حل الإختبار الثاني | الثلاثي الثالث 1444 هـ | 481 ريض

السؤال 1 :

1. المتتالية $(\dfrac{1}{n+x})_n$ تناقصية و نهايتها صفر و تتقارب بانتظام. إذاً المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{n+x}$ تتقارب بانتظام على $x\in[0,+\infty)$.

   لتكن $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

2. بما أن المتتالية $(\dfrac{1}{n+x})_n$ تناقصية، فإن $-1\leq f(x)\leq 0$ لكل $x\in[0,+\infty)$.

3. الدوال $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n+x}$ قابلة للإشتقاق مشتقاتها متصلة و $f_n'(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ و المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ تتقارب بانتظام لأن $|f_n'(x)|\leq\dfrac{1}{(n+x)^2}\leq\dfrac{1}{n^2}$. إذاً الدالة f قابلة للإشتقاق على الفترة $[0,+\infty)$.

4. احسب $f(x+1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1+x}=-\sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x}=-f(x)+\dfrac{1}{x+1}$ و بالتالي يمكن تمديد الدالة كدالة قابلة للإشتقاق على $(-1,+\infty)$.

5. و بالإستقراء يمكن تمديد الدالة كدالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{-n : n\in\mathbb{N}\}$.