حل الإختبار الأول　　الثلاثي الثالث 1444 هـ　　481 ريض

السؤال 1 :

1.

2. $\displaystyle \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\sinh^{-1}(1)$,

3.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1}\sqrt{j(n-j)} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sqrt{\frac{j}{n}(1-\frac{j}{n})}=\int_0^1\sqrt{x(1-x)}dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-(2x-1)^2}dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}dt\\ &= \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2\theta))d\theta=\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

السؤال 2 :

1. بجوار 0 التكامل متقارب إلا وإذا كان $\alpha>0$.
بجوار $+\infty$ التكامل متقارب إلا وإذا كان $\alpha<1$.

2. $\displaystyle \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}dx \overset{x=\tan^{-1}t}{=} \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}dt$ وهذا التكامل متقارب.

السؤال 3 :

لتكن $f_n(x)=n^2x(1-x)^n$.

1. $(f_n)_n$ متقاربة إلا وإذا كان $x\in[0,2)$ و $\displaystyle \lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$.

2. نكامل بالتجزيء
$\displaystyle \int_0^1 f_n(x)dx=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$ إذاً المتتالية (f_n) لا تتقارب بانتظام على الفترة $[0,2[$.