من كلا الناتجين. أي بمعنى آخر كيفية تعظيم أرباحه من خلال التوليفة المثلى التي تحقق هذا الهدف وفي ظل محدودية الموارد.

إشتقاق منحنيات الإمكانيات الإنتاجية من الدوال الإنتاجية:

تشير المعادلة (١٠,١) إلى منحنى الإمكانيات الإنتاجية *The Production Possibility Curve* الذي يوضح كافة التوليفات الناتجية التي يمكن الحصول عليها باستخدام مجموعة الموارد المتاحة. كما ويطلق على منحنى الإمكانيات الإنتاجية منحنى سواء الموارد *Iso-resource Curve* لأن كل نقطة على هذا المنحنى توضح توليفة النواتج التي يمكن الحصول عليها بالقدر نفسه من الموارد. أيضاً ويطلق على منحنى الإمكانيات الإنتاجية أيضاً منحنى الفرصة *Opportunity Curve* حيث أنه يوضح كل الفرص الممكنة أمام المنتج لإستخدام قدر معين من الموارد لإنتاج ناتجين.

كما يطلق على منحنى الإمكانيات الإنتاجية لفظ المجموعه الممكنة *The Feasible Set or The Attainable Set* بحيث يضم كل التوليفات الممكنة من الناتجين من بين العديد من هذه التوليفات. ولتوضيح كيفية إشتقاق منحنى الإمكانيات الإنتاجية من دوال الإنتاج نفترض أنه لدينا مورد واحد هو X يمكن إستخدامه لإنتاج ناتجين هما Y_2,Y_1 أي أن:

$$Y_1 = f(X) \qquad (١٠,٢)$$

$$Y_2 = f(X) \qquad (١٠,٣)$$

وإذا فرض أن العلاقة بين مورد الإنتاج X وكل من الناتج Y_2,Y_1 يعبر عنها بالجدول (١٠,١) فإنه يمكن إشتقاق منحنى الإمكانيات الإنتاجية كما في الجدول (١٠,٢).

ويتضح من الجدول (١٠,١) أن الإنتاجية الحدية للمورد X تختلف من ناتج إلى آخر ففي حين تبلغ الإنتاجية الحدية للمورد X عند إستخدام وحدة واحدة منه لإنتاج Y_1 القدر ٧ وحدات نجدها تبلغ ١٢ وحدة إذا إستخدمت لإنتاج الناتج Y_2 وتظل الإنتاجية الحدية للمورد X مرتفعة إذا إستخدم المورد في إنتاج الناتج Y_2 حتى الوحدة السادسة حيث تتساوى كفاءة إستخدام المورد في كلا الناتجين إلاّ أن هذه الكفاءة تنخفض بشكل سريع إذا إستخدم المورد في إنتاج Y_2 عن نظيره Y_1 حيث تنخفض الإنتاجية الحدية للمورد بدرجة أكبر في Y_2 عن Y_1.

ولبيان كيفية إشتقاق منحنى الإمكانيات الإنتاجية من جدول (١٠,٢) نفترض أن الكمية المتاحة من المورد X تبلغ ٤ وحدات. وانه يمكن توجيه هذا القدر من X لإنتاج كل من Y_2,Y_1 فإذا تم توجيه المتاح من X لإنتاج Y_1 فإنه يتم إنتاج ٢٢ وحدة من هذا الناتج وصفر من الناتج Y_2.

جدول رقم (١٠,١) الناتج الكلي والحدي للمورد الموزع على الناتجين Y_2,Y_1.

المورد X	الناتج Y_1	الناتج الحدي للمورد X في Y_1 $MPP_x\ Y_1$	المورد X	الناتج Y_2	الناتج الحدي للمورد X في Y_2 $MPP_x\ Y_2$
0	**0**	-	0	**0**	-
1	**7**	7	1	**12**	12
2	**13**	6	2	**22**	10
3	**18**	5	3	**30**	8
4	**22**	4	4	**36**	6
5	**25**	3	5	**40**	4
6	**27**	2	6	**42**	2
7	**28**	1	7	**43**	1
8	**27**	-1	8	**42**	-1
9	**25**	-2	9	**38**	-4

أما إذا خصص كل المتاح لإنتاج Y_2 فإنه يتم إنتاج ٣٦ وحدة من هذا الناتج وصفر من Y_1.

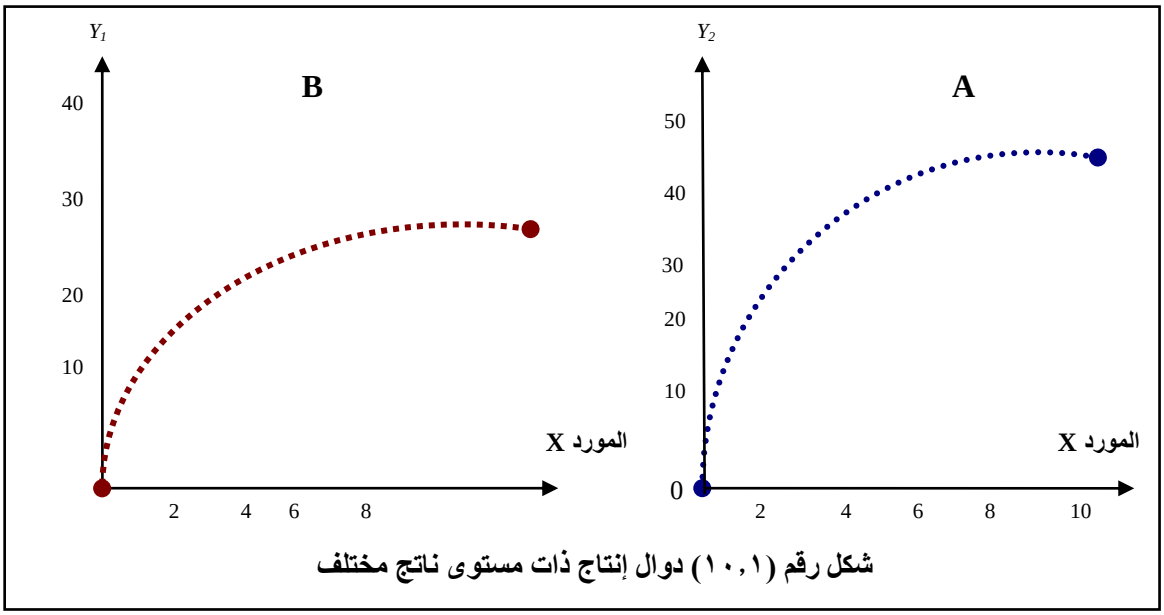
أما إذا خصصت وحدة واحدة من المورد لإنتاج Y_1 وثلاث وحدات لإنتاج Y_2 فإن هذا سيؤدي إلى إنتاج ٧ وحدات من Y_1 و إنتاج ٣٠ وحدة من Y_2 . وفي حالة إستعمال وحدتين من X لكل من Y_2,Y_1 فإن هذا سيؤدي إلى إنتاج ١٣ وحده من Y_1 و إنتاج ٢٢ وحدة من Y_2. أما في حالة إستعمال ٣ وحدات من X في إنتاج Y_1 ووحدة واحدة من X في إنتاج Y_2 فإن هذا سيؤدي إلى إنتاج ١٨ وحده من Y_1 بالإضافة إلى إنتاج ١٢ وحده من Y_2. ولكن في حالة إستعمال كل المتاح من X (٤ وحدات) لإنتاج Y_1 فيمكن إنتاج ٢٢ وحده من Y_1 و صفر من Y_2.

وبهذه الطريقة يتم توصيف كل إمكانيات الإنتاج من Y_1 و Y_2 الممكن الحصول عليها من خلال إستغلال ٤ وحدات من المورد X وهذا المفهوم ينطبق بالطبع في حالة توفر ٧ وحدات من المورد X ويراد توزيعها على إنتاج Y_1, Y_2 .

جدول رقم (١٠,٢) منحنى الإمكانيات الإنتاجية لوحدات مختلفة من المورد X.

منحنى الإمكانيات الإنتاجية عندما X= 4		منحنى الإمكانيات الإنتاجية عندما X= 7	
Y_1	Y_2	Y_1	Y_2
0	36	0	43
7	30	7	42
13	22	13	40
18	12	18	36
22	0	22	30
-	-	25	22
-	-	27	12
-	-	28	0

وبتوقيع جدول (١٠,٢) بيانياً يتم الحصول على منحنيات الإنتاج وكذلك منحنيات الإمكانيات الإنتاجية كما يتضح من الأشكال التالية:

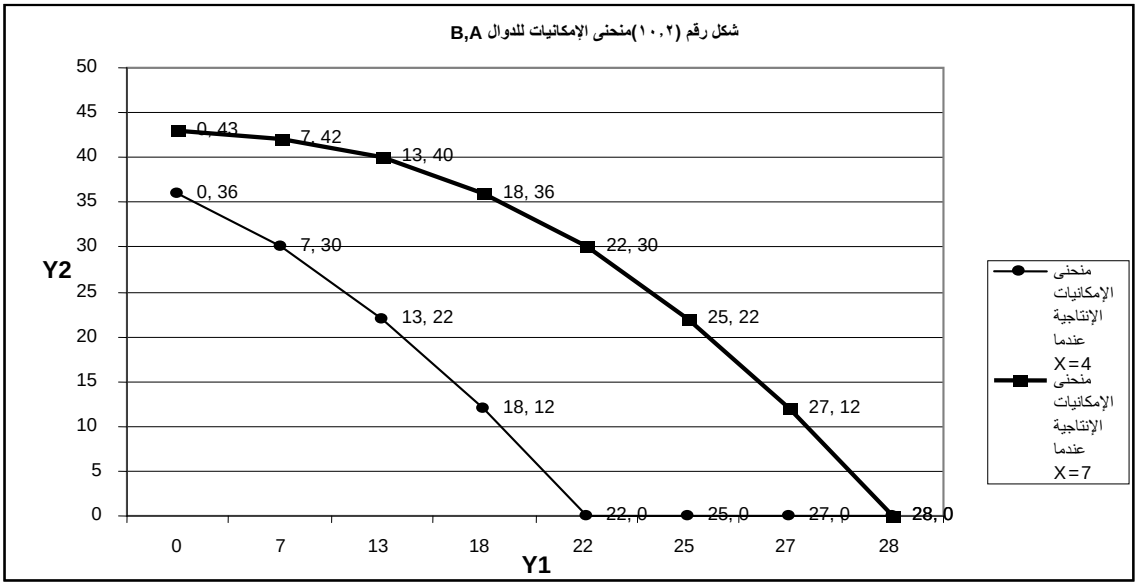


شكل رقم (١٠,١) دوال إنتاج ذات مستوى ناتج مختلف

ويتضح من الشكل رقم (١٠,١) أن منحنى الإمكانيات الإنتاجية يعكس وضع دالة الإنتاج إذ يتأثر منحنى الإمكانيات الإنتاجية بما تتأثر به دوال الإنتاج، فتغير التقنية يؤدي إلى إنتقال دالة الإنتاج ومن

ثم منحنى الإمكانيات الإنتاجية. فمنحنى الإمكانيات الإنتاجية الأعلى في الشكل أعلاه يعكس دالة الإنتاج الأعلى الموضحة في الشكل A.

هذا وتجدر الإشارة إلى أن منحنى الإمكانيات الإنتاجية يوضح كافة التوليفات من الناتجين عند توفر قدر معين من المورد، فإذا تغير هذا القدر المتاح من المورد فإنه يتغير منحنى الإمكانيات الإنتاجية كما هو موضح بالشكل أعلاه. حيث أن منحنى الإمكانيات الإنتاجية الأعلى والأبعد من نقطة الأصل يوضح مستوى مختلف من كمية المورد X المتاحة (X=7) كما أنه يختلف في الشكل إلى حد ما عن نظيره عند توفر ٤ وحدات من المورد X.كذلك يقترب منحنى الإمكانيات الإنتاجية من نقطة الأصل و يأخذ مستوى أقل عن كلا المنحنيين السابقين بل وقد يتخذ شكلاً مختلفاً إذا قلت الكمية المتاحة من المورد X عن ٣ وحدات.



هذا ويمكن إشتقاق منحنى الإمكانيات الإنتاجية جبرياً من خلال معرفة الشكل الجبري لدوال الإنتاج كالتالي:

$$Y_1 = f(X_1) \qquad (١٠،٤)$$

$$Y_2 = h(X_2) \qquad (١٠،٥)$$

$$X_1 + X_2 \le \overline{X} \qquad (١٠،٦)$$

حيث تشير المعادلة (١٠,٤) إلى دالة الإنتاج للسلعة الأولى ، حيث أن Y_1 توضح مستوى الإنتاج من السلعة الأولى، والمتغير X_1 يوضح الكمية المستخدمة من المورد X_1 في إنتاج السلعة Y_1 بالطريقة نفسها تشير المعادلة (١٠,٥) إلى دالة إنتاج السلعة الثانية. أما المعادلة (١٠,٦) فتشير إلى محدودية الموارد المتاحة إذ أن الموارد المستخدمة من X_2,X_1 لايجب أن تتعدى القدر المتاح منهم $\overline{X}$.

ومن المعلومات المتاحة السابقة يمكن إشتقاق منحنى الإمكانيات الإنتاجية في الخطوات التالية:

أولاً: إعادة كتابة المعادلة (١٠,٤) باستخدام المعادلة (١٠,٦) كما يلي:

$$Y_1 = f(\overline{X} - X_2) \qquad (١٠,٧)$$

والمعادلة (١٠,٧) يمكن إعادة كتابتها كما يلي:

$$X_2 = G(Y_1, \overline{X}) \qquad (١٠,٨)$$

ثانياً: إيجاد معكوس الدالة رقم (١٠,٥) التي تأخذ الصورة التالية:

$$X_2 = H^{-1}(Y_2) \qquad (١٠,٩)$$

ثالثاً: وبإحلال المعادلة رقم (١٠,٩) في المعادلة رقم (١٠,٨) ينتج:

$$H^{-1}(Y_2) = G(Y_1, \overline{X}) \qquad (١٠,١٠)$$

المعادلة رقم (١٠,١٠) هي معادلة منحنى الإمكانيات الإنتاجية والتي يمكن تبسيط صورتها لتصبح كما في المعادلة التالية:

$$Y_2 = w(Y_1, \overline{X}) \qquad (١٠,١١)$$

منحنى الإمكانيات الإنتاجية والعلاقات بين السلع

يوضح منحنى الإمكانيات الإنتاجية نوع العلاقة بين السلع محل الدراسة والتي قد تتخذ إحدى الصور التالية:

١- السلع المتنافسة ***Competitive Products***.

٢- السلع المتكاملة ***Complementary Products***.

٣- السلع المستقلة ***Supplementary Products***.

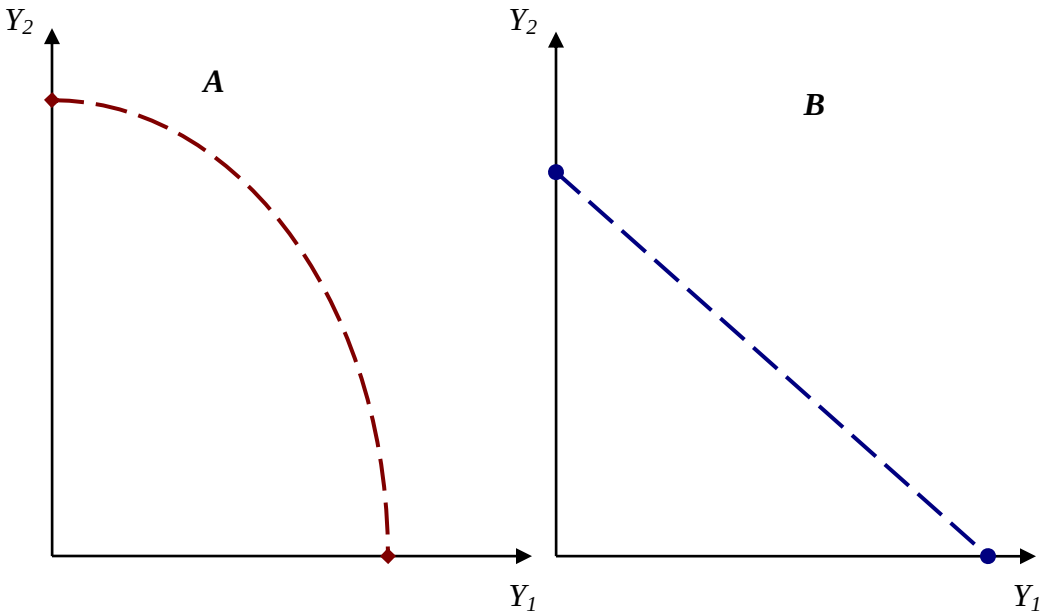
٤- السلع المرتبطة ***Joint Products*** .

أولا: السلع المتنافسة ***Competitive Products***

تعد السلعتان Y_2, Y_1 سلعاً متنافسة في حالة عدم إمكانية زيادة إنتاج إحداهما دون خفض إنتاج الأخرى، أي أنه إذا زاد إنتاج السلعة Y_1 فلابد من تخفيض إنتاج السلعة Y_2. مثل هذه الحالة تتطلب أن يكون منحنى الإمكانيات الإنتاجية سالب الميل، كما أن تقوس المنحنى (تقعره *Convex* تجاه نقطة الأصل) يعني أن دالة الإنتاج للسلعة المعنية تتصف بتناقص الإنتاجية الحدية *Decreasing Marginal Ptoductivity*، بمعنى آخر تناقص الغلة، أي أنه باستمرار تحويل كميات المورد X من إنتاج السلعة Y_2 لإنتاج المزيد من السلعة Y_1 فإن الإنتاجية الحدية لهذا المورد سوف تنخفض للسلعة Y_1 وترتفع للسلعة Y_2 . فمثلاً إذا كان المتاح من العمالة يمكن توجيهه لإنتاج ناتجين مثل الأبقار Y_1 و الأغنام Y_2 ، ففي حالة توجيه كل ساعات العمل المتاح في المزرعة لإنتاج الأبقار فإن ذلك لابد أن يكون على حساب إنتاج الأغنام كما أن الساعات الأخيرة من العمل موجهه لإنتاج الأبقار سيكون لها إنتاجية حدية منخفضة بالمقارنة بإنتاجيتها الحدية في تربية الأغنام.

والشكل رقم (١٠,٣) يوضح منحنى الإمكانيات الإنتاجية للسلع المتنافسة حيث يشير الشكل(*A)* إلى الحالة التي تكون فيها دوال الإنتاج للسلعتين غير خطية بل وتتصف بتناقص الإنتاجية الحدية للموارد بعكس الحال في الشكل(*B)* والذي تتصف فيه دوال الإنتاج بالخطية لثبات الإنتاجية الحدية للموارد في كلا الناتجين.

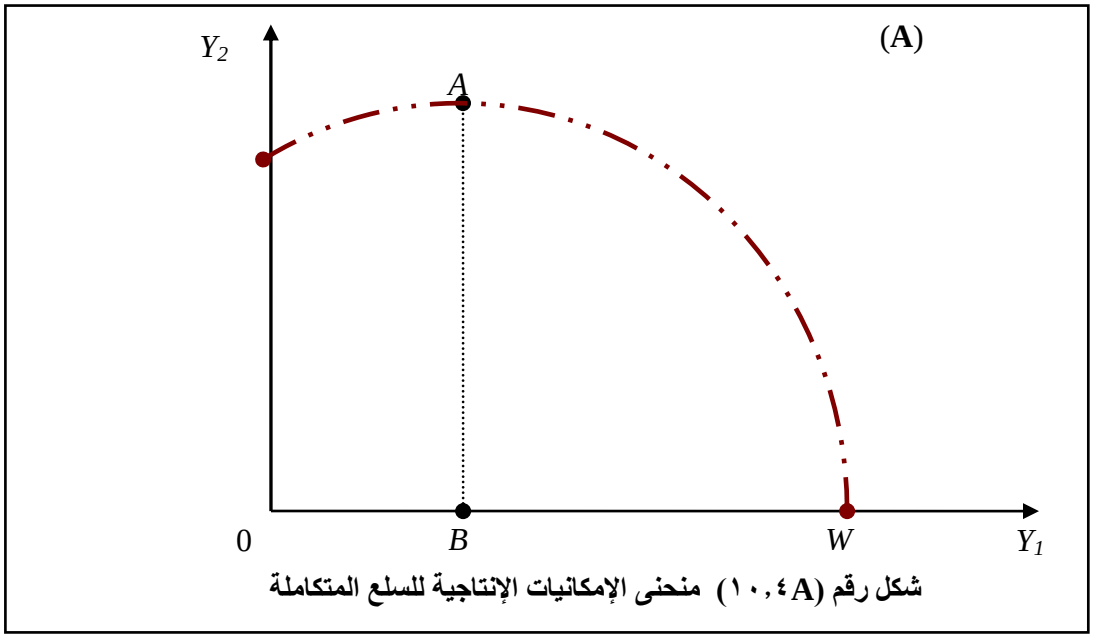
غير أن كلاً من الشكلين (A,B) يتفقان في سالبية ميل منحنى الإمكانيات الإنتاجية. هذا وتظهر العلاقة الإحلالية الخطية إذا فرض أن مساحة معينة من الأرض ينتج الهكتار فيها ٨٠ طناً من الذرة أو ٢٥ طناً من فول الصويا وبهذا فإن تحويل كل هكتار بدلاً من إنتاج الذرة إلى إنتاج فول الصويا سوف يؤدي إلى تخفيض قدره ٨٠ طناً من الذرة وفي نفس الوقت زياده قدرها ٢٥ طن في فول الصويا. وتظل هذه العلاقة هكذا باستمرار التحويل مادامت متجانسة الخواص.



شكل رقم (١٠,٣) منحنى الإمكانيات الإنتاجية للسلع المتنافسة

ثانياً: السلع المتكاملة أو المتلازمة *Complementary Products*

تعد السلعتان متكاملتان إذا ما أدت زيادة إنتاج إحدهما إلى زيادة إنتاج السلعة الأخرى مادامت الكمية المستخدمة من الموارد ثابته، الشكل رقم (١٠،٤A &10.4B) التالية يتضح أن زيادة إنتاج السلعة Y_2 تكون مصحوبة بزيادة إنتاج السلعة Y_1 حتى بلوغ النقطة ***A*** على منحنى الإمكانيات الإنتاجية، ولكن على **يمين** النقطة ***A*** فإن السلع تصبح **متنافسة** إذ أن زيادة إنتاج إحدهما مرتبط بإنخفاض إنتاج السلعة الأخرى. وتتضح هذه الحالة إذا أراد المزارع إنتاج أقصى قدر ممكن من الناتج Y_2 فإنه لابد من إنتاج على الأقل القدر ***OB*** من الناتج Y_1، ولكن زيادة التوسع في إنتاج Y_1 يؤدي إلى أن يتحول كلاهما إلى سلع متنافسة وعلى المزارع أن يحدد التوليفة منهما التي تعظم أرباحه أو تحقق أهدافه وهذا التنافس يتضح على منحنى إمكانيات الإنتاج المحصور بين النقطة ***A*** وبين تقاطعه مع المحور الأفقي عند النقطة ***W***.

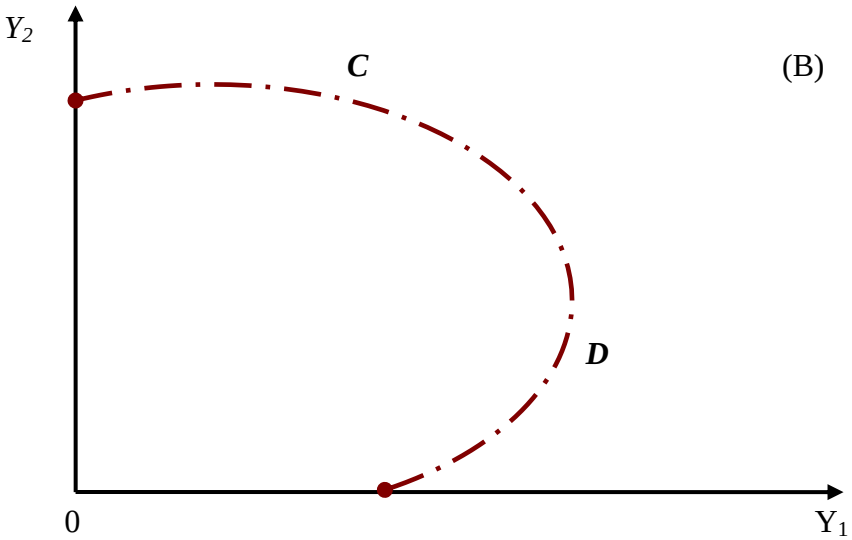


شكل رقم (١٠،٤A) منحنى الإمكانيات الإنتاجية للسلع المتكاملة

أما الشكل (10.4B) فيوضح الحالة التي يكون فيها كلا الناتجين مكملاً للآخر حتى مرحلة معينة يتحولان بعدها إلى التنافس. فمثلاً نجد أن السلعة أو المنتج Y_1 متكاملة مع السلعة أو المنتج Y_2 حتى النقطة ***C*** كما أن Y_2 متكاملة مع Y_1 حتى النقطة ***D*** أما فيما بين ***D,C*** فإن الناتجين متنافسان.

هذا وتظهر العلاقة المتكاملة بين النواتج أو السلع عندما يساهم إنتاج أحد هذه السلع في زيادة إنتاج السلعة الأخرى. فمثلاً نجد أن زيادة إنتاج البقوليات تؤدي إلى إضافة النيتروجين للتربة ومن ثم تؤدي إلى زيادة إنتاج الخضروات أو محاصيل الحبوب إذا ماتم زراعتهم في دورة زراعية واحدة مع البقوليات. فلو كانت الدورة الزراعية هي دورة رباعية (٤ سنوات) وتم زراعة السنة الأولى بمحصول بقولي و الثلاث سنوات الأخرى ثم زراعتها بمحاصيل الحبوب فإن إنتاجية هذه الدورة ستكون أفضل مما لو تم زراعة محاصيل الحبوب في الدوره الرباعية مجتمعة.

هذا ويلاحظ أن الناتجين يعتبران متنافسين في العام الواحد رغم أن هذا ليس بالضرورة دائماً فتحميل محصول الفول الرومي مع الذرة أعطت نتائج أفضل من زراعة الذرة بمفردها في نفس الموسم[٢١] . وهكذا فإنه إذا كانت الزروع متنافسة في عام معين فإن منحنى الإمكانيات الإنتاجية يتحول إلى الخط المستقيم.



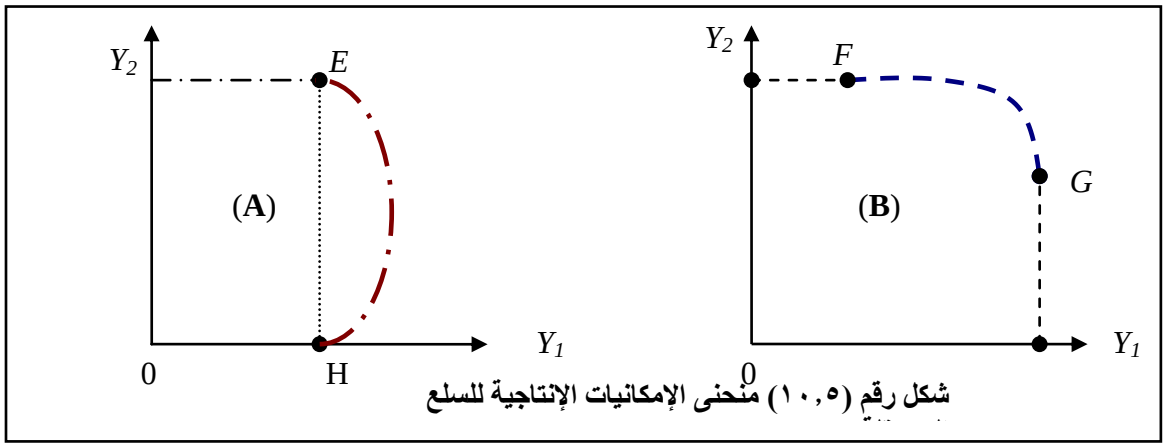
شكل رقم (١٠،٤B) منحنى الإمكانيات الإنتاجية للسلع المتكاملة

[٢١] مراد زكي موسى، و السيد أحمد الزهيري."إقتصاديات التكثيف الزراعي" مجلة العلوم الزراعية، جامعة المنصورة، الجزء ١٥ العدد ٦، يونيو ١٩٩٥م.

هذا ويلاحظ أن التكامل بين الزروع قد نشأ نتيجة أن أحد النواتج أصبح مورداً بالمفهوم الإقتصادي للناتج الآخر، غير أن مثل هذا التكامل يتحول بمرور الزمن إلى التنافس فزيادة إنتاج المحاصيل البقولية يكون على حساب محاصيل الحبوب أو الخضروات التي تشترك معها في الدورة نفسها مما قد يؤدي في النهاية إلى إنخفاض أربحية مثل هذه الدورات. كما أن هذه العلاقات التكاملية قد تتغير بتغير التقنية فمع ظهور الأسمدة الكيماوية الأزوتية أدت إلى تحول محصول البقوليات إلى منافس لمحاصيل الحبوب.

ثالثاً:السلع المستقلة *Supplementary Products*

تعد السلعتان Y_2, Y_1 سلعتين مستقلتين إذا لم تؤدي زيادة إنتاج أحدهما إلى زيادة أو نقصان إنتاج السلعة الأخرى، وفي هذه الحالة فإن منحنى الإمكانيات الإنتاجية يمكن التعبير عنه كما في الشكل رقم (١٠،٥)



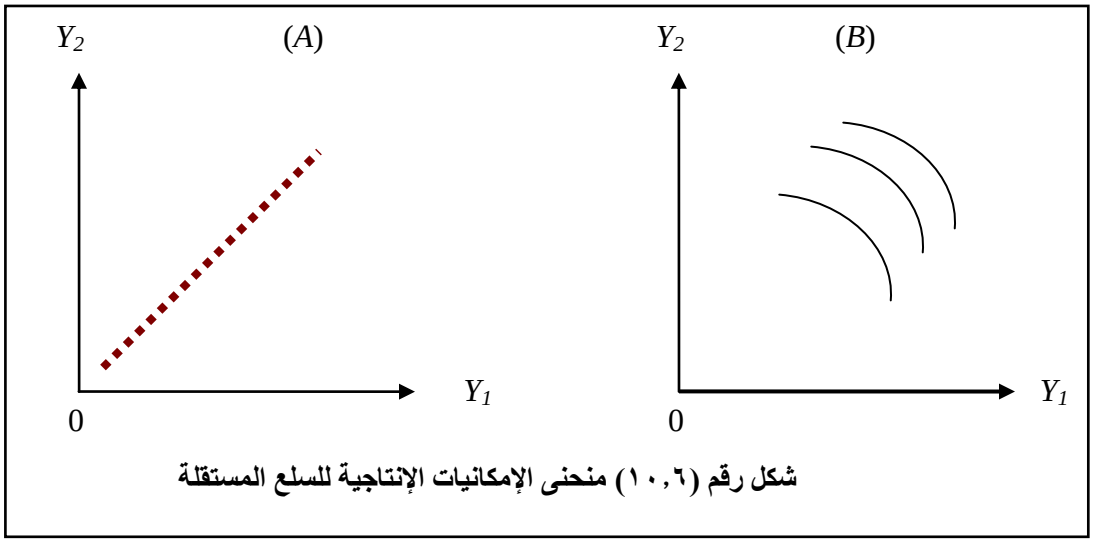
شكل رقم (١٠،٥) منحنى الإمكانيات الإنتاجية للسلع

يتضح من الشكل (A) أن إنتاج السلعة Y_1 مستقل عن إنتاج السلعة Y_2 وذلك حتى بلوغ النقطة ***E*** على منحنى الإمكانيات الإنتاجية إذ أن زيادة إنتاج الناتج Y_1 حتى القدر ***0H*** لا يستوجب بالضرورة إنخفاض القدر من الناتج Y_2 لوجود الإستقلالية بين هذه النواتج، ولكن بعد النقطة ***E*** على منحنى الإمكانيات الإنتاجية فإن العلاقة الناتجية تصبح علاقة تنافسية. ويتضح من الشكل ***B*** أن كلا الناتجين مستقل عن الآخر على يسار النقطة ***F*** وعلى يمين النقطة ***G*** إلاّ أن المدى بينهما أي في

المدى ***FG*** فالعلاقة بين النواتج علاقة تنافسية. وتتضح هذه العلاقة الإستقلالية خاصة في المدى القصير فعند شراء جرار لخدمة محصولين فإن هذين المحصولين سوف لا تتأثر خدمتهما في الشهر الأول من شراء الجرار، لكن لا يمكن للجرار الإستمرار في خدمة المحصولين بالقدر نفسه إذ أن المزيد من خدمة أحدهما يكون على حساب نقص خدمة المحصول الآخر. ويصبح الأمر جلياً إذا علمنا أن آلة الحصاد في موسم الحصاد لايمكنها حصاد محصولين في وقت واحد عندما يحل وقت حصادهما معاً فلابد من حصاد محصول قبل المحصول الآخر. من هذه المناقشة يتضح أن العلاقة المستقلة بين النواتج تتحول إلى علاقة متنافسة بمرور الزمن.

رابعاً: الـــــسلع الـــــمرتبطة *Joint Products*

ترتبط السلع بعضها ببعض عندما يصبح إنتاج أحدهما غير ممكن في غياب الآخر. بل أكثر من ذلك فإن السلع المرتبطة قد يرتبط إنتاجها بمعدل ثابت أي أن إنتاج أحدهما يعد دالة خطية لإنتاج الأخرى. وتظهر العلاقة المرتبطة بين السلع كما في الشكل رقم (١٠،٦):



شكل رقم (١٠،٦) منحنى الإمكانيات الإنتاجية للسلع المستقلة

إذ أن منحنى الإمكانيات الإنتاجية لمثل هذه الحالة يعبر عنه بنقطة واحدة حيث يستحيل الإحلال بين الناتجين وحيث الإرتباط الثابت بينهما كما في الشكل ***A*** أما إذا تغير هذا المعدل أو الإرتباط الثابت

لأسباب معينة والذي قد تكون التقنية أحدهما ، يؤدي إلى ظهور الإنحنائية الجزئية في منحنى الإمكانيات الإنتاجية كما في الشكل ***B***.

وتعتبر السلع الزراعية أفضل مثال للسلع المرتبطة بمعدل غير ثابت فيؤدي إكتشاف صنف جديد إلى تغيير في نسبة الثبات بين السلع المرتبطة، كذلك فالأصناف المختلفة للقمح مثلاً تنتج نسب مختلفة من القش أو الحبوب وهكذا فإن (التقنية) تعد أهم عامل من عوامل تغير العلاقات الناتجية الناتجية.

تـــوليفة الـــــنواتج الـــــمعظمة لإيـــــرادات الـــــــمنشأة

يلزم لتحديد مثل هذه التوليفة إيضاح مفهومين هما:

أ) الـــــمعدل الـــــحدي لإحـــــلال الـــــنواتج.

ب) **خـــط الـــــعائد الـــــمتساوي**.

أولاً: الـــــمعدل الـــــحدي لإحـــــلال الـــــنواتج

Marginal Rate of Product Substitution (MRPS)

تماماً كما في إحلال الموارد فإن المعدل الحدي لإحلال النواتج يشير إلى مدى التغير في أحد النواتج عندما تزداد كمية الناتج الآخر بوحدة واحدة على منحنى الإمكانيات الإنتاجية في ظل ثبات كمية المورد المستخدم أي بمعنى آخر فإن المعدل الحدي لإحلال النواتج يقيس ميل منحنى الإمكانيات الإنتاجية، أي أن:

$$MRPS_{Y_1Y_2} = \frac{\Delta Y_2}{\Delta Y_1}$$

ويمكن حساب معدل الإحلال الحدي بين النوتج بالإستعانة ببيانات جدول (١٠,٢) كما في جدول (١٠,٣). ويتضح من بيانات الجدول (١٠,٣) الذي هو جزء من جدول (١٠,٢) حيث تم الإستعانة بوحدات الناتج عندما يكون المتاح من المورد X هو ٧ وحدات فقط، أنه كلما زادت الكمية المنتجة

من الناتج Y_1 فإن الكمية المضحى بها من الناتج الآخر Y_2 تزداد أيضاً وذلك بسبب تناقص الناتج الحدي الفيزيقي والموضح بدوال الإنتاج.

حيث أن *MRPS* كما سبق وأشرنا يوضح ميل منحنى الإمكانيات الإنتاجية، وكما أشير لمعدل الإحلال الحدي التقني بين موارد الإنتاج فإن *MRPS* يمكن قياسه باعتباره قيمة تقريبية أو قيمة فعلية.

جدول رقم (١٠,٣) حساب معدل الإحلال الحدي للنواتج

$MRPS_{Y1Y2}$	ΔY_1	ΔY_2	الناتج الممكن عندما $X=7$	
$\frac{\Delta Y_2}{\Delta Y_1}$			Y_1	Y_2
-	-	-	0	43
$-\frac{1}{7}$	7	-1	7	42
$-\frac{1}{3}$	6	-2	13	40
$-\frac{4}{5}$	5	-4	18	36
$-\frac{3}{2}$	4	-6	22	30
$-\frac{8}{3}$	3	-8	25	22
-5	2	-10	27	12
-12	1	-12	28	0

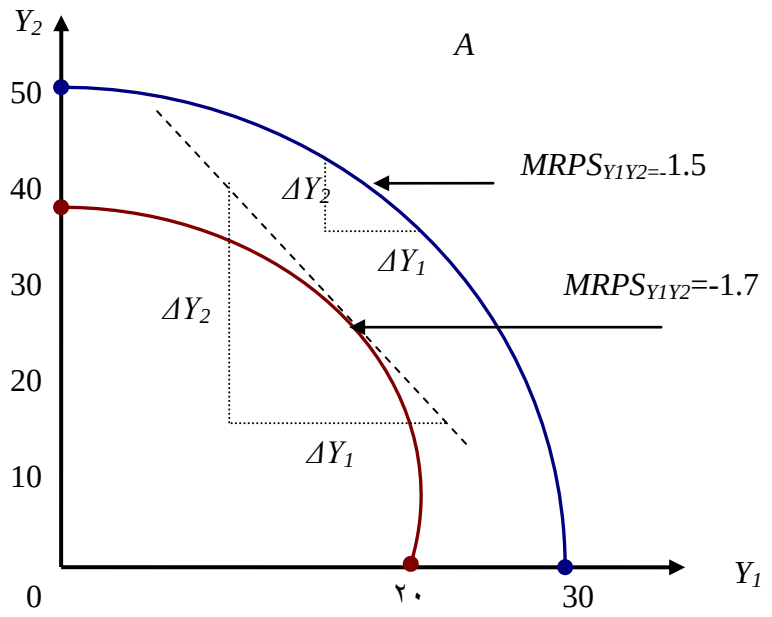
فالقيمة التقريبية يتم حسابها من الجدول أو بين نقاط الشكل حيث يتم تقريب قيم *MRPS* لنأخذ قيمة بين نقطتين على منحنى الإمكانيات الإنتاجية. وبفرض أن توليفة الناتجين Y_2,Y_1 هي القدر ٣٦ من Y_2 و القدر ١٨ من Y_1 ثم أصبحت هذه التوليفة ٣٠ وحدة من Y_2 والقدر ٢٢ وحدة من Y_1

وبهذا فإن $MRPS_{Y1,Y2}$ بين هاتين لتوليفتين هي:

$$MRPS_{Y_1Y_2} = \frac{\Delta Y_2}{\Delta Y_1} = \frac{30-36}{22-18} = \frac{-6}{2} = \frac{-3}{2} = -1.5$$

مثل هذه الطريقة موقعة بشكل رقم (١٠,٧) حيث يتضح من الشكل أن قيمة *MRPS* المساوية (-1.5) توضح متوسط الميل بين توليفتي الناتجين وهي تعني أنه بين أي نقطتين على منحنى الإمكانيات الإنتاجية فإن زيادة وحدة واحدة من الناتج Y_1 يستلزم تخفيض Y_2 بالقدر (١,٥) وحده.

أما القيمة الفعلية الدقيقة لمعدل الإحلال الحدي للناتجين عند نقطة معينة على منحنى الإمكانيات الإنتاجية تتحدد بميل المماس لمنحنى الإمكانيات الإنتاجية عند هذه النقطة، وهذا موضح في الشكل (١٠,٧) إذ أنه عند نقطة التماس نجد أن Y_2=20 وأن Y_1=14 والميل عندئذٍ يساوي (-1.7). وبهذا فإن تفسير معدل الإحلال الحدي بين النواتج عند هذه النقطة يعني أن زيادة Y_1 بوحدة يمكن فقط إذا إنخفضت كمية Y_2 بالقدر (١,٧) وحده.



شكل رقم (١٠,٧) معدل الإحلال الحدي للناتجين

هذا ويلاحظ أن *MRPS* الذي يوضح ميل منحنى الإمكانيات الإنتاجية له أهميه خاصة إذ أن سالبيته *Negativity* تعني أن السلع محل الإختيار هي سلع **متنافسه** *Competitive*، أما إذا كانت قيمته موجبة *Positive* فتعني أن السلع **مكملة** *Complementry*، في حين أن القيمة الصفرية أو غير المحددة لها تعني أن السلع **مستقلة** *Independent*.

ثانياً: خـــــط الـــــــعائد الـــــــــمتساوي

Iso-Revenue Line

يشير العائد الكلي إلى قيمة الناتج الكلي، إذ أنه في ظل إنتاج ٣٦ وحدة من Y_2 بالإضافة إلى ١٨ وحدة من Y_1 ، وبسعر الوحدة من كل منهما هو على التوالي ١ ريال ، ٢ ريال فإن قيمة الناتج الكلي تكون :

$$TR = 1 \times 36 + 2 \times 18 = 72sr$$

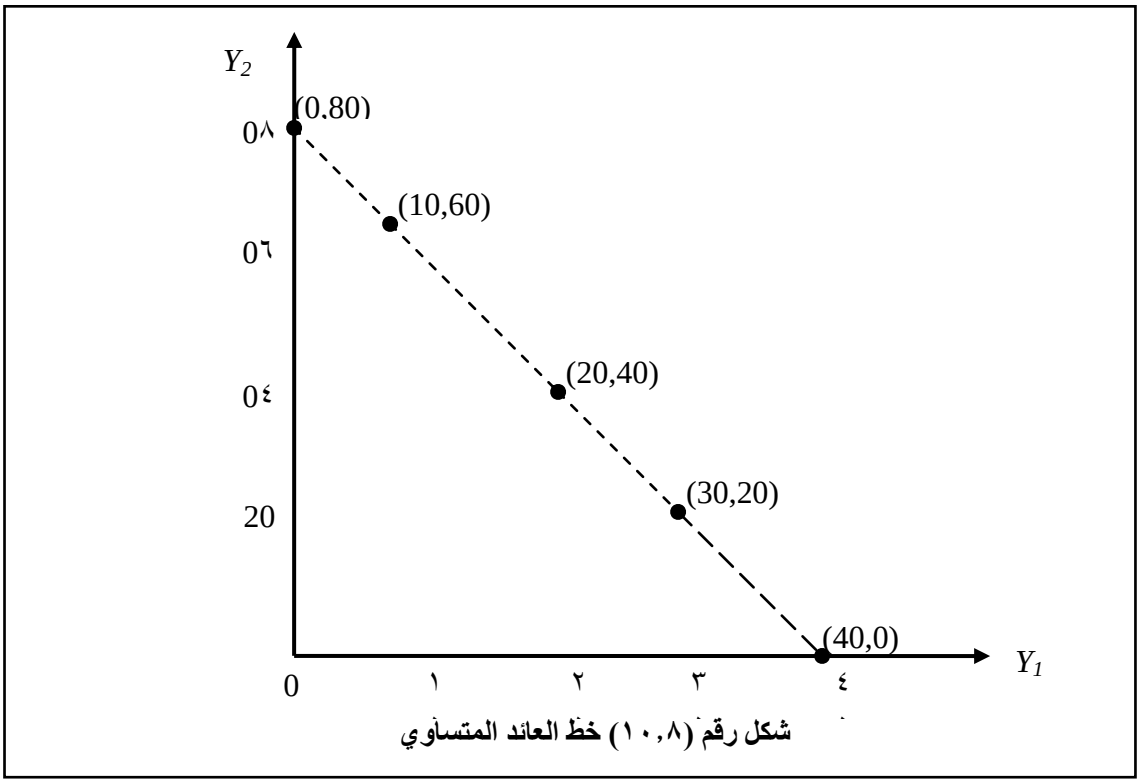
حيث:

$$TR = P_{Y1}Y_1 + P_{Y2}Y_2$$

ويشير الخط الذي يوضح مختلف التوليفات الناتجية التي يمكن أن تدر نفس العائد إلى خط العائد المتساوي. فإذا فرضنا أن العائد الكلي المتاح هو ٨٠ ريال وأن سعر الوحدة من Y_2 (P_{Y2}) هو ريال واحد وأن سعر الوحدة من Y_1 (P_{Y1}) هو ٢ ريال فإن العائد الكلي البالغ ٨٠ ريال يمكن الحصول عليه من بيع إما ٨٠ وحدة منY_2 $(\frac{80}{1} = 80)$ وصفر من Y_1 أو ٤٠ وحدة منY_1 $(\frac{80}{2} = 40)$ وصفر من Y_2 .

كما أن كل توليفات النواتج Y_2, Y_1 الواقعة على خط العائد المتساوي يمكن أن تدر العائد نفسه مثل ٢٠ وحدة من Y_1 و ٤٠ وحدة من Y_2 أو ٣٠ وحدة من Y_1 و ٢٠ وحدة من Y_2...الخ. وبتوقيع

مثل هذه التوليفات بيانياً كما في الشكل رقم (١٠,٨) التالي يتبين أن منحنى العائد المتساوي يكون خطاً مستقيماً.



شكل رقم (١٠,٨) خط العائد المتساوي

يتضح من الشكل (١٠,٨) أن خط العائد المتساوي يمر بكافة التوليفات من Y_2,Y_1 التي تعطي عائداً قدره ٨٠ ريال. كما أن الخطية هنا ترجع إلى أن أسعار وحدات الناتج لم تتغير رغم تغير كميات النواتج. وفي هذه الحالة فإن خط العائد المتساوي يمكن توقيعه مباشرة من خلال نقطتين أحدهما على المحور الأفقي (محور Y_1) وهي عبارة عن العائد الكلي مقسوماً على سعر الوحدة من Y_1

$\left(\frac{TR}{P_{Y1}}\right)$ والأخرى على المحور الرأسي وذلك بقسمة العائد الكلي على سعر الوحدة من Y_2

$\left(\frac{TR}{P_{Y2}}\right)$ وبتوصيل النقطتين هاتين نحصل على خط العائد المتساوي.

كما أن بُعد خط العائد المتساوي عن نقطة الأصل يتحدد من خلال مقدار هذا العائد فإذا إرتفع هذا العائد إنتقل هذا الخط جهة اليمين بفرض بقاء أسعار النواتج كما هي.

لتحديد توليفة النواتج المعظمة لأرباح المنشأة عندما تكون الموارد محدودة فإن هذا يمكن تحقيقة من خلال ثلاثة أساليب هي:

١. الأسلوب الجدولي:
٢. الأسلوب البياني:
٣. الأسلوب الجبري:

أولاً: الأســـــلـوب الـــــــجدولـي:

وفيه يتم حساب الإيرادات الكلية TR لكل توليفة ناتجية ومنها يتم حساب أقصى إيرادات ممكنة وعندها يتم تحديد توليفة النواتج عند هذا المستوى من الإيرادات. ومن الجدول (١٠,٤) وبفرض إستخدام الإمكانيات الإنتاجية عند توفر ٧ وحدات من المورد وبفرض أن سعر الوحدة من الناتج Y_1 هي ٢ ريال وسعر الوحدة من Y_2 هي ريال واحد فإن أقصى أرباح ممكنة تتحقق عند إنتاج ٣٠ وحدة من Y_2 و إنتاج ٢٢ وحدة من Y_1 وبهذا فإن هذه التوليفة تحقق أقصى عائد ممكن قدره ٧٤ ريال إذ أن أي توليفة ناتجية أخرى تعطي عائد كلي أقل من ٧٤ ريال.

جدول رقم (١٠,٤) العوائد الممكنة عندما تكون X=7

الإمكانيات الإنتاجية عندما X=7		العائد من Y_2 عند $P_{Y2}=1$	العائد من Y_1 عند $P_{Y1}=2$	إجمالي العائد
Y_2	Y_1			
٤٣	٠	٤٣	٠	٤٣
٤٢	٧	٤٢	١٤	٥٦
٤٠	١٣	٤٠	٢٦	٦٦
٣٦	١٨	٣٦	٣٦	٧٢
٣٠	٢٢	٣٠	٤٤	٧٤
٢٢	٢٥	٢٢	٥٠	٧٢
١٢	٢٧	١٢	٥٤	٦٦
٠	٢٨	٠	٥٦	٥٦

ثانياً: الأســـلوب الـــــــبياني:

تتحدد توليفة النواتج المعظمة لإيرادات المنشأة من خلال إستخدام القاعدة التي تشترط تساوي معدل الإحلال الحدي بين النواتج مع النسبة السعرية لهذه النواتج أي أن:

$$MRPS_{Y_1Y_2} = -\frac{P_{Y_1}}{P_{Y_2}}$$

أو بمعنى آخر:

$$\frac{\Delta Y_2}{\Delta Y_1} = -\frac{P_{Y_1}}{P_{Y_2}} \qquad (١٠,١٢)$$

الجزء الأيسر من القاعدة يوضح ميل منحنى الإمكانيات الإنتاجية، في حين يمثل الجزء الأيمن ميل خط العائد المتساوي وعلى هذا فإن أقصى عائد يتحدد عند نقطة تماس خط العائد المتساوي مع منحنى الإمكانيات الإنتاجية كما هو موضح بالشكل رقم (١٠,٩).

وعند نقطة التماس نجد أن Y_2=31.5 وحده، Y_1=21.5 وحده وعليه فإن الإيرادات الكلية تقدر بالتعويض في المعادلة:

$$TR = P_{Y_1}Y_1 + P_{Y_2}Y_2$$

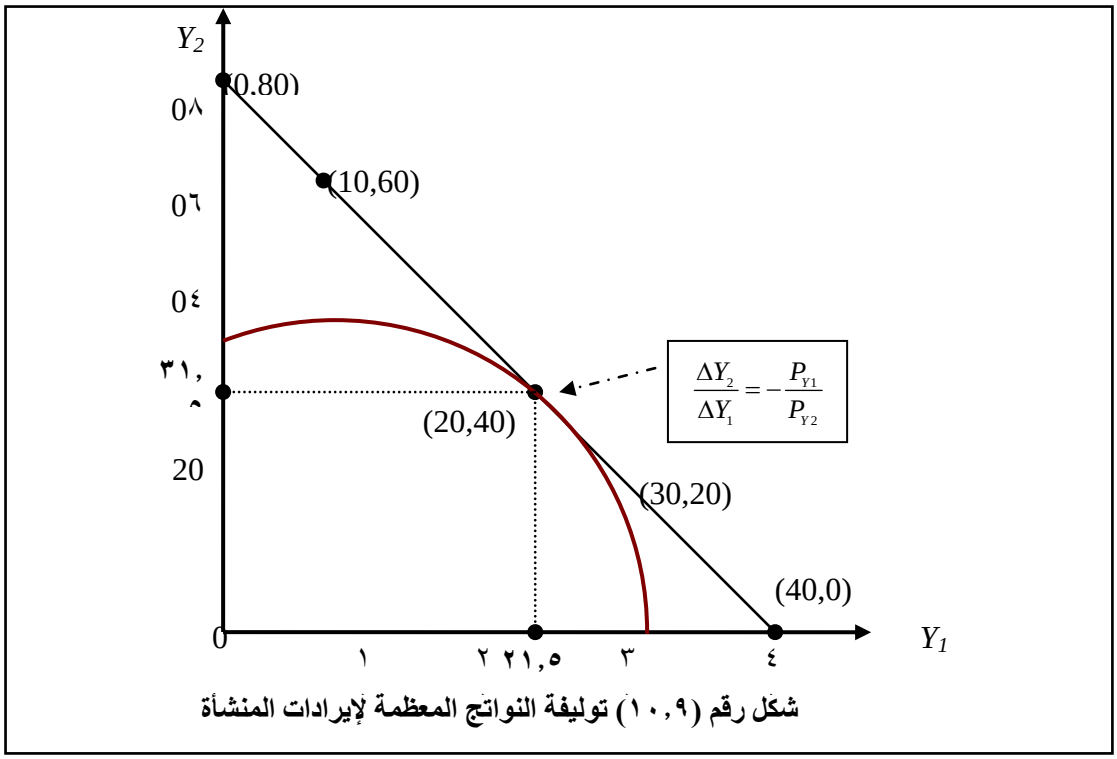
أي أن:

$$TR = 1(31.5) + 2(21.5) = 74.50$$

وهي تقريباً مساوية للطريقة الجدولية مع ملاحظة أنه عند رسم خط الإيرادات المتساوي فإن هذه الإيرادات تكون غير معروفة، كما أنه كلما بعد خط الإيرادات المتساوي عن نقطة الأصل كلما دل على إيرادات كلية أعلى، غير أن معظمة الإيرادات تتحقق فقط عند نقطة تماس خط الإيرادات المتساوي مع منحنى الإمكانيات الإنتاجية.

كما يلاحظ أن المعادلة (١٠,١٢) التي يمكن إعادة كتابتها كما يلي :

$$P_{Y1}(\Delta Y_2) = -P_{Y1}(\Delta Y_1)$$



شكل رقم (١٠,٩) توليفة النواتج المعظمة لإيرادات المنشأة

تشير إلى أن معظمة الإيرادات الكلية تتحقق عند النقطة التي تكون عندها الزيادة في الإيرادات الكلية الناشئة عن إضافة وحدات من أحد النواتج Y_2 تساوي الإنخفاض في الإيرادات الكلية الناشئة عن تخفيض وحدات الناتج الآخر Y_1 وعلى هذا فلايوجد ما يشجع على تغيير توليفة النواتج المتحصل عليها.

وجدير بالذكر أنه في ظل توافر كميات مختلفة من مورد الإنتاج فإن المنشأة تكون أمام العديد من منحنيات الإمكانيات الإنتاجية، وفي ظل تباين الإيرادات فإن المنشأة تستطيع أن تحدد التوليفات المعظمة لإيراداتها عند تماس خطوط الإيرادات المتساوية مع منحنيات الإمكانيات الإنتاجية، هذا ويطلق على الخط (المنحنى) الذي يربط نقاط التماس هذه بخط التوسع للمنشأة. ولكن يجب أن يلاحظ أنه أمام هذا العدد من التوليفات الإنتاجية التي تبدو معظمه للإيرادات فإن هناك توليفة واحدة هي التي تعظم الأرباح وهي تلك التوليفة التي تستخدم الموارد بالطريقة التي تحقق مبدأ المساواة بين التكاليف الحدية والإيرادات الحدية. وبالطبع فإن هذه التوليفة تقع على خط التوسع للمنشأة.

ثالثاً: الأسلوب الجبري:

يمكن تحديد حجم الإنتاج الامثل من Y_2, Y_1 بالطريقة الجبرية كالأتي:

$$Y_2 = f(Y_1) \qquad (١٠,١٣)$$

حيث إن المعادلة (١٠,١٣) توضح منحنى إمكانيات الإنتاج وعلى إفتراض أن هدف المنشاة هو تعظيم الإيراد الكلي الذي تتخذ معادلته الصورة التالية:

$$TR = P_{Y1}Y_1 + P_{Y2}Y_2 \qquad (١٠,١٤)$$

حيث P_2,P_1 هي أسعار الوحدة من النواتج Y_2,Y_1 على التوالي وبإحلال المعادلة (١٠,١٣) في المعادلة (١٠,١٤) نجد:

$$TR = P_1Y_1 + P_2 f(Y_1) \qquad (١٠,١٥)$$

ولمعظمة دالة الإيراد فإن الشرط الأساسي يستدعي مساواة تفاضل هذه الدالة بالنسبة للناتج Y_1 بالصفر كما يلي:

$$\frac{dTR}{dY_1} = P_1 + P_2 \frac{df(Y_1)}{dY_1} = 0 \qquad (١٠,١٦)$$

ومن الشرط الأساسي (١٠,١٦) يمكن الحصول على الحجم الامثل من Y_1 وليكن Y_1^* .

وبتعويض Y_1^* في منحنى الإمكانيات الإنتاجية (١٠,١٣) نحصل على Y_1^* كما يلي:

$$Y_2^* = f(Y_1^*)$$

ويمكن التأكد من تحقيق الشرط الكافي في هذا الخصوص.

الباب الحادي عشر

١١,١ اقتصاديات الحجم *Economic of Scale*

١١,٢ الناتج في المدى الطويل *Production in the Long Run*

١١,٣ منحنيات التكاليف في المدى الطويل *Long-Run Cost Curves*

١١,٤ العلاقة بين تكاليف المدى القصير وتكاليف المدى الطويل

اقـــــتصاديات الـــــــحجم[٢٢]

Economcies of Scale

تطرقنا فيما سبق إلى موارد الإنتاج فذكرنا أن بعضها متغير *Variable* وبعضها ثابت *Constant* حيث أن تحليلنا السابق كان يخص المدى القصير *Short-Run* حيث الموارد الثابته والمتغيرة. لكن هنا وإن كنّا سنبقي على فروض سيادة المنافسة الكاملة والتأكد التام إلاّ أنه سيفترض تغير الموارد بخلاف تحليل المدى القصير حيث أن هذا القسم يختص بالمدى الطويل حيث يستطيع المزارع تعديل موارده الثابته كافة مثل حجم المزرعة والمباني والآلات لذلك يطلق على المدى الطويل تعبير "*فترة التخطيط*" *Planning Period* . ونظراً لأن النسب المتغيرة لها ارتباط بموضوعات هذا الباب فسوف يضاف في نهايته وإن كان الوحيد الذي يخص المدى القصير في هذا الباب.

الـــــناتج في الـــــــمدى الـــــــطويل[٢٣]

Production in the Long Run

يعرف المدى الطويل *Longe Run Period* بأنه ذلك المدى الذي يسمح بتغير الموارد الثابته كافة لتصبح موارد متغيرة. هذا مع العلم بأنه لا توجد فترة زمنية بعينها لحدوث هذا التغيير فقد يحدث خلال عام أو خلال أشهر...ألخ.

سوف نفترض في تحليلنا وجود متغيرين حتى يسهل فهم الأسس والقواعد التي تحكم العملية الإنتاجية في هذا المدى إلاّ أنه يمكن تعميم تلك القواعد لتشمل أكثر من متغيرين.

فإذا فرض أن دالة الإنتاج في المدى الطويل يمكن التعبير عنها كما في المعادلة (١١,١) التالية:

---

[٢٢] اقتصاديات الإنتاج الزراعي، الفيتوري،عامر و مراد موسى، الطبعة الأولى، جامعة الفاتح،٢٠٠٠م.

[٢٣] اقتصاديات الإنتاج الزراعي، الفيتوري،عامر و مراد موسى، الطبعة الأولى، جامعة الفاتح،٢٠٠٠م.

$$Y = f(X_1, X_2) \qquad (١١,١)$$

حيث:

X_1 = مورد الإنتاج المتغير، X_2 = حجم المشروع الذي قد يتغير أيضاً، Y= الناتج.

رغم أن كل موارد الإنتاج تعتبر متغيرة *Variable* فإن العملية الإنتاجية إنما يتم التعبير عنها خلال فترة زمنية معينة باعتبارها موسماً زراعياً مثلاً، أو سنة ميلادية.

منحنيات التكاليف في المدى الطويل[٢٤]

Long-Run Cost Curves

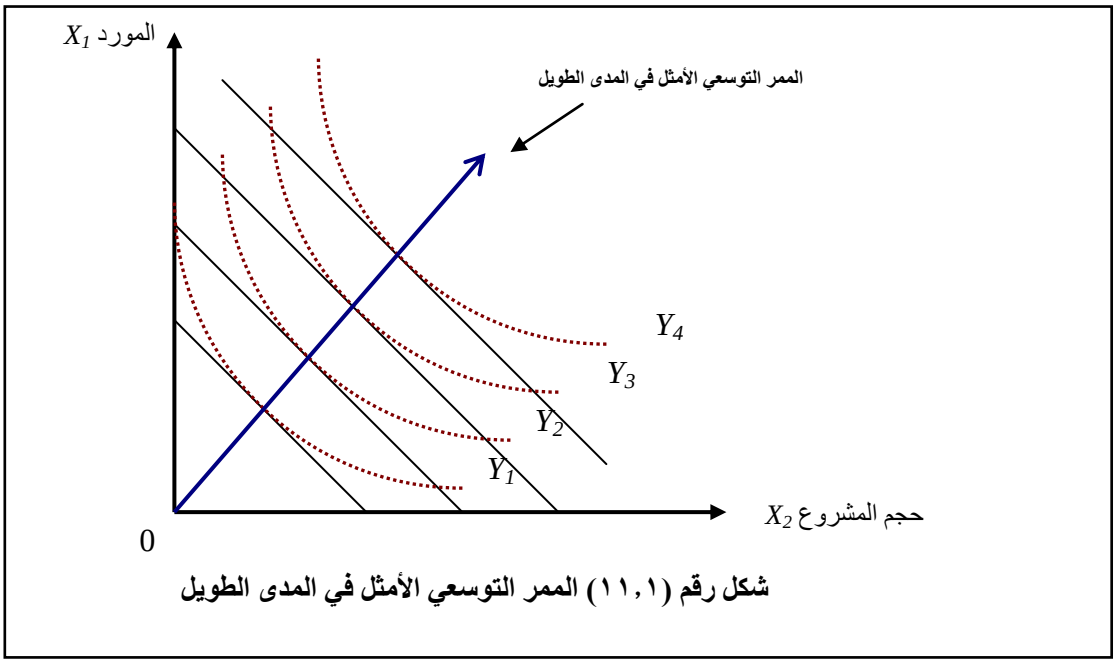
كل تكاليف المدى الطويل *Longe-Run Cost* يتم إشتقاقها من دوال إنتاج المدى الطويل مع ملاحظة أن قانون تناقص الغلة *Low of Diminshing Returns* لايسري في المدى الطويل حيث لاتوجد موارد إنتاجية ثابته في هذا المدى، ولهذا فإن شكل دالة الإنتاج *Production Function* في المدى الطويل يتوقف تماماً على التقنية والعوامل البيولوجية *Technical &Biological Factors* التي تؤثر على العملية الإنتاجية.

لتدنية تكاليف الإنتاج في المدى الطويل فإنه يتم إنتاج ذلك الناتج بأدنى تكلفة لموارد الإنتاج، هذا وتنطبق قاعدة توليفة الموارد الأقل تكلفة في المدى القصير مع نظيرتها في المدى الطويل التي يعبر عنها كما يلي:

$$\frac{MPP_{x1}}{P_{x1}} = \frac{MPP_{x2}}{P_{x2}} \qquad (١١,٢)$$

ويتضح من القاعدة (١١,٢) أن كل حجم من أحجام المشروع يقابله قدر معين من مورد الإنتاج المتغير، بما يحقق تدنية تكاليف إنتاج قدر معين من الناتج كما هو موضح بالشكل رقم (١١,١) التالي:

[٢٤] اقتصاديات الإنتاج الزراعي، الفيتوري،عامر و مراد موسى، الطبعة الأولى، جامعة الفاتح،٢٠٠٠م.



شكل رقم (١١,١) الممر التوسعي الأمثل في المدى الطويل

حيث يمر منحنى توسع المدى الطويل *Long Run Expansion Path* للمنشأة بنقاط تماس منحنيات سواء الإنتاج *Isoquants* مع خطوط التكاليف المتساوية *Isocosts*. ولهذا فإن المنشأة تستخدم عادة توليفة الموارد الأقل تكلفة في المدى الطويل وذلك عن طريق التحرك إلى **أعلى** (زيادة الإنتاج) أو إلى **أسفل** (تخفيض الإنتاج) على الممر التوسعي الامثل للمنشأة في المدى الطويل.

ويمكن التعبير عن التكاليف الكلية في المدى الطويل $LRTC$ الممثلة بالممر التوسعي الأمثل بالمعادلة (١١,٣) التالية:

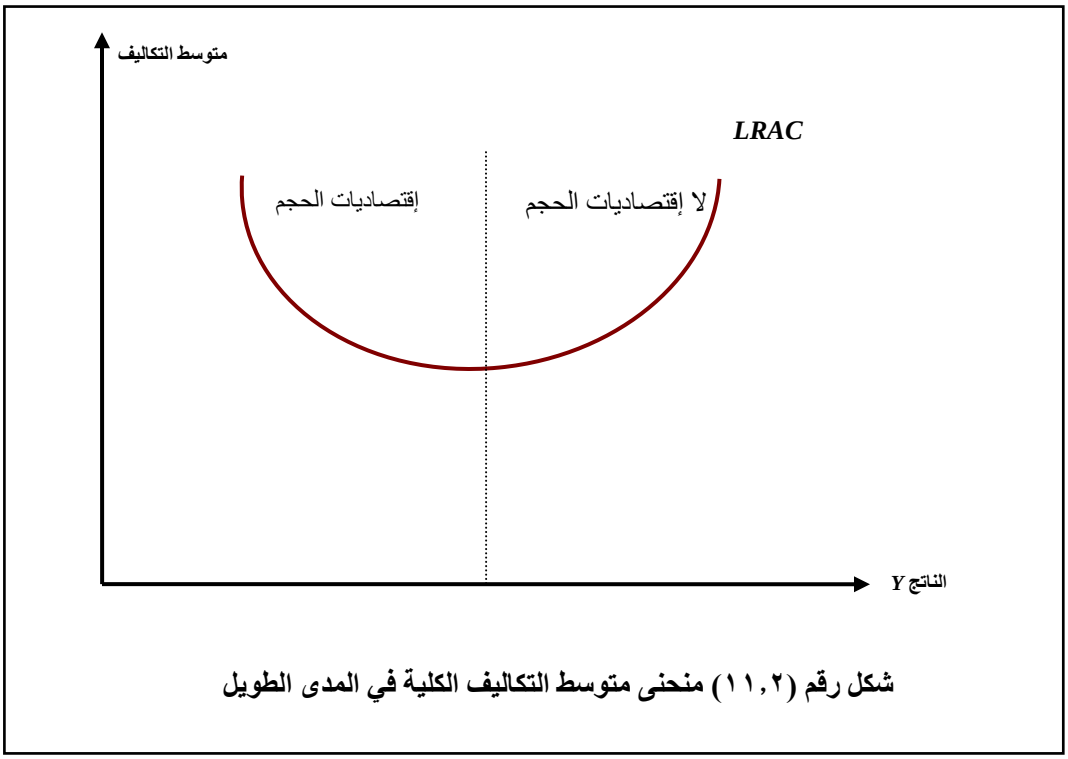
$$LRTC = P_{x1}X_1 + P_{x2}X_2 \qquad (١١,٣)$$

حيث:

$LRTC$ = التكاليف الكلية في المدى الطويل،

P_{x2},P_{x1} = أسعار كل من الموردين X_2,X_1 على الترتيب.

ومن المعادلة (١١,٣) يتضح أنه في المدى الطويل لاتوجد تكاليف ثابته، كذلك يمكن تقدير دوال التكاليف المتوسطة في المدى الطويل $LRAC$ وكذلك دوال التكاليف الحدية في المدى الطويل $LRMC$ بالطرق المتعارف عليها في ذلك.



شكل رقم (١١,٢) منحنى متوسط التكاليف الكلية في المدى الطويل

ويوضح الشكل رقم (١١,٢) دالة التكاليف المتوسطة في المدى الطويل التي تتفق في الشكل مع الشكل المعتاد لدوال التكاليف المتوسطة في المدى القصير وإن كانت المبررات غير واحدة. ذلك أنه عندما يكون حجم المشروع صغيراً فإن الوحدات المتتالية من الناتج تزداد بمعدل أكثر كفاءة، وبالتالي تنخفض متوسط تكاليف الوحدة المنتجة، **ويعزى** انخفاض متوسط تكاليف الوحدة المنتجة باستمرار التوسع في الإنتاج إلى غلة الحجم المتزايدة والتي تعزى إلى تخصيص موارد العمل ورأس المال، فمع زيادة المساحة المزروعة يمكن إستخدام آلات الحصاد وآلات جمع للمحصول وغيرها من الآلات ذات الكفاءة العالية التي لاتكون بالكفاءة نفسها أو قد لا تصلح مطلقاً في المساحات الصغيرة، كما أن المزارع قد يشتري موارد الإنتاج بتكاليف أقل لكبر حجم مشترياته. غير أنه عند نقطة معينة تبدأ دالة متوسط التكاليف في الإرتفاع، لارتفاع تكلفة الوحدة المنتجة بعد هذه النقطة (أدنى نقطة على منحنى متوسط التكاليف).

ويُرجع أغلب الإقتصاديين ظاهرة إرتفاع متوسط تكلفة إنتاج الوحدة بعد هذه النقطة إلى قانون غلة الحجم المتناقصة والذي يرجع أساساً إلى تناقص كفاءة عنصر الإدارة فمع زيادة حجم

المشروع عن حد معين يتعذر معه التحكم في كل الأمور المتعلقة بالعملية الإنتاجية إذ لعنصر الإدارة طاقة قصوى لا تستطيع أن تعمل بعدها بالكفاءة نفسها فتقل مثلاً عملية الإتصال بمواقع الإنتاج ولا يستطيع المدير أن يكون دائماً عند كل مواقع الإنتاج الحرجة، كما أن عملية تنظيم العمل في مختلف مراحل العملية الإنتاجية تزداد صعوبة مما ينتج عنه تزايد معدلات الأخطاء المكلفة، كل هذا من شأنه أن يؤدي إلى إرتفاع التكاليف للوحدة المنتجة.

هذا ويلاحظ من الجزء الأيسر من الشكل أعلاه أن متوسط التكاليف في المدى الطويل ينخفض بزيادة حجم المشروع، لذلك يطلق على هذا الجزء أن المشروع يتمتع باقتصاديات الحجم. وعندما تبلغ متوسط التكاليف في المدى الطويل أدنى نقطة لها فإنه عندها يتحدد الحجم الأمثل للمشروع حيث أن المشروع الذي يتمتع بهذا الحجم ينتج وحدات الناتج بأقل قدر من التكاليف. غير أن – لا إقتصاديات الحجم – *Diseconomies of Size* – تظهر عندما يبدأ منحنى متوسط التكاليف في المدى الطويل في الإرتفاع.

إن شكل حرف (*U*) الذي تتخذه منحنيات متوسطات التكاليف في المدى الطويل واجه العديد من الانتقادات، إذ ليس بالضرورة أن تتخذ مثل هذه الدوال الشكل التقليدي السابق الإشارة إليه، بل قد يتعداه ليأخذ أحد الأشكال الموضحة التالية شكل رقم (١١,٣).

ففي الشكل (***A***) نجد أن متوسط التكاليف في المدى الطويل قد تكون ممثلة بخط أفقي بمعنى أن كل أحجام المشروع يمكن أن تنتج وحدات متتالية بالتكاليف المتوسطة نفسها وتسمى هذه الحالة بثبات عائد الحجم *Constant Returns to Size*.

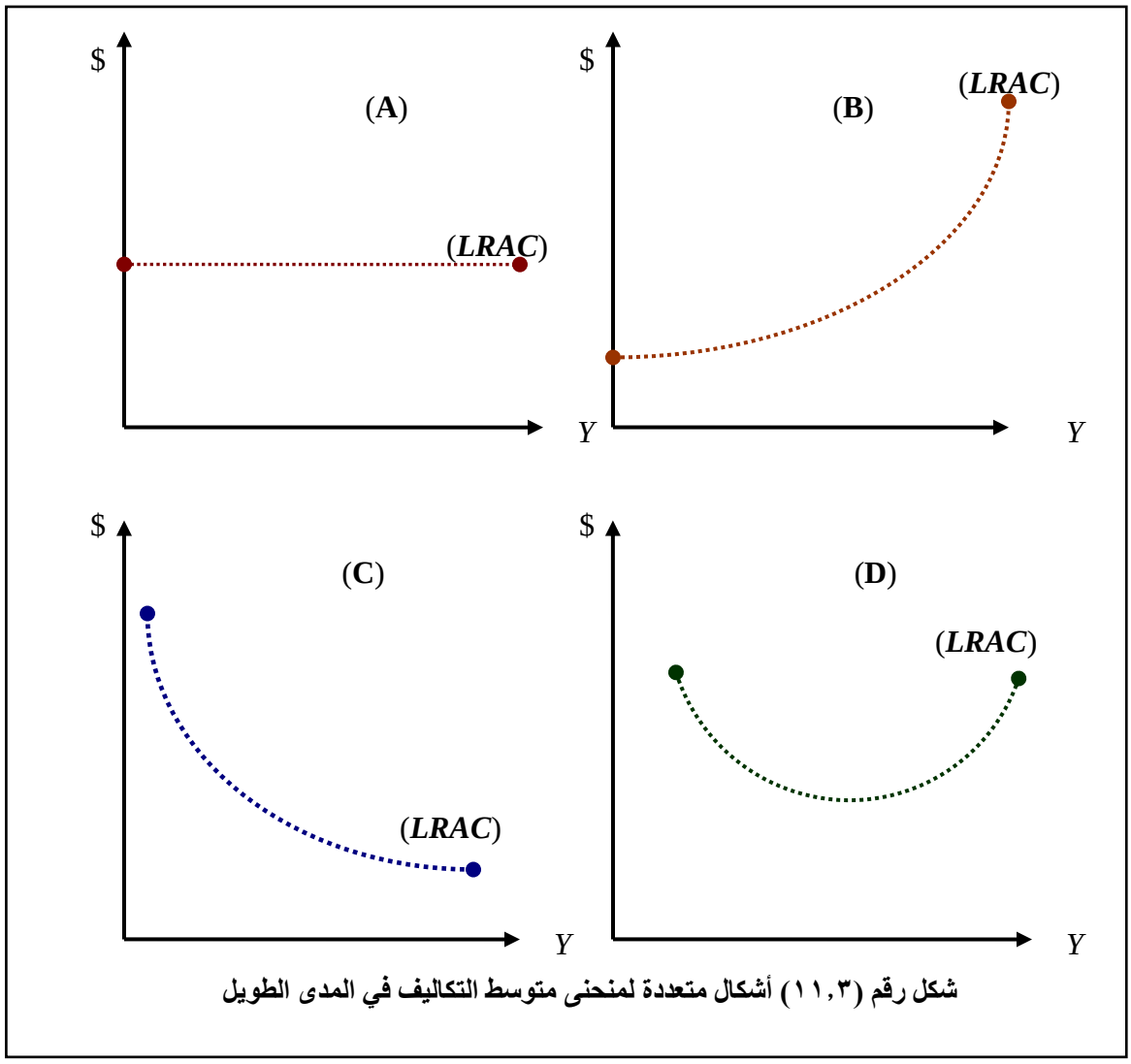
أما الشكل (***B***) فيشير إلى عدم اقتصاديات الحجم إذ أن اقتصاديات الحجم لا تظهر عند أي مستوى من مستويات الإنتاج وبالتالي فكلما زاد حجم المشروع منذ البداية فإن متوسط تكلفة الوحدة يأخذ في الإرتفاع.

شكل (***C***) يوضح سيادة إقتصاديات الحجم تماماً عكس الشكل (***B***) ذلك أنه مع زيادة حجم المشروع فإن متوسط تكلفة الوحدة المنتجة تأخذ في الإنخفاض.

شكل (***D***) يتقارب إلى حد ما مع الشكل التقليدي إلا أن ثبات عائد الحجم تظل سائدة لفترة طويلة.

أي بمعنى آخر فإن لا اقتصاديات الحجم لا تظهر بعد بلوغ حجم المشروع حجماً أكبر من سابقه مباشرة بل قد يستمر المشروع محققاً عوائد الحجم نفسها باستمرار زيادة هذا الحجم في المدى الطويل نسبياً بعدها تبدأ لا اقتصاديات الحجم في الظهور.

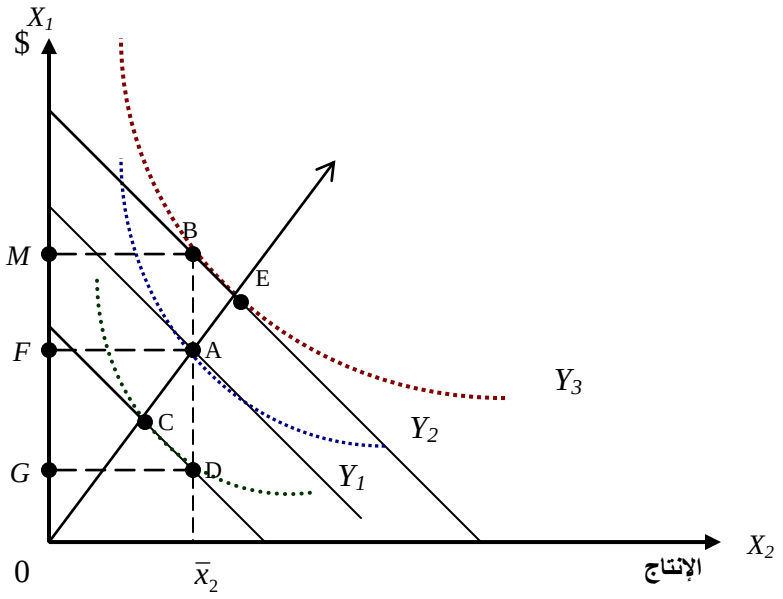
هذا وجدير بالذكر أن AVC في المدى الطويل إنما يتم إشتقاقها من نظيرتها دوال الإنتاج في المدى الطويل التي يمكن منها إشتقاق متوسطات النواتج الفيزيقية (APP) وكذلك النواتج الحدية الفيزيقية (MPP).



شكل رقم (١١,٣) أشكال متعددة لمنحنى متوسط التكاليف في المدى الطويل

العلاقة بين تكاليف المدى القصير وتكاليف المدى الطويل[٢٥]

في المدى القصير *Short Run* يكون لدى المزارع عادة مشروع محدد ثابت حيث يكون أحد أو كل العناصر التالية ثابتة (الأرض، المباني، الآلات) وعليه فإن المزارع لا يستطيع زيادة إنتاجه في المدى القصير إلاّ من خلال العوامل المتغيرة كالأسمدة، العمالة المستأجرة، المبيدات. مثل هذه الحالة يمكن التعبير عنها من خلال الشكل (١١,٤) حيث أن حجم المشروع ثابت في المدى القصير عند $\overline{X}_2$ حيث ينتج القدر X_2 بأقل تكلفة ممكنة إذ يمكنه إستخدام القدر ***OF*** من المورد المتغير X_1 بالإضافة إلى القدر الثابت $O\overline{X}_2$ من المورد الثابت.



شكل رقم (١١,٤) العلاقة بين تكاليف المدى القصير و تكاليف المدى الطويل

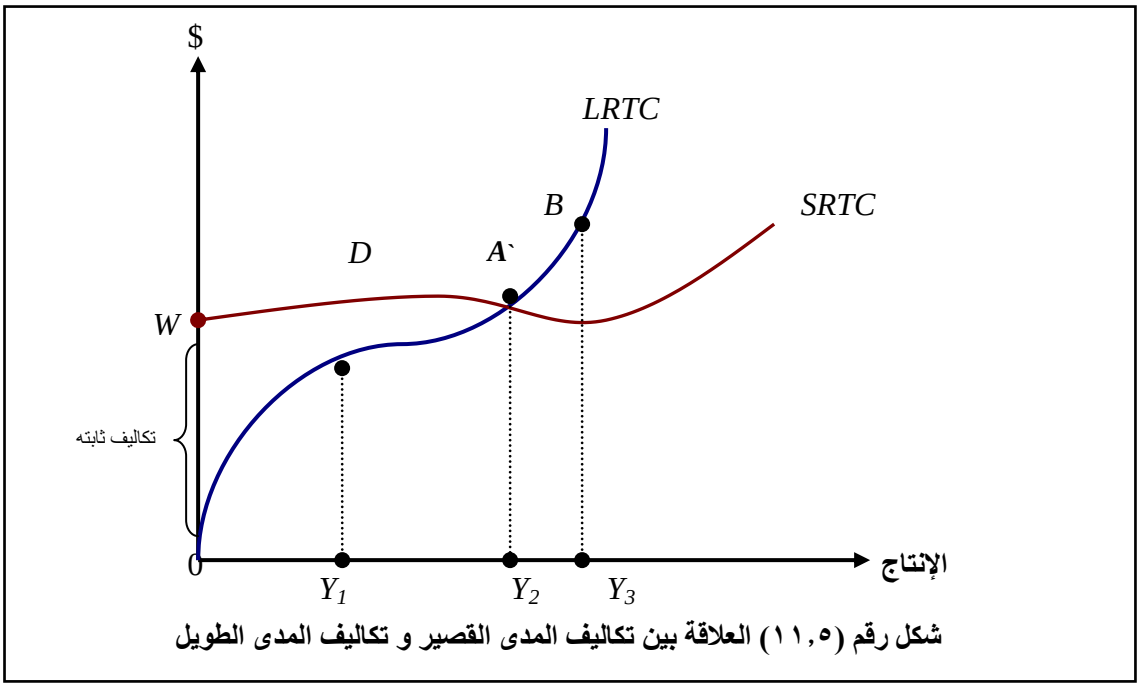
[٢٥] اقتصاديات الإنتاج الزراعي، الفيتوري،عامر و مراد موسى، الطبعة الأولى، جامعة الفاتح،٢٠٠٠م.

وحتى يتمكن المنتج من إنتاج قدر آخر غير Y_2 فإن عليه أن يغير من المورد X_1 فمثلاً إذا رغب المنتج في إنتاج القدر Y_3 من الناتج فعليه أن يستخدم القدر ***0M*** من X_1 كذلك إذا رغب في تخفيض الناتج إلى المستوى X_1 فعليه أن يستخدم القدر ***0G*** من المورد المتغير X_1 .

غير أن توليفات الموارد في المدى القصير الممثلة بالنقاط ***B,A,D*** تعد **أكثر** تكلفة من نظيراتها في المدى الطويل الممثلة بالنقاط ***E,A,C*** **الواقعة** على الممر التوسعي الأمثل للمشروع في المدى الطويل، ولهذا فإن تكاليف المدى القصير عند النقاط D,A,B أكبر من تكاليف المدى الطويل عند النقاط C,A,E غير أنهما يتساويان عند النقطة ***A***.

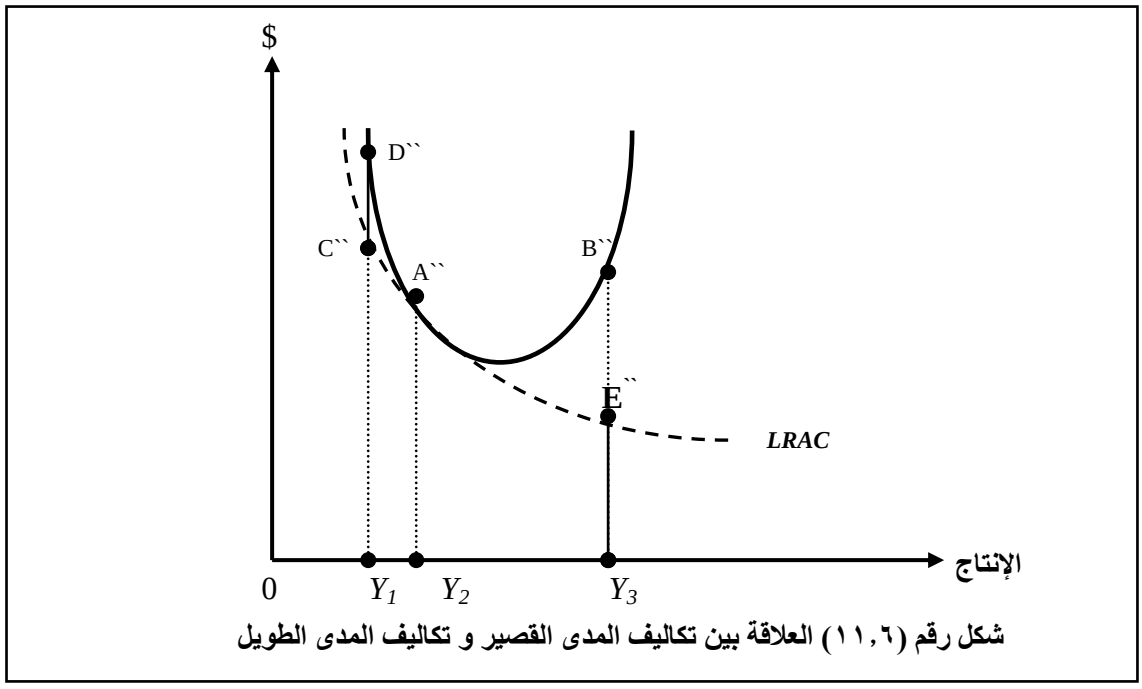
وبتوضيح ذلك من خلال منحنيات **التكاليف الكلية** في الشكل (١١,٥) يتضح أن ***0W*** تمثل التكاليف **الثابتة** المرتبطة بالقدر الثابت $\overline{OX}_2$ من المورد X_2 الثابت ولهذا فإن المنحنى ***SRTC*** يوضح منحنى التكاليف الكلية في المدى القصير.

وحيث أن التكاليف جميعها متغيرة في المدى الطويل إذ لا توجد تكاليف ثابتة فإن منحنى التكاليف الكلية في المدى الطويل يبدأ من نقطة الأصل ٠ ويظل منحنى التكاليف الكلية في المدى القصير في مستوى أعلى من منحنى التكاليف الكلية في المدى الطويل حتى النقطة $A`$ حيث يتم الحصول على المستوى Y_2 من الناتج. بعد مستوى الناتج Y_2 نجد أن التكاليف الكلية في المدى القصير تزداد بمعدل أسرع .



شكل رقم (١١,٥) العلاقة بين تكاليف المدى القصير و تكاليف المدى الطويل

وبالمثل يتضح من متوسطات التكاليف لمستوى الناتج Y_2 المعبر عنه بالشكل (١١,٦) أن متوسطات التكاليف عند توليفات الموارد ***ABCD*** في الشكل (١١,٤) توضحها النقاط ***A``,B``, C``,D``*** . ويجب مراعاة أن نقطة تماس منحنى متوسط التكاليف في المدى القصير *SRTC* مع منحنى متوسط التكاليف في المدى الطويل *LRAC* **لا يجب بالضرورة** أن تحدث عند أدنى نقطة على منحنى متوسط التكاليف في المدى القصير، إلا أن هذا التماس الذي **يعني** تساوي التكاليف المتوسطة في المدى الطويل *LRAC* مع المدى القصير قد يحدث عندما يكون منحنى متوسط التكاليف المتوسطة في المدى القصير هابطاً أو عند النقطة الدنيا له أو عندما يكون صاعداً.



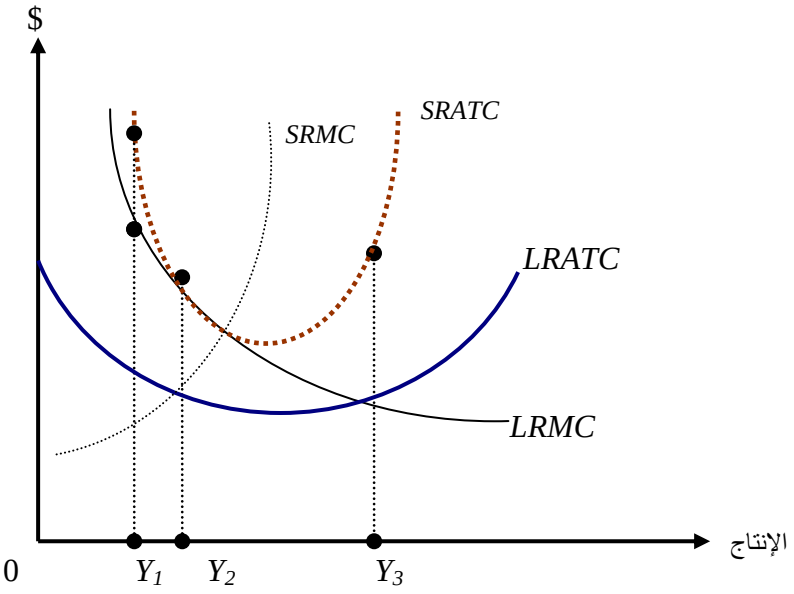
شكل رقم (١١,٦) العلاقة بين تكاليف المدى القصير و تكاليف المدى الطويل

وبالعودة إلى الشكل (١١,٤) نجد أنه عندما تنخفض متوسطات التكاليف في المدى الطويل بزيادة الإنتاج من المستوى ***A*** إلى المستوى ***E*** نجد أن متوسط التكاليف في المدى القصير ينخفض أيضاً من ***A*** إلى ***B*** (مادامت الدالة متصلة فإن النقطتان A,B عادة ما يتحركان ليقتربا من E كلما كان ذلك ضرورياً للبقاء على صفة اتصال الدالة).

لكن التكاليف الواقعة على الممر التسعي للمنشأة عادة ما تكون أقل عن نظيرتها القصيرة المدى عندما يكون حجم المشروع ثابتاً، وينطبق هذا بالمثل عندما ترتفع التكاليف من النقطة A إلى النقطة E.

الشكل(١١,٧) يوضح التكاليف الحدية في المدى الطويل$LRMC$ ونظيرتها في المدى القصير $SRMC$ ذلك أن التكاليف الحدية في المدى الطويل $LRMC$ يتم إشتقاقها بتفاضل دالة التكاليف في المدى الطويل. ويتضح من الشكل (١١,٧) أن منحنى التكاليف الحدية في المدى الطويل يكون في مستوى أعلى من نظيره في المدى القصير **عندما** يكون الأول$LRMC$ **هابطاً** والعكس عندما يكون **صاعداً، ويتساوى** الاثنان عندما يصلان إلى مستوى الناتج Y_2 (إذ يتساوى منحنى التكاليف الكلية في المدى الطويل مع نظيره في المدى القصير عند المستوى Y_2 كما في الشكل (١١,٥) أيضاً) وذلك

عندما يكون حجم المشروع عند المستوى الثابت $\overline{X}_2$ **ولا يمكن** أن يتساوى المنحنيان عند أي مستوى آخر للإنتاج غير ذلك المعبر عنه بالمستوى Y_2 عند الحجم $\overline{X}_2$ للمشروع وهذا يعبر عنه عند تقاطع منحنى التكاليف الحدية في المدى الطويل مع التكاليف الحدية في المدى القصير عند مستوى Y_2 من الناتج.



شكل رقم (١١,٧) العلاقة بين تكاليف المدى القصير و تكاليف المدى الطويل

ومن الشكل (١١,٨) تتضح العلاقة بين منحنى التكاليف في المدى الطويل و العديد من أحجام المشاريع. إذ يمثل حجم المشروع الأول كل من منحنى التكاليف الحدية القصيرة $SRMC_1$ ومنحنى التكاليف المتوسطة القصيرة $SRATC_1$ بالمثل فإن حجم المشروع الثاني يمثله المنحنى $SRMC_2$ والمنحنى $SRATC_2$ اللذان يمثلان منحنى التكاليف الحدية والتكاليف المتوسطة في المدى القصير على الترتيب للمشروع الأكبر حجماً نسبياً عن المشروع الأول.

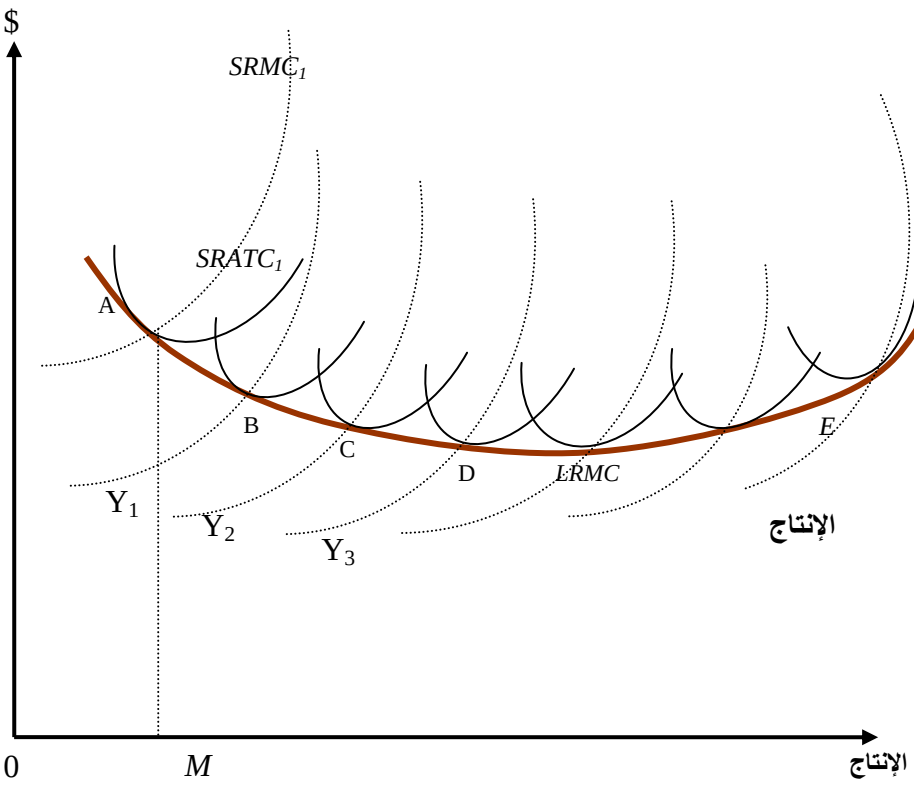
كما يلاحظ أنه يوجد العديد من أحجام المشاريع فيما بين الحجم الأول والثاني السابق الإشارة إليهم إلاّ أنه سيتم تجاهل مثل هذه الأحجام لتسهيل التحليل.

يلاحظ أن المشروع ذو الحجم الثاني يمكنه إنتاج القدر ***0M*** من الناتج بكفاءة أكبر من نظيره المشروع الأول. وعندما يزداد حجم الناتج فإن المشروع **الثالث** يكون أكثر كفاءة... وهكذا إلاّ أنه إذا تعدى المشروع الحجم الرابع فإن المزيد من الناتج يمكن تحقيقه فقط في ظل إرتفاع تكاليف الوحدة المنتجة.

ومن منحنيات التكاليف في المدى القصير يمكن إشتقاق منحنى التكاليف المتوسطة في المدى الطويل الذي يغلف منحنيات التكاليف المدى القصير، لذلك أطلق على هذا المنحنى المغلف *Envelope Curve* .

ويلاحظ من الشكل أن المنحنى المغلف الذي يمثل منحنى متوسط التكاليف الكلية في المدى الطويل $LRAC$ يمس منحنيات متوسطات التكاليف في المدى القصير على يمين النقطة D عند نقاط بلوغ النقط الدنيا لمتوسطات التكاليف القصيرة، كذلك يمس منحنيات متوسطات التكاليف القصيره على يسار النقطة D وذلك عند نقاط تقع يمين النقط الدنيا لمتوسطات التكاليف القصيرة.

وعليه فإنه عند النقطة ***D*** نجد أن منحنى متوسط التكاليف في المدى الطويل تمس منحنى متوسط التكاليف في المدى القصير عند أدنى نقطة للأخير. وتمثل النقطة ***D*** النقطة الدنيا للمنحنيين الممثلين للمنحنى المغلف في المدى الطويل $LRAC$ والمنحنى الخاص بمتوسط التكاليف القصيرة للمشروع ذا الحجم الرابع، وعندما يكون حجم المشروع هو الحجم ٤ فإن ذلك الحجم يشكل الحجم الأمثل للمشروع. ومن ثم يمكن القول بأن المنحنى المغلف يضم جميع النقاط التي تمثل الأحجام الأكثر كفاءة في المدى الطويل.



شكل رقم (١١,٨) منحنيات التكاليف القصير والمنحنى المغلف لعدد من المشاريع

هذا ويجب الملاحظة أن المنحنى المغلف يسمى أحياناً بمنحنى التخطيط *Planning Curve* إلاّ أنه عندما يقرر أحد المشاريع إتخاذ حجماً معيناً ويبدأ الإنتاج فإن المشروع أصبح يعمل في ظل المدى القصير ويمثله منحنى كتلك المحنيات الممثله لمتوسطات التكاليف في المدى القصير.

الباب الثاني عشر

١٢,١عوائد السعة *Returns Scale*

١- تزايد عوائد السعة *Increasing Returns To Scale (IRS)*:

٢- ثبات عوائد السعة *Constant Returns To Scale (CRS)*:

٣- تناقص عوائد السعة *Decreasing Returns To Scale* (*DRS*):

١٢,٢ قانون النسب المتغيرة *The Law of Variable Proportions*

١٢,٣ التقدم التقني ودوال الإنتاج *Technical Progress and the Production Function*

١- تقدم تقني لتكثيف رأس المال *Capital – Deepening Technical Progress*

٢- تقدم تقني - تكثيف العمالة *Labour– Deepening Technical Progress*

٣- تقدم تقني محايد *Neutral Technical Progress*

عـــــوائد الـــــــــــسعة

Returns Scale

حتى يمكن التفرقة بين عوائد السعة وعوائد الحجم (إقتصاديات الحجم) فعوائد السعة تختص بقياس التغير في الناتج عندما يتم تغيير كافة الموارد الداخلة في الإنتاج بالنسبة نفسها ولكن عوائد الحجم لاتشترط هذا فعوائد الحجم على الجانب الآخر قد تخص المدى القصير والمدى الطويل للمشروع. فاقتصاديات حجم المشروع في المدى القصير تتحقق عند الإستخدام الأمثل لحجم المشروع المتاح ولتحقيق هذا فإن المشروع يستمر في الإنتاج مادامت العوائد تغطي التكاليف المتغيرة.

أما عوائد الحجم في المدى الطويل حيث يستطيع المشروع أن يغير من حجمه وحيث الموارد جميعها متغيرة فإنها تتحقق من خلال التحرك على منحنى متوسط التكاليف الكلية في المدى الطويل(المنحنى المغلف) أو بمعنى آخر من خلال التحرك على الممر التوسعي الأمثل بأي نسبة موارد وهذا يستدعي ضرورة تغطية جميع التكاليف(حيث جميعها متغير في هذا المدى) وعلى صاحب المشروع في هذه الحالة الإختيار من بين الأحجام المتاحة له الحجم الذي يناسبه بشرط أن يمثل هذا الحجم بنقطة على المنحنى المغلف [٢٦].

مما سبق يتضح أن عوائد السعة تخص الناتج مباشرة إذ توضح التغير في الناتج عندما تتغير موارد الإنتاج بالنسبة نفسها وأمامنا في هذا المقام ثلاثة حالات:

١- تزايد عوائد السعة *Increasing Returns To Scale (IRS)*: وفيها عندما تزيد موارد الإنتاج بنسبة معينة فإن الناتج يزيد بنسبة أكبر.

٢- ثبات عوائد السعة *Constant Returns To Scale (CRS)*: وفيها عندما تزيد موارد الإنتاج بنسبة معينة فإن الناتج يزيد بالنسبة نفسها.

٣- تناقص عوائد السعة *Decreasing Returns To Scale* (*DRS*): وفيها عندما تزيد موارد الإنتاج بنسبة معينة فإن الناتج يزيد بنسبة أقل.

[26] Moussa, M.Z., "Size and Efficiency in Egyption Agriculture: A Production and Profit Function Approach" Ph.D Thesis. Manchester University, UK, 1987.

ولتوضيح مفهوم عوائد السعة جبرياً يمكننا إستخدام دالة الإنتاج طويلة المدى التالية:

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (١٢,١)$$

حيث: Y= الناتج ، $X_1,\ldots,X_n$ = موارد الإنتاج.

لنفرض أن الثبات K يمثل القدر (النسبة) التي يزيد بها كل مورد من موارد الإنتاج (حيث أن قيمة K أقل من الوحدة) في هذه الحالة فإن عائد السعة يعبر عنه بالقدر n الموضح بالمعادلة التالية:

$$YK^n = f(Kx_1, Kx_2, \ldots, Kx_n)$$

K^n = التغير في الناتج Y عندما تتغير كل الموارد بالمعدل K. فإذا بلغت قيمة n الوحدة فإن التغير في الناتج يكون مساوٍ للتغير في الموارد (ثبات عوائد السعة) ، أما إذا كانت n أكبر من الوحدة فهذا يشير إلى أن التغير في الناتج يحدث بمعدل أكبر من معدل التغير في الموارد (تزايد عوائد السعة) ، وفي حالة ، أما إذا كانت n أقل من الوحدة فهذا يشير إلى أن التغير في الناتج يحدث بمعدل أقل من معدل التغير في الموارد (تناقص عوائد السعة).

دوال الإنـــــتاج الـــــــمتجانسة

Homogeneous Production Function

تعريف:

تعتبر الدالة متجانسة من الدرجة (r)إذا كان بالإمكان ضرب كل متغير في عامل ثابت (K)بحيث يكون الناتج هو تغير قيمة الدالة الأصلية بنسبة (k^r)، بمعنى آخر:

$$f(x_1, x_2, \Lambda\ , x_n)$$

$$f(kx_1, kx_2, \Lambda\ , kx_n) = kf(x_1, x_2, \Lambda\ , x_n)$$

حالة خاصة:

إذا كانت $R=1$ ←يطق على الدالة إسم متجانسة من الدرجة الأولى أو متجانسة خطية *Linearly Homogeneous Function* و هذا يعني كذلك أن هذه الدالة لها خاصية ثبات عوائد الإنتاج *Constant Returns to Scale* أي أنه بزيادة جميع عوامل الإنتاج المستقلة بمعدل (k) سوف يسبب زيادة الإنتاج بنفس المعدل (k).

مثال (١):

الدالة $q = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ تعتبر متجانسة من الدرجة الأولى، لأنه بالضرب ب k;

$$(x_1.k)^{\frac{1}{2}}.(x_2.k)^{\frac{1}{2}} = x_1^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} * x_2^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}}$$

$$= k.x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

$$= k.q$$

مثال (٢):

الدالة $q = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$ تعتبر متجانسة من الدرجة الثانية لأنه بالضرب بـ **(k)** نحصل على:

$$(x_1.k)^2 + (x_2.k)^2 + (x_1.k)(x_2.k) = x_1^2.k^2 + x_2^2.k^2 + x_1 x_2.k^2$$
$$= k^2[x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2]$$
$$= k^2.q$$

إذا **2** = ***r*** مما يعني أن الدالة متجانسة من الدرجة الثانية.

الـــدوال الـــــمتجانسة ونـــــــظرية أويـــلر

Homogenous Functions and Euler's Theorem

لقد كان التركيز في الدراسات الإقتصادية على عوائد السعة وليس عوائد الحجم لأن الإعتقاد الذي كان يسود بين الإقتصاديين هو أن كل دوال الإنتاج طويلة المدى هي من النوع المتجانس ومن الدرجة الأولى، وعلى هذا فإن الدالة المتجانسة من الدرجة n يمكن تعريفها بأنها تلك الدالة التي إذا ضرب كل متغير من متغيراتها المستقلة في ثابت مقداره k فإن المتغير التابع سوف تزداد قيمته بالقدر k^n ورياضيا يمكن التعبير عن ذلك كما يلي:

$$YK^n = f(KX_1, KX_2)$$

ويبدو أن هذا التعريف متشابه مع تعريف عوائد السعة *Returns to Scale* لكن الفارق الوحيد هو أن قيمة n في التجانس تظل ثابتة بغض النظر عن مستويات x وبغض النظر عن قيمة k وهذا لا يحدث لعائد السعة إذ أن قيمة k تؤثر في نوع العائد، فقد يظهر تناقض عائد السعة *Returns to Scale* بزيادة حجم k ومن هذا يتضح انه لا تناقض بين درجة التجانس والعائد للسعة، فالدالة المتجانسة من الدرجة الأولى ينتج عنها ثبات عوائد السعة والمتجانسة من الدرجة اكبر من الوحده تشير إلى تزايد عوائد السعة. وهكذا مع ضرورة أن تكون الدالة للمدى الطويل.

أهم خصائص الدوال المتجانسة ما يلي:

أولا: الدالة المتجانسة من الدرجة الأولى تتسم بتساوي عوائد السعة وبالتالي فان الممر التوسعي الامثل لمثل هذه الدوال يكون خطا مستقيماً ويخرج من نقطة الأصل كما أن الناتج يزداد بمعدل موارد الإنتاج نفسها، لذلك يطلق على مثل هذه الدوال، الدوال الخطية المتجانسة ويسمى المسطح الإنتاجي لهذه الدوال بالمسطح المحكوم *Ruled Surface* لأن الناتج يزداد بمعدل خطي على أي خط من خطوط التوسع *Isoclines* كما أن منحنى متوسط التكاليف في المدى الطويل يكون خطا أفقيا.

ثانياً: تتسم دوال الإنتاج المتجانسة بأنه إذا ضربت كمية كل مورد في الناتج الحدي لهذا المورد ثم أضيفت هذه القيمة مع نظيرتها للموارد الأخرى فان الناتج يساوي درجة التجانس مضروبا في كمية الناتج وهذه الخاصية تسمى نظرية أويلر *Euler's Theorem* فإذا فرضنا أن دالة الإنتاج المتجانسة تأخذ الصورة العامة الموضحة بالدالة السابقة فإننا نجد أن نظرية أويلر تشير إلى:

$$Yn = \frac{\partial Y}{\partial X_1} X_1 + \frac{\partial Y}{\partial X_2} X_2$$

أي أن:

$$Yn = MPP_{x_1} X_1 + MPP_{x_2} X_2$$

وفي الدالة المتجانسة من الدرجة الأولى نجد أن:

$$Y = X_1 MPP_{x_1} + X_2 MPP_{x_2}$$

تشير X_2, X_1 إلى موارد الإنتاج، MPP إلى الناتج الحدي للمورد في حين تشير y الى الناتج الكلي.

ولإشتقاق نظرية أويلر من الدوال المتجانسة نفترض أنه لدينا الدالة المتجانسة من نوع كوب دوجلاس التالية:

$$Y = \beta_o X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2}$$

حيث:

β_1, β_2 = مرونة إنتاج المورين X_1, X_2 على الترتيب، وبمعنى آخر نجد أن:

$$\beta_1 = \frac{MPP_{x_1}}{APP_{x_1}}$$

$$\beta_2 = \frac{MPP_{x_2}}{APP_{x_2}}$$

هذه الدالة المشار إليها هي دالة متجانسة من الدرجة n حيث:

$$n = \beta_1 + \beta_2$$

أي أن:

$$n = \frac{MPP_{x_1}}{APP_{x_1}} + \frac{MPP_{x_2}}{APP_{x_2}}$$

أو بمعنى آخر:

$$n = MPP_{x_1} / \left(\frac{Y}{X_1}\right) + MPP_{x_2}\left(\frac{Y}{X_2}\right)$$

فإن:

$$n = \frac{MPP_{x_1}}{Y} X_1 + \frac{MPP_{x_2}}{Y} X_2$$

أي أن:

$$Yn = MPP_{x_1} X_1 + MPP_{x_2} X_2$$

حيث تشير APP إلى الناتج المتوسط الفيزيقي للمورد، MPP تشير إلى الناتج الحدي الفيزيقي للمورد.

وتضيف نظرية أويلر أنه فيما يتعلق بالدوال المتجانسة من الدرجة الأولى (n=1) أنه إذا دُفع لكل مورد إنتاجي بما يوازي قيمة ناتجه الحدي فإن المدفوعات للموارد تساوي الإيراد الكلي أي أن:

$$TR = (MPP_{x_1} P_y) X_1 + (MPP_{x_2} P_y) X_2$$

أي أن:

$$TR = VMP_{x_1} X_1 + VMP_{x_2} X_2$$

حيث تشير TR إلى الإيراد الكلي، بينما تشير VMP إلى قيمة الناتج الحدي وهي تساوي الإنتاجية الحدية (MPP) للمورد مضروبة في سعر الوحدة من الناتج (P_y).

ويشير غلاإقتصاديون إلى أن نظرية أويلر أوضحت الأجر الذي يجب دفعه لمورد الإنتاج إذ يجب أن تكون قيمة خدمة المورد مساوية لقيمة ناتجه الحدي حتى لايحدث إستغلال لهذه الموارد.

ثالثاً: الدالة المتجانسة من الدرجة n يتصف معـاملها التفاضلي الأول بالتجانس من الدرجة $(n\text{-}1)$

ولإثبات هذه الخاصية نفترض أن الدالة التالية متجانسة من الدرجة n .

$$f(kX_1, kX_2) = k^n f(X_1, X_2)$$

بأخذ التفاضل الجزئي لطرفي المعادلة فيما يتعلق بالمتغير X_1 مثلاً نجد أن:

$$\frac{\partial f(kX_1, kX_2)}{\partial X_1} = \frac{\partial k^n f(X_1, X_2)}{\partial X_1}$$

و

$$kf_1(kX_1, kX_2) = k^n f_1(X_1, X_2)$$

وبقسمة الطرفين على k ينتج أن:

$$f_1(kX_1, kX_2) = k^{n-1} f_1(X_1, X_2)$$

ويتضح أن المعامل التفاضلي الأول للدالة المتجانسة من الدرجة n ينتج دالة متجانسة من الدرجة (n-1) حيث أن f_1 تشير إلى المعامل التفاضلي بالنسبة للمتغير X_1.

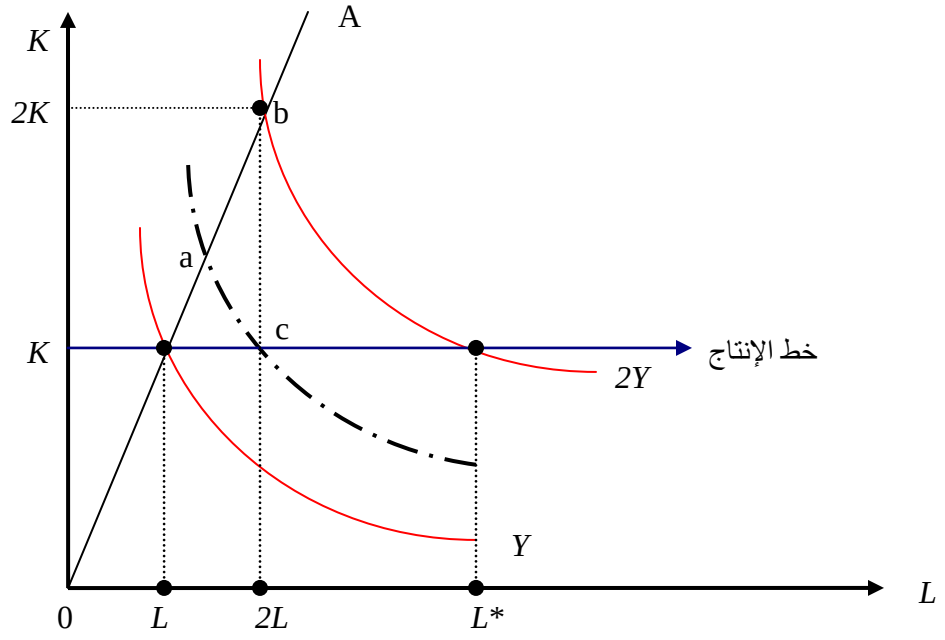
قانون النسب المتغيرة

The Law of Variable Proportions

رغم أن تحليلنا في هذا الفصل يختص بالمدى الطويل فإن هناك بعض الموضوعات المهمة مثل قانون النسب المتغيرة الذي يرتبط إرتباطاً وثيقاً بموضوعات هذا الفصل وجب مناقشته في حينه وفي هذا المكان.

ويختص قانون النسب المتغيرة بالعلاقة بين عائد السعة والعائد على الموارد، فمثلاً نجد أنه إذا كان لدينا موردان كالعمل L و رأس المال K مع ثبات المورد الأخير فما هو شكل العلاقة عندما تتصف دالة الإنتاج لهذين المتغيرين بالتجانس بين عوائد السعة و العائد على المورد المتغير L عندما يتم تثبيت المورد الآخر وهو رأس المال K؟.

وللإجابة على هذا السؤال من خلال الشكل رقم (١٢,١) التالي:



شكل رقم (١٢,١) تناقص الإنتاجية الحدية للمورد المتغير مع ثبات عوائد السعة

ذلك أن خط الإنتاج *Product Line* يوضح كيفية الإنتقال من منحنى إنتاج إلى منحنى آخر عندما يكون المورد ان متغيرين أو عندما يكون أحدهما فقط متغير، أي بمعنى آخر فإن خط الإنتاج هو ذلك الخط الذي يربط توليفات الموارد التي تعطي مستويات مختلفة من النواتج وهو هنا يختلف عن الممر التوسعي الأمثل أو خطوط التوسع *Isoclines* إذ لاعلاقة لخطوط الإنتاج بأسعار الموارد كما في خطوط التوسع ولايضم بالضرورة النقاط التي لها معدل الإحلال نفسه وإن حدث فيعد أحد تلك الخطوط التي أطلقنا عليها خطوط *Isoclines* وهي خطوط أكثر ماتوضح هو كيفية ربط موارد الإنتاج التي قد يكون أحدهما ثابتاً لتحقيق مستويات إنتاجية مختلفة.

وخط الإنتاج في الشكل أعلاه يوضح كيفية ربط موارد الإنتاج عندما يكون أحدهما متغيراً و الآخر ثابتاً لإنتاج قدر معين من الناتج. وحيث أن مورد رأس المال هو الثابت فإن خط الإنتاج يتخذ الشكل الأفقي الموازي لمحور المورد المتغير مشيراً إلى أن نسبة رأس المال إلى العمل $\frac{K}{L}$ تتناقص باستمرار على طول خط الإنتاج هذا.

وأمام ثبات مورد رأس المال وتغير مورد العمل فإن الإنتاجية الحدية للمورد المتغير (العمل) سوف تنخفض بعد بلوغ الإنتاج مستوى معسن. ويحدث هذا عموماً في دوال الإنتاج المتجانسة سواء كانت عوائدها تتسم بالثبات أو التناقص أو التزايد. ورغم ذلك فإنه إذا كانت دوال الإنتاج تتسم بتزايد عوائد السعة فإن تناقص العائد الراجع لتناقص الإنتاجية الحدية للمورد المتغير(العمل) يعمل في إتجاه مضاد للعائد المتزايد للسعة وغالباً ما تتفوق الإنتاجية الحدية المتناقصة للمورد المتغير على عائد السعة المتزايد.

ولتوضيح قانون النسب المتغيرة أو مايطلق عليه أحياناً قانون تناقص الإنتاجية الحدية فإنه يمكن القول أنه إذا كانت دالة الإنتاج متجانسة مع ثبات عائد السعة لكل مستويات الناتج فإن العائد على المورد المتغير يكون متناقصاً.

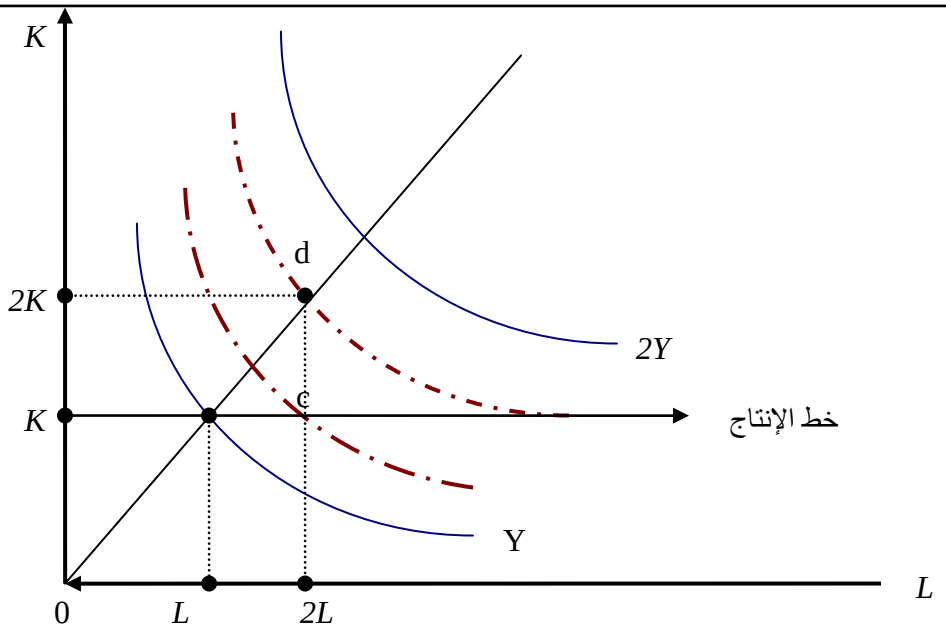
ويعبر عن ذلك عادة بتحدب منحنيات سواء الإنتاج وسالبية ميلها. ومع ثبات عوائد السعة فإن مضاعفة الموارد $(2L,2K)$ يضاعف الناتج أيضا، ففي الشكل السلبق نجد أن النقطة b على خط تساوي معدلات الإحلال (*Isocline*) OA وتقع على خط سواء الإنتاج $2Y$. لكن عند ثبات K (عند

مستوى $\overline{K}$) وتم مضاعفة العمل فقط $(2L)$ فإننا نصل إلى النقطة C التي تقع على منحنى سواء الإنتاج أقل من $2Y$ ومن ثم إذا أردنا أن نحصل على ضعف الإنتاج $(2Y)$ مع القدر الثابت من K وهو $\overline{K}$ يجب تشغيل القدر L^* من مورد العمل الذي هو بالطبع أكبر من $(2L)$.

بمعنى آخر فإنه في ظل ثبات مورد رأس المال فإنمضاعفة مورد العمل لاتؤدي إلى مضاعفة الناتج ويرجع ذلك إلى تناقص الإنتاجية الحدية للمورد المتغير (العمل).

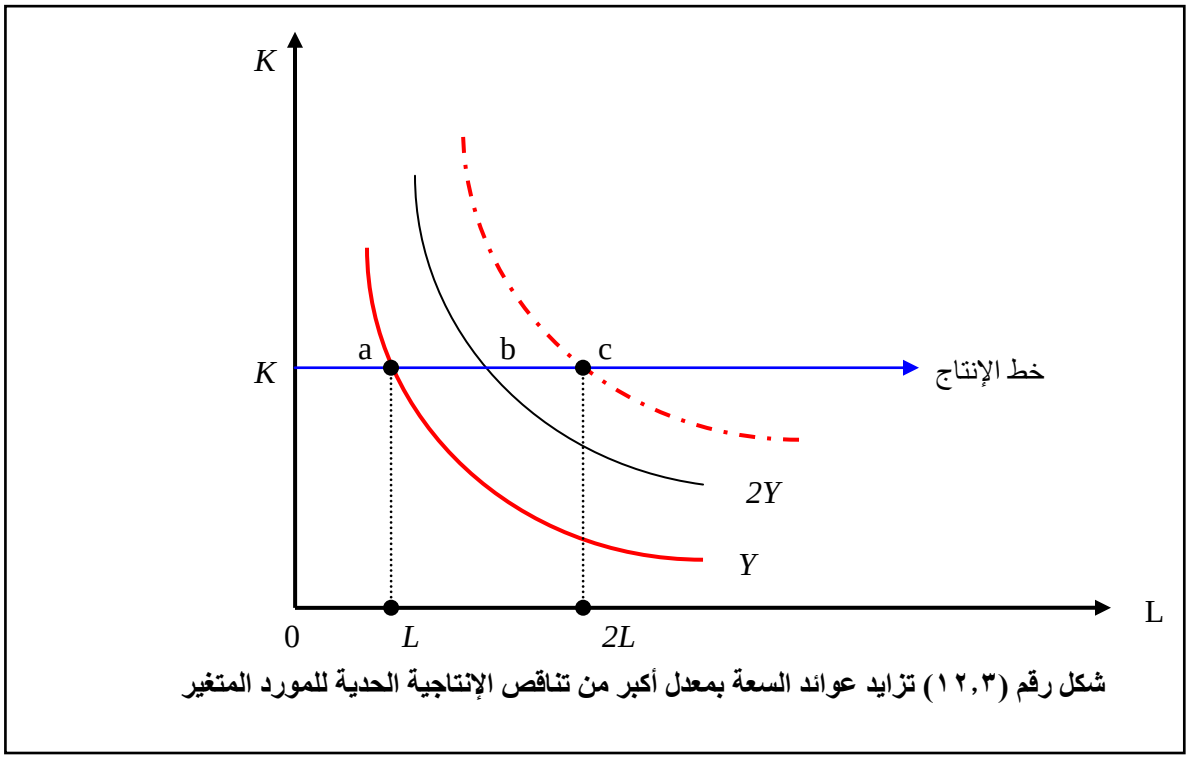
وفي حالة ما إذا كانت دالة الإنتاج متجانسة مع تناقص عائد السعة فإن العئد لمورد الإنتاج المتغير (مع ثبات العوامل الأخرى) ستكون متناقصة، لأن مع تناقص عوائد السعة فإن مضاعفة الموارد تعطي أقل من ضعف الناتج.

وفي الشكل رقم (١٢،٢) التالي يتضح أن $2L$ مع $2K$ فإن الناتج يصل إلى النقطة d التي تقع على منحنى سواء أقل من $2Y$ ، ولهذا فإن مضاعفة العمل فقط $(2L)$ مع ثبات رأس المال K يجعل الناتج يصل إلى C التي مازالت تقع على منحنى سواء إنتاج أقل من $2Y$.



شكل رقم (١٢،٢) تناقص الإنتاجية الحدية للمورد المتغير مع تناقص عوائد السعة

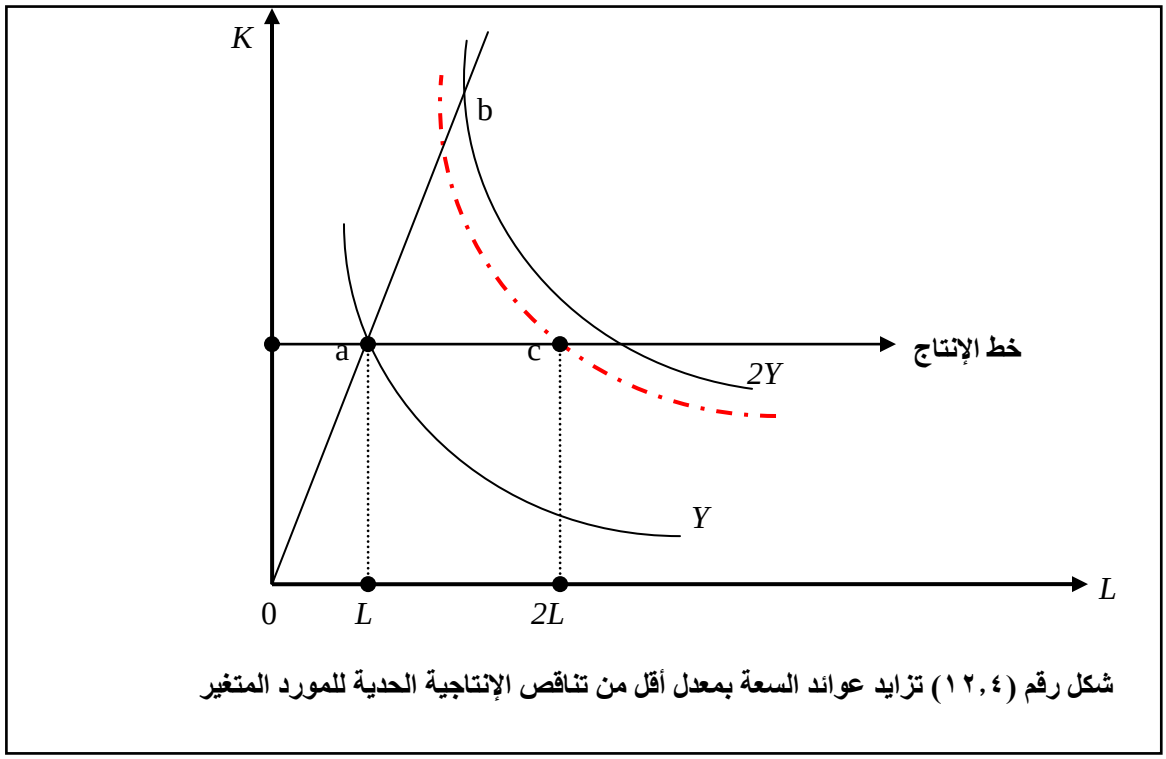
أما إذا كانت دوال الإنتاج متجانسة و عائد السعة متزايد فإن عائد المورد المتغير مع ثبات العوامل الأخرى تتوقف قيمته على أيهما أقوى من الآخر. فإذا كان عائد السعة أكبر من المورد (المتناقص) فإن مضاعفة مورد الإنتاج المتغير مع ثبات العوامل الأخرى سوف تؤدي إلى ناتج يفوق الضعف (أكبر من $2Y$) كما في الشكل رقم (١٢,٣) التالي)



شكل رقم (١٢,٣) تزايد عوائد السعة بمعدل أكبر من تناقص الإنتاجية الحدية للمورد المتغير

ويتضح من الشكل (١٢,٣) أعلاه أن مضاعفة المورد المتغير (العمل) إلى ($2L$) مع ثبات كمية رأس المال $\overline{K}$ أدت إلى الحصول على قدر أكبر من مضاعفة الناتج (أكبر من $2Y$) وذلك راجع إلى أن أثر تزايد عوائد السعة على الناتج أقوى من أثر تناقص الإنتاجية الحدية للمورد المتغير وهذا نادر الحدوث.

وإذا كانت الدالة المتجانسة تتسم بتزايد عوائد السعة ولكن الأثر المضاد الناتج من تناقص الإنتاجية الحدية للمورد المتغير مع ثبات العوامل الأخرى أكبر من أثر عائد السعة المتزايد فإن مضاعفة مورد الإنتاج المتغير سوف يؤدي إلى الحصول على أقل من ضعف الناتج كما هو موضح بالشكل رقم (١٢,٤) التالي " وهو شائع علمياً"



شكل رقم (١٢,٤) تزايد عوائد السعة بمعدل أقل من تناقص الإنتاجية الحدية للمورد المتغير

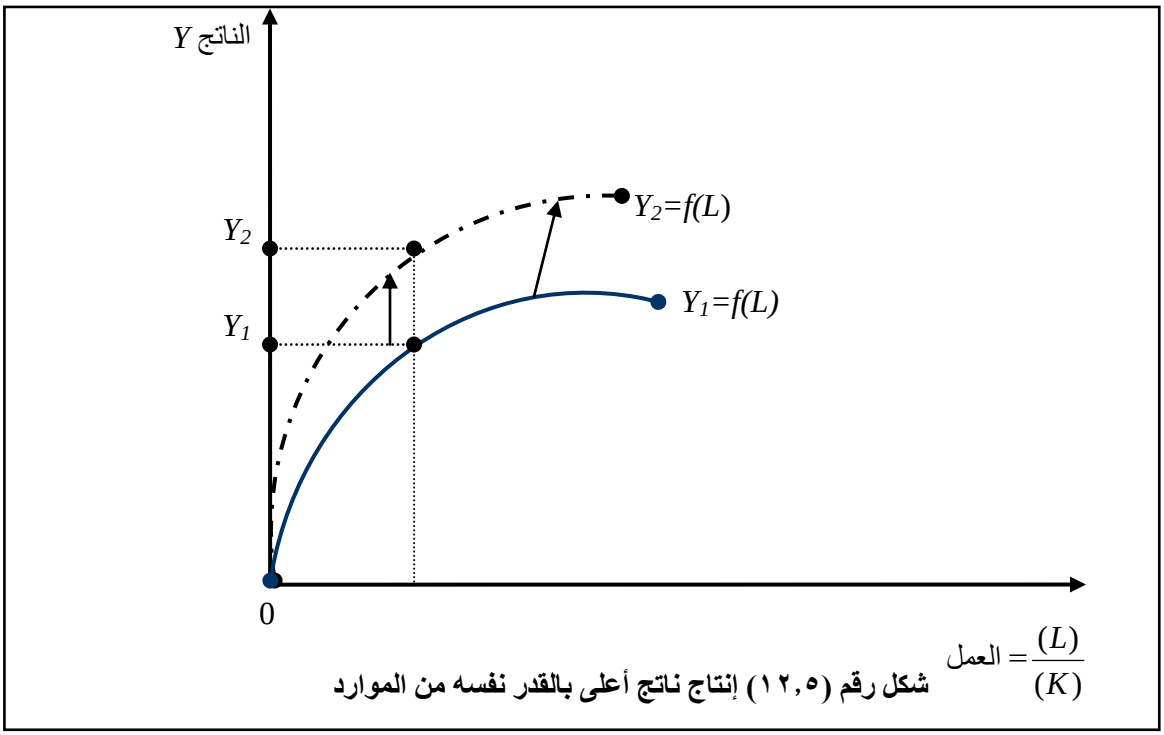
ويتضح من الشكل (١٢,٤) أعلاه أن الإنتاجية الحدية المتناقصة لمورد العمل تفوق أثر تزايد عائد السعة ولهذا فإن مضاعفة المورد المتغير مع ثبات رأس المال لايؤدي إلى مضاعفة الناتج أي أن $(2L)$ مع ثبات K يعطي أقل من $2Y$ كما هو موضح بالشكل.

الـــــــتقدم الـــــــتقني ودوال الإنـــــــتاج

Technical Progress and the Production Function

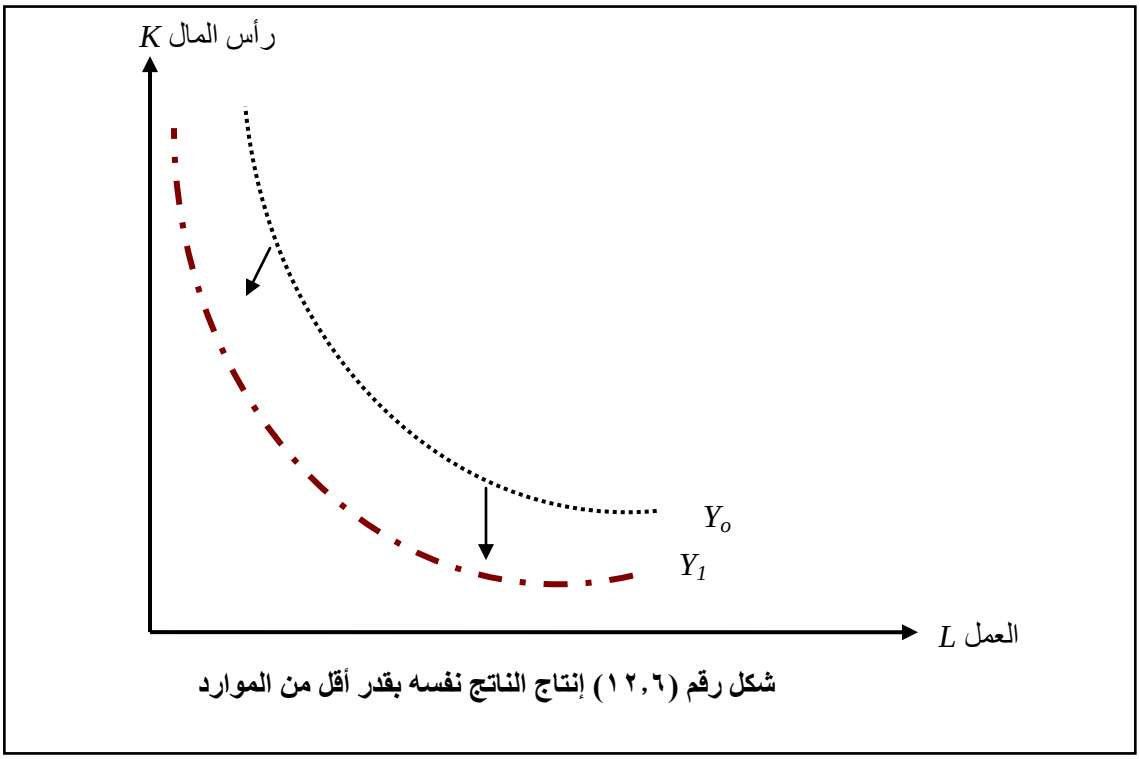
يعرف التقدم التقني بأنه كل مامن شأنه أن يؤدي إلى زيادة كفاءة طرق الإنتاج مثل الإختراعات الحديثة كالآلات التي تقوم بأداء العمليات الزراعية بطريقة أكثر كفاءة. كذلك البذور المستخدمة و التهجينات ومنظمات النمو...ألخ وكلها عوامل تؤدي إلى زيادة كفاءة العملية الإنتاجية.ويؤدي التقدم التقني إلى إنتقال دالة الإنتاج التقليدية إلى أعلى أو إنتقال منحنى سواء الإنتاج إلى أسفل تجاه نقطة الأصل كما هو موضح بالأشكال التالية:

يوضح هذا الإنتقال في دوال الإنتاج إلى إمكانية الحصول على ناتج أعلى بالقدر نفسه من الموارد



شكل رقم (١٢,٥) إنتاج ناتج أعلى بالقدر نفسه من الموارد

أو تحقيق القدر نفسه من الناتج بقدر أقل من الموارد



شكل رقم (١٢,٦) إنتاج الناتج نفسه بقدر أقل من الموارد

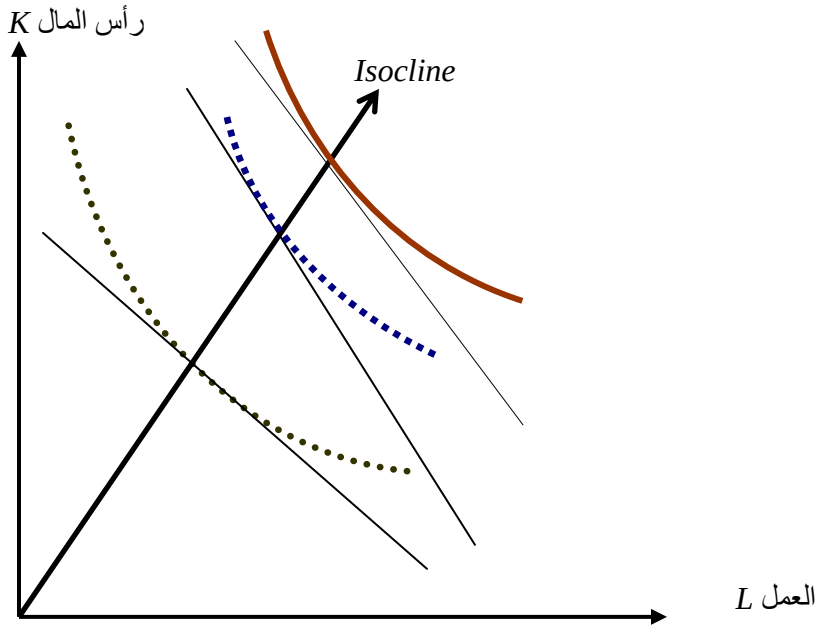
هذا وتجدر الإشارة إلى أن التقدم التقني قد لايؤدي فقط إلى إنتقال الدالة بل قد يغير من ميلها.

وفي هذا الخصوص هناك ثلاث حالات للتقدم التقني معتمدة على معدل الإحلال لموارد الإنتاج وهي:

١- تـــقدم تـــقني لـــتكثيف رأس الـمال

Capital – Deepening Technical Progress

يوصي التقدم التقني بتكثيف رأس المال (باستعمال المزيد من رأس المال) عندما يزداد المعدل الحدي للإحلال التقني لموارد رأس المال محل العمل على طول الخط الذي تكون نسبة رأس المال فيه إلى العمل ثابته. هذا يعني أن التقدم التقني يؤدي إلى زيادة الإنتاجية الحدية لرأس المال عن الإنتاجية الحدية لمورد العمل، مما يؤدي إلى أن منحنى سواء الإنتاج المنتقل يكون أقل ميلاً عند تقاطع هذا المنحنى مع الخط الواصل من نقطة الأصل والذي يمر بنقاط تساوي نسبة $\left(\frac{K}{L}\right)$ وهذا يعني أن المزيد من إستخدام رأس المال سوف يؤدي إلى زيادة أكبر في الإنتاج عن زيادة العمل.

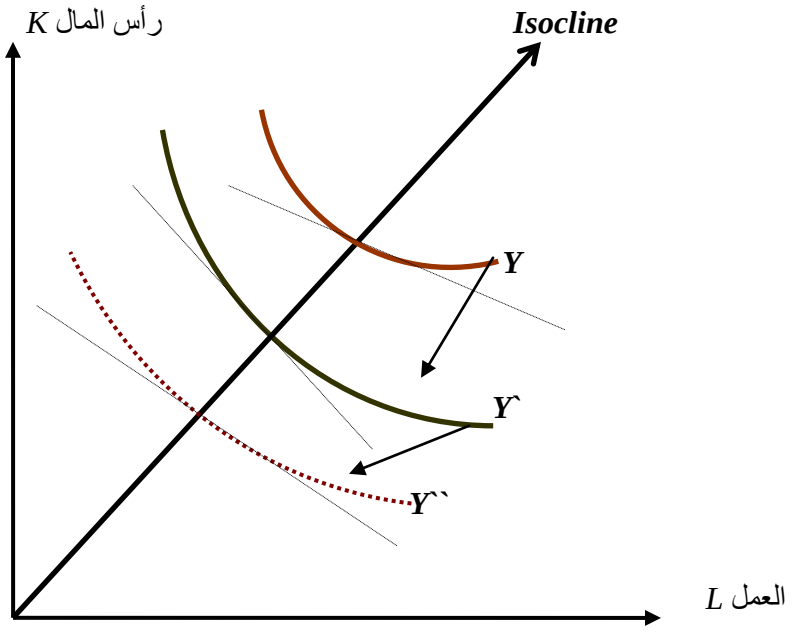


شكل رقم (١٢,٧) تقدم تقني-تكثيف رأس المال

٢- تـــقدم تـــــقني – تــكثيف الــعمالة

Labour– Deepening Technical Progress

يعد التقدم التقني- تكثيفاً للعمالة إذا كان معدل الإحلال الحدي التقني للعمالة محل رأس المال (MRS_{LK}) يزداد على طول الخط الخارج من نقطة الأصل و الذي يتساوى فيه إحلال رأس المال محل العمل $\left(\frac{K}{L}\right)$. وهذا يعني أن التقدم التقني يزيد من الإنتاجية الحدية لعنصر العمل البشري ويوصي باستخدام المزيد منه، وكما هو موضح بالشكل رقم (١٢,٨) التالي نجد أنه نتيجة لهذا التقدم تصبح منحنيات سواء الإنتاج المنتقلة تجاه نقطة الأصل أكثر ميلاً.

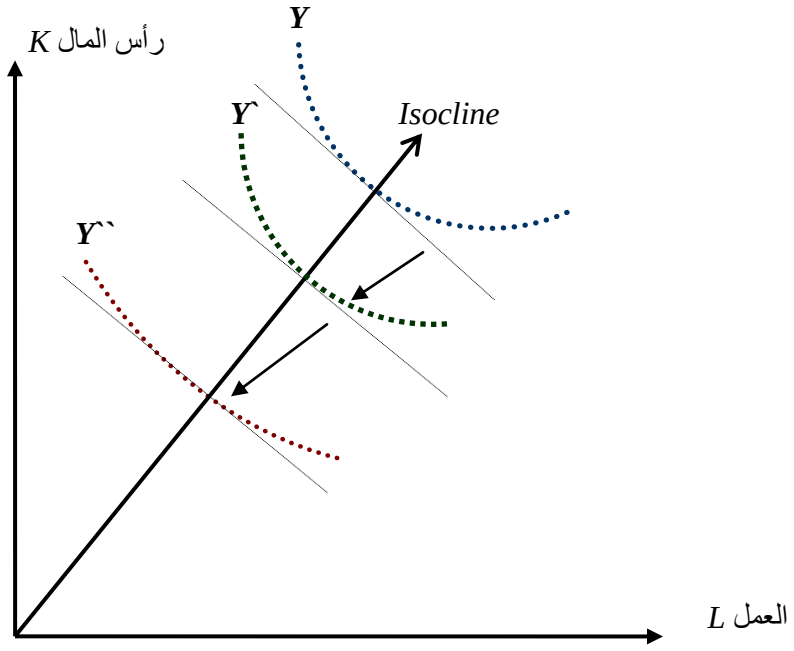


شكل رقم (١٢,٨) تقدم تقني-تكثيف العمل البشري

٣- تـــــقدم تـــــقني مـــــــحايد

Neutral Technical Progress

التقدم التقني المحايد يؤدي إلى زيادة الإنتاجية الحدية للموردين كليهما(العمل ورأس المال) بالمعدل نفسه وعلى هذا فإن المعدل الحدي للإحلال التقني بين العمل و رأس المال (MRS_{LK}) على الممر الخارج من نقطة الأصل يظل ثابتاً. في حين تنتقل منحنيات سواء الإنتاج جهة نقطة الأصل موازية لنفسها كما هو موضح بالشكل رقم (١٢,٩) التالي:



شكل رقم (١٢,٩) تقدم تفني محايد