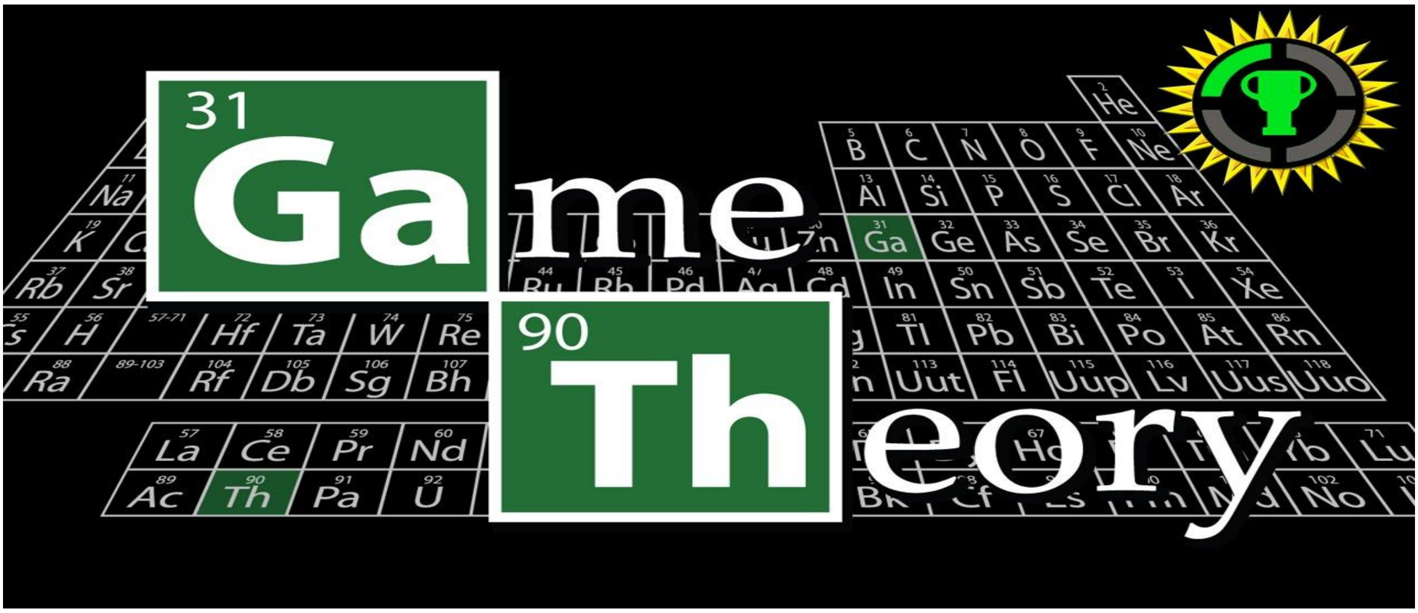
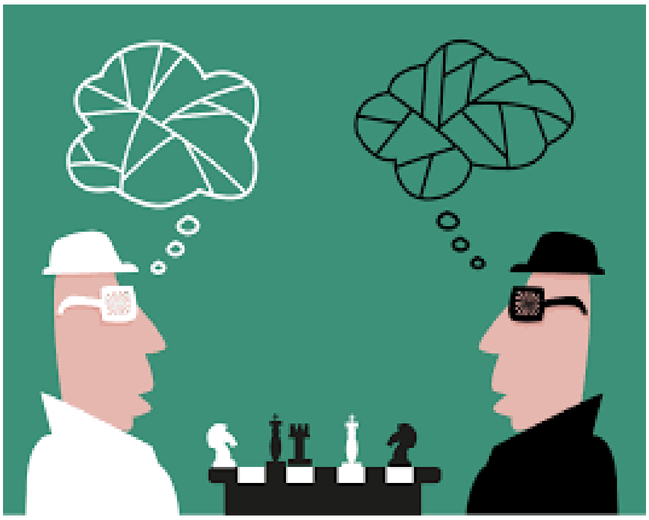
OPER 385
385 بحث

نظرية القرار ات و المباريات





1 - المدخل إلى نظرية المباريات

أهمية نظرية المباريات

تعتبر نظرية المباريات إحدى الوسائل الحديثة التي تستخدم لاتخاذ القرارات في الحالات والمواقف التي تتميز بوجود الصـراع بين الوحدات المتنافسـة المسـتقلة ، سـواء كانت أفراداً أو تنظيمات ، حيث لا يســتطيع متخذ القرار أن يســيطر بشــكل كامل على العوامل المؤثرة في النتائج التي يستطيع الحصول عليها من قراره . إن الميزة الأساسية التي تحدد فيما إذا كان هؤلاء الأفراد (أو تلك التنظيمات) تواجه مباراة أو صراع هو وجود طرف آخر تتناقض أهدافه ومصالحه مع هؤلاء الأفراد (أو تلك التنظيمات) فمثلاً إذا وجدت شركة تحتكر سلعة معينة لا ينافسها فيها أحد فلا ينشأ الصـراع إلا إذا دخلت السـوق شـركة أخرى تنافس هذه الشـركة على نفس السـلعة . وتعتبر نظرية المباريات أحد أهم طرق الرياضـيات التطبيقية المستخدمة لحل مسائل الأعمال والاقتصاد والمسائل العسكرية وعلوم الحياة الأخرى التي تتضمن التنافس بين طرفين أو أكثر.

ويتلخص مفهوم نظرية المباريات بوجود لعبة محددة لها هدف نهائي يســعى من أجله كل لاعب ومن خلال مراحل خاصـة يتم اختيارها حسب قوانين المباراة وأسلوبها حيث يحاول كل لاعب في هذه المباراة القيام بأفضـل أداء ممكن للحصـول على أفضـل العوائد . وتكمن الصـعوبة هنا في أن كلاً من المتنافسـين يرغب بجعل عوائده أفضـل ما يمكن مع مراعاة ردود فعل الأطراف المنافسـة الأخرى .

إن النماذج الأكثر بسـاطة لمسـائل المباريات والمنافسـة هي الألعاب الرياضـية المختلفة وألعاب الشـطرنج وورق اللعب والدومينو وغيرها . وهناك شـبه كبير بين المشـاركين في مثل هذه الألعاب وبين سـلوك المتحاربين لاحتلال موقع معين أو سـلوك المتنافسـين في سـوق معينة ، وهذا الشـبه أدى إلى تعميم لفظ لعبة أو مباراة بحيث يشــمل جميع الأوضــاع **الاجتما**عية والاقتصــادية والسياسية والعسكرية وغيرها من الأوضاع التي تتضمن تنافس أو تعاكس مصالح ، كما أدى هذا الشبه إلى بروز المباريات للتعبير عن مجمل الطرائق الرياضية التي تناقش وتحلل هذه المباريات .

تعاريف ومفاهيم أساسية :

اللعبة (Game) : هي مجموعة قواعد تحدد ما يجب أو يســتطيع أن يفعله اللاعب هذه القواعد تعرّف المعلومات المتوافرة لدى كل لاعب وعدد الخطوات ونهاية المباراة التي يأخذها أو يعطيها أي لاعب .... الخ .

قواعد اللعبة (Game rules): هي مجموعة من القواعد الموضــوعة مســبقاً والتي تحدد جميع التحركات في هذه اللعبة والعوائد المقابلة لها .

المباراة Play : هي تطبيق خاص لقواعد اللعبة يؤدي في النهاية إلى نتيجة معينة . يتم دفع العوائد أو المدفوعات payments التي تأخذ صورة تحقيق هدف معين أو كسب عدد من النقاط ... الخ .

اللاعب player : هو وحدة مستقلة لاتخاذ القرار وليس من الضروري أن يكون اللاعب شخصاً فرداً وإنما قد يكون شركة أو مؤسسة أو فريقاً أو جيشاً أو دولة .

العــــــائد Payoff : لكل لعبة عائد معين يتم التعبير عنه على شكل ربح أو خسارة أو منفعة (utility) وهذا العائد له علاقة بالاستراتيجيات التي يتم اختيارها من كافة اللاعبين .

الخطوة move : هي النقطة التي يتوجب فيها على اللاعــب اتخـــاذ قرار الاختيار (البديل) وهناك نوعين من الخطوة :

1. الخطوة الشخصية Personal move : هي اختيار مدروس وواعي لأحد البدائل المتاحة أمام اللاعب .
2. الخطوة العشــوائية Chance move : هي اختيار غير واعي لأحد البدائل المتاحة أمام اللاعب وذلك طبقاً لتوزيع احتمالي معين بواسطة قواعد المباراة .

ونقول عن المباراة أنها بمعلومات كاملة (Perfect Information) إذا كانت الخطوات شخصية مثل لعبة الشـطرنج ونقول عن المباراة أنها بمعلومات غير كاملة (Imperfect Information) إذا كانت الخطوات عشـــوائية مثل لبعة الدومينو . وبتعبير آخر : تكون المباراة ذات معلومات كاملة إذا كان بمقدور اللاعبين أن يعرفوا جميع الخطوات التي وقعت مسبقاً .

الإســـتراتيجيـة(أو الخطـة) Strategy : هي مجموعـة من الخطوات التي تصـــف تحركات المتنافسين والتي سيقومون بها خلال المباراة . وهي معيار قراري تأخذ بالحسبان مجموعة القواعد التي تحدد اختيار اللاعب في كل خطوة يخطوها في المباراة .

وهناك نوعين من الاستراتيجيات :

1 . الإستراتيجية الصرفة أو الخالصة أو البحتة Pure strategy

وهي الإســـتراتيجية التي يمارســـها اللاعب طوال وقت المباراة أو المعيار القراري الدائم لاختيار نفس طريقة اللعب طوال المباراة .

2 . الإستراتيجية المختلطة أو المركبة Mixed strategy

حل المباراة : هو إيجاد الإستراتيجية أو الإستراتيجيات (خالصة أو مختلطة(*)) . (*) سيأتي التعريف في الفصل الثاني) والتي تحقق أفضل العوائد لكل من الأطراف المتنافسة.

تصنيف المباريات

تصـنيف المباريات عادة إما حسـب عدد اللاعبين المشـاركين في المباراة أو عدد الاسـتراتيجيات أو حسب نتيجة المباراة أو حسب طبيعة المباراة .

- فحسب عدد اللاعبين تقسم إلى نوعين :

1 . مباراة ذات شخصين : أي أن عدد المشاركين (اللاعبين) في المباراة اثنان فقط .

2 . مباراة متعددة الأطراف : أي أن عدد المشــاركين (اللاعبين) في المباراة أكثر من اثنين .

- وحسب الاستراتيجيات تقسم المباريات إلى نوعين أيضاً :

1 . مباراة محددة : وهي المباراة التي يكون فيها عدد الاســـتراتيجيات المتاحة أمام كل لاعب محدوداً .

2 . مباراة مستمرة (غير محددة) : وهي المباراة التي يكون فيها عدد الاستراتيجيات المتاحة أما كل لاعب غير محدود أي لا نهائياً .

- أما حسب نتيجة المباراة فتقسم إلى نوعين أيضاً :

1 . مباراة ذات مجموع صـفري : وهي المباراة التي يكون فيها ربح اللاعب الأول يســـــاوي تماماً خسارة اللاعب الآخر أو التي يكون فيها مجموع القيم المتبادلة ثابتاً .

2 . مباراة ذات مجموع غير صـــفري : وهي المباراة التي يكون فيها ربح أحد اللاعبين لا يساوي خسارة اللاعب الآخـر وإنما يمكن أن يخسر الطرفين أو يكسبا نتيجة المباراة أو يمكن أن يكسب أحدهما ويخسر الآخر . ويمكن أن تقوم مثل هذه المباريات على أساس التنافس أو التعاون بين اللاعبين .

- أما حسب طبيعة المباراة فتقسم إلى نوعين هما :

1 . مباريـات غير تعـاونية (Non-cooperative) : حيث لا يوجـد أي تنسيق أو تعاون أو تفاوض بين اللاعبين ويسعى كل لاعب عندها لجعل عوائده أكبر ما يمكن .

2 . مباريـات تعـاونية (Cooperative) : حيث يمكن أن يوجد تنسيق أو تعاون أو تفاوض بين اللاعبين يؤول إلى زيادة العوائد الكلية أو العوائد المتوقعة لكل منهم .

1-1 شـــجرة المباراة (Game tree) – الإســـتراتيجية الخالصـــة (Pure strategy) – مصفوفة المباراة (Game matrix)

شـجرة المباراة (Game tree) : هي شـجرة تشـبه شـجرة القرار ونضـع فيها جميع اختيارات اللاعب الذي يبدأ اللعب في المرحلة الأولى (وســنســميه اللاعب الأول) ومقابل كل من هذه الخيارات نضــع اختيارات اللاعب الآخر للمرحلة الأولى ومقابل هذه الخيارات الأخيرة نضــع كل الخيارات اللاعب الأول (الذي بدأ اللعبة) للمرحلة الثانية إن وجدت وهكذا ... فنحصـــل على شكل أشبه بالشجرة ثم نضع مقابل كل فرع نهائي لهذه الشجرة عوائد اللاعبين على الشكل (a, b) بحيث أن a هي عائد (payoff) اللاعب الأول و b عائد اللاعب الثاني .

الشكل العادي و مصفوفة المباراة (Normal form and Game matrix) :

إذا كان عددالإســتراتجيات اللاعب A هي m ولتكن A_i أحد تلك الإســتراتجيات حيث $i = 1, 2, \ldots, m$ وعدد اســتراتيجيات اللاعب B هي n ولتكن B_j أحد تلك الإســتراتجيات حيث $j = 1, 2, \ldots, n$ فــإننا نشـــكل جدول من m ســـطر و n عمـــود نضع فيه العــوائد المقابلة للاستراتيجيات (A_i , B_j) و يسمى بــــــ " **الشكل العادي** " أو " **مصفوفة المباراة** "(**Game matrix**) أو **مصفوفة العوائد** " (**Payoff matrix**) .

1 – 2 أمثلة توضيحية

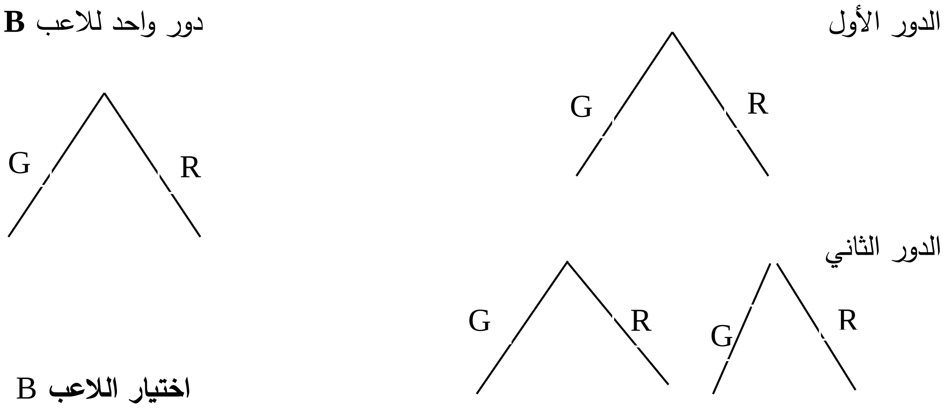
مثال 1 . 1 : يتبارى شخصان (لاعبان) في اللعبة التالية :

يقوم اللاعب الأول باختيار أحـــد اللونين أخضر أو أحمـــر ودون يعلن عن اختياره ، ثم يقوم اللاعب الثاني باختيار أحـــد اللونين أخضر (G) أو أحمر (R) لكنه لا يعلن عن اختياره (يبقى صامتاً) . يعود بعدها اللاعب الأول إلى اختيـار أحد اللونين أخضـر أو أحمـر فإذا كانت الخيارات متطـابقة الألوان فإن اللاعب الأول يربح 1 $ من اللاعب الثاني و إلا فإن اللاعب الثاني يربح 1 $ من اللاعب الأول .

نلاحــظ أن هــذه اللعبة هي لعــبة ذات شخصين وذات مجمـــوع صفري Two Zero-sum Game إذ أن ما يربحه أحد اللاعبين يساوي تماماً ما يخسره اللاعب الآخر . كما نلاحظ أنه قد تم تحديد قواعد اللعبة ، وسوف نقوم بدراسة وتحليل هذه المباراة من خلال تحديد كلاً مما يلي .

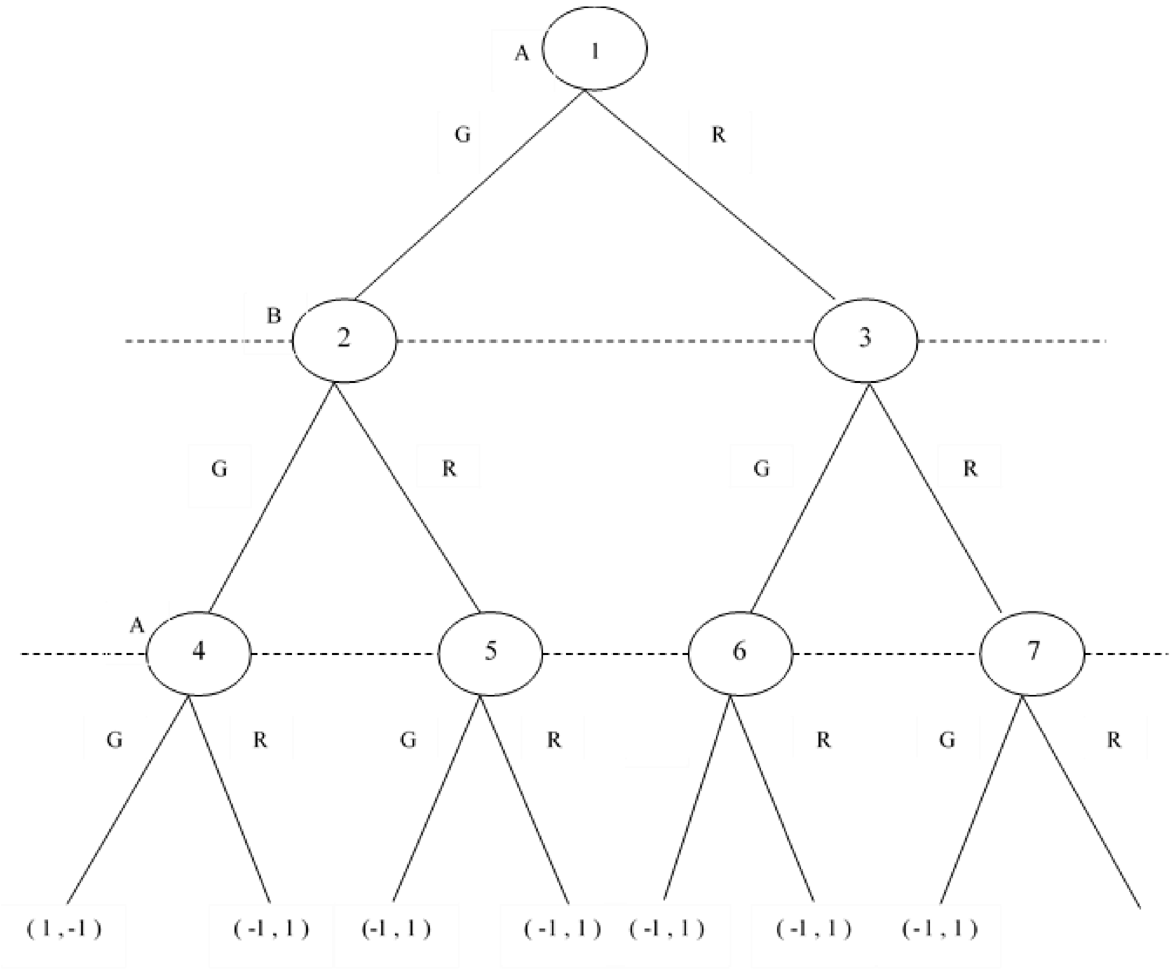
الاستراتيجيات :

نلاحــظ أن اللاعــب الأول يلعب على مرحلتين (دورين) يختار في المرحلة الأولى G أو R ويختار في المرحلة الثانية كذلك G أو R . أما اللاعب الثاني فيلعب مرحلة واحــدة يخـــتار فيها G أو R . ويمكن تمثيل اختيـارات اللاعبين كما في الشكل التالي:



اختيار اللاعب B

اختيار اللاعب A



شجرة المباراة لمثال (1. 1)

أما الاستراتيجيات الخالصة لكل لاعب فسوف نحددها حسب عدد الأدوار و الخيارات المتاحة لكل لاعب. الاستراتيجيات الممكنة للاعب A و نرمز لها بــ A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 (الجدول1) و استراتيجيات اللاعب B ، ونرمز لها بـ B_1 و B_2 (الجدول 2).

	الـــــدور الأول	الـــــدور الثاني
A_1	اختيار **G**	اختيار **G**
A_2	اختيار **G**	اختيار **R**
A_3	اختيار **R**	اختيار **G**
A_4	اختيار **R**	اختيار **R**

الجدول 1

	دور واحد
B_1	اختيار **G**
B_2	اختيار **R**

الجدول 2

وشـجرة المبـاراة لهذا المثال هي كما في الشكل **(1 . 1)** . نكون جدول عوائد اللاعبين. يسمى هذا الجدول بــ " **الشكل العادي** " للمباراة وهو كالآتي (راجع شجرة المباراة).

	B_1	B_2
A_1	(1 , -1)	(-1 , 1)
A_2	(-1 , 1)	(-1 , 1)
A_3	(-1 , 1)	(-1 , 1)
A_4	(-1 , 1)	(1 , -1)

الجدول 3

وفي حال مباريات الشخصين ذات المجموع الصفري كما في المثال (1 . 1) أعلاه فإن النتيجة (a, b) تعني أن $-b = a$ ولذا فقد اصـطلح على كتابة النتيجة (a, -a) على الشـكل a أي عائد اللاعب A فقط أما عائد اللاعب الثاني B فهو معروف ضـمناً . وبذلك فإن من **الشكل العادي** (الجدول 3) أعلاه نستخرج عوائد اللاعب A لنكون مصفوفة تسمى " مصفوفة المباراة " نرمز لها بـ G ، على النحو التالي :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

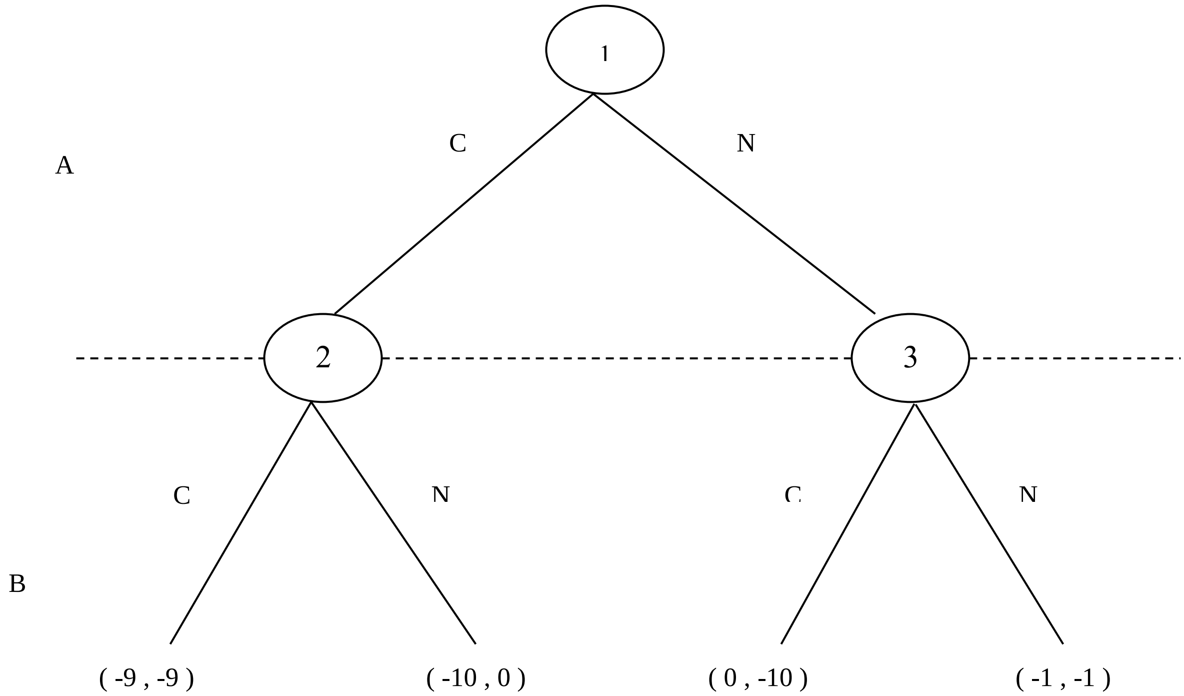
وكمثال على مباريات لشخصين ذات مجموع غير صفري نسوق المثال البسيط التالي:

مثال 1 . 2 :

قامت الشـرطة بتوقيف شـخصـين بتهمة سـرقة أحد محلات المجوهرات في السـوق معاً وقد تم استجواب كل من الشخصين على حدة. ونظراً لسوابق هذين الشخصين فإنهما يعلمان أنه إذا لم يعترف أحدهما بشـيء، فلا يوجد دلائل كافية عليه لإثبات تورطه في السرقة وعندئذٍ سيتم الحكم عليه بالسـجن سـنة. وإذا اعترف كلاهما باشـتراكهما بالسـرقة فإنه سـيتم الحكم على كل منهما بالسجن لــــ 9 سنوات. أما إذا اعترف أحدهما بالسرقة ولم يعترف الآخر فسيتم الحكـــــم على المعترف بالسجن لمدة 10 سنوات وسيتم إطلاق سراح الآخر. المطلوب تحليل هذه اللعبة (المباراة) .

نلاحظ أن هذه اللعبة هي ذات شخصين (لاعبين) سنرمز لهما بالرمز A و B وهي ذات مجموع غير صفري كما سنرى أدناه.

شجرة المباراة: على ضـــوء البيانـــات أعلاه فإن شجرة المباراة لهذه اللعبة هي كما في الشكل التالي:



شجرة المباراة لمثال (1. 2)

الاستراتيجيات :

نلاحـظ أن اللاعـب A يمتلك استراتيجيتين هما : A_1 الاعتراف C (confess) و A_2 الإنكار N (not confess) . كذلك فإن اللاعب B يمتلك اسـتراتيجيتين هما : B_1 الاعتراف C و B_2 الإنكار N .

مصفوفة المباراة :

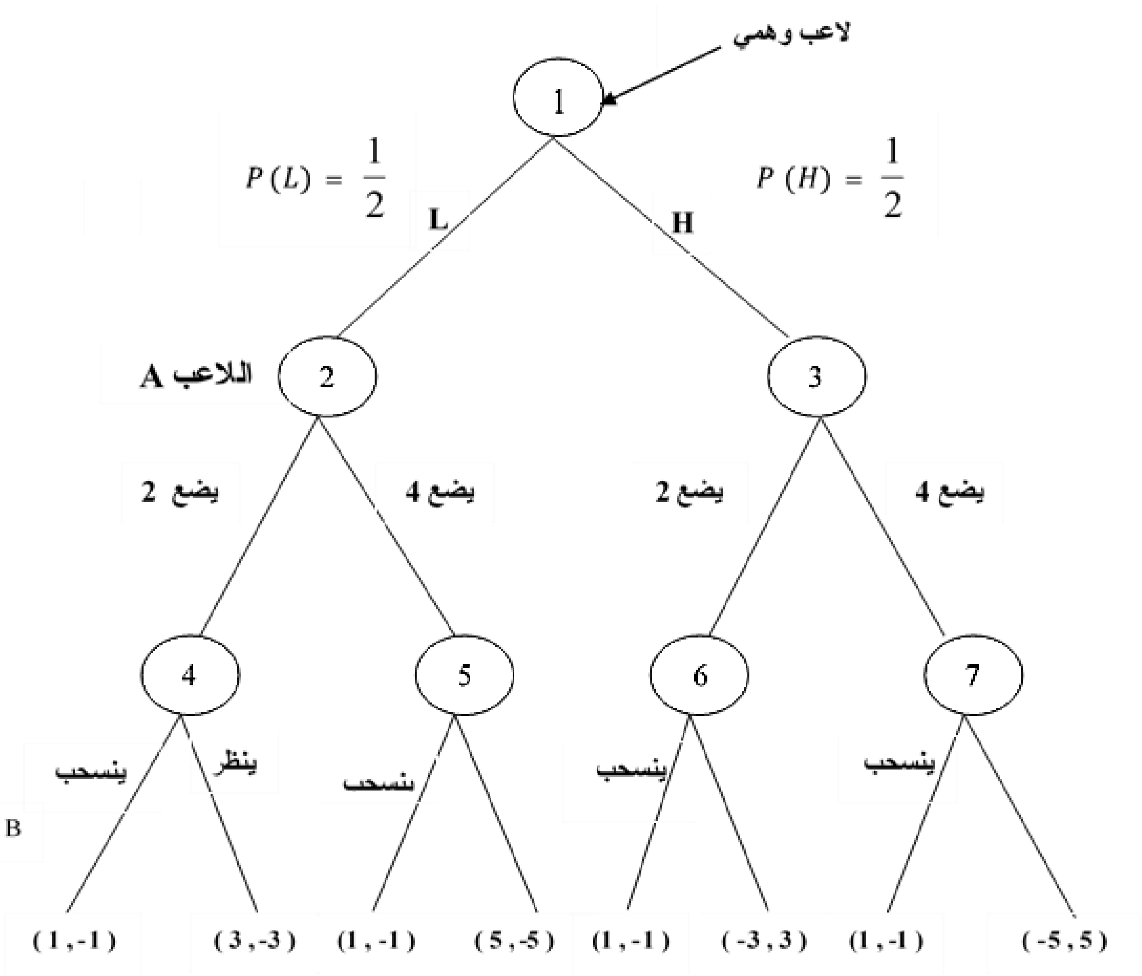
يتضح مما سبق أن المباراة ذات مجموع غير صفري وأن مصفوفتها معطاة بما يلي :

$$\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & (-9, -9) & (-10, 0) \\ A_2 & (0, -10) & (-1, -1) \end{array}$$

مثال 1 . 3

يقـوم كل من اللاعبين A و B بوضع 1 $ في وعاء ليبدءوا بعدها اللعبة التالية . توجد بطاقتان أحدهما تحمل الرمز H والأخرى تحمل الرمز L موضــوعتان على طاولة بطريقة تخفي رمز كل منهما . يقوم اللاعب A باختيار إحدى البطاقتين ، وبعد النظر إليها يقوم بوضــع إما 2 $ أو 4 $ في الوعاء . أما خيارات اللاعب B فهي إما أن ينسحب ويخسر الدولار الذي وضعه بداية في الوعاء أو أنه يضــع نفس المبلغ الذي وضـــعه اللاعب A في الوعاء (أي إما 2 $ أو 4 $) وينظر إلى البطاقة التي سحبها A . فإذا كانت البطاقة هي التي تحمل الرمز H فإن اللاعب B يربح كامل المبلغ المتجمع في الوعاء و إلا فإن اللاعب A يربح هذا المبلغ .

فلرســم شــجرة المباراة في مثل هذه اللعبة نبدأ بعقدة تســمى عادة عقدة الحظ (chance node) يتفرع عنها الحادثين H (الذي يقابل أن تكون البطاقة المســـحوبة هي التي تحمل الرمز H) والحادث L (وهو الذي يقابل كون البطاقة المســـحوبة تحمل الرمز L) . وكما نلاحظ فإن احتمال كل من هذين الحادثين هو $\frac{1}{2}$. وينظر إلى عقدة الحظ هذه كما لو أنها لاعب ثالث هو القدر (أو الطبيعة Nature) . وتكون شـجرة المبـاراة المقابلة في هـذه الحـالة على النحو المبين بالشكل التالي .



شجرة المباراة لمثال (1 . 3)

وبموجب معطيات اللعبة وبعد وقوع أحد الحادثين H أو L فإن أمام اللاعبين A و B الاستراتيجيات الخالصة الموضحة أدناه :

A_1	أن يضع 2$ إذا كانت البطاقة H و 2$ إذا كانت البطاقة L
A_2	أن يضع 2$ إذا كانت البطاقة H و 4$ إذا كانت البطاقة L
A_3	أن يضع 4$ إذا كانت البطاقة H و 2$ إذا كانت البطاقة L
A_4	أن يضع 4$ إذا كانت البطاقة H و 4$ إذا كانت البطاقة L

B_1	أن ينظر إذا وضع A $2 و ينظر إذا وضع A $4
B_2	أن ينظر إذا وضع A $2 و ينسحب إذا وضع A $4
B_3	أن ينسحب إذا وضع A $2 و ينظر إذا وضع A $4
B_4	أن ينسحب إذا وضع A $2 و ينسحب إذا وضع A $4

ومن الواضح أن هذه المباراة ذات مجموع صفري وذات بداية عشوائية (لاعب وهمي). في هذه الحالة فإن Gمصفوفة المباراة تتكون من العوائد المتوقعة للاعب مصفوفة g_{ij}. لنرمز بـ

Aالمباراة تتكون من العوائد المتوقعة ائد المتوقع للاعب الناتج عن اختيار اللاعبِ

للاستراتيجية A_i و اللاعبِ B للاستراتيجية B_j ، حيث $i, j = 1,2,3,4.$

g_{11} = العائد المتوقع للاعب A الناتج عن اختيار اللاعبِ A للاستراتيجية A_1 و اللاعبِ B لـــ B_1،

عندما يضع اللاعب A , 2 $, وينسحب اللاعب B . وكما هو ملاحظ من الشجرة فإن هذا الأمر يقع مرتين الأولى عندما يقع الحادث H والقيمة المتوقعة المقابلة (اعتماداً على نتائج الشجرة) هي $(-3)\times\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}$

والثانية عندما يقع الحادث L والقيمة المتوقعة المقابلة هي $3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ وبذلك فإن $g_{11} = \frac{-3}{2} + \frac{3}{2} = 0$. وبالمثل نجد النتائج التالية:

$$g_{11} = \frac{1}{2}(3) + \frac{1}{2}(-3) = 0, \qquad g_{12} = \frac{1}{2}(-3) + \frac{1}{2}(3) = 0,$$
$$g_{13} = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1) = 1, \qquad g_{14} = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1) = 1,$$
$$g_{21} = \frac{1}{2}(-3) + \frac{1}{2}(5) = 1, \qquad g_{22} = \frac{1}{2}(-3) + \frac{1}{2}(1) = -1,$$
$$g_{23} = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(5) = 3, \qquad g_{24} = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1) = 1,$$
$$g_{31} = \frac{1}{2}(-5) + \frac{1}{2}(3) = -1 \qquad g_{32} = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(3) = 2,$$
$$g_{33} = \frac{1}{2}(-5) + \frac{1}{2}(1) = -2, \qquad g_{34} = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1) = 1,$$
$$g_{41} = \frac{1}{2}(-5) + \frac{1}{2}(5) = 0, \qquad g_{42} = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1) = 1,$$
$$g_{43} = \frac{1}{2}(-5) + \frac{1}{2}(5) = 0, \qquad g_{44} = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1) = 1$$

وبذلك فإن مصفوفة المباراة لمثال (1 . 3) هي :

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

وتجدر الملاحظة هنا إلى أن مجموع الاحتمالات التي تنشأ عن عقدة الحظ المشار إليها أعلاه يجب أن يكون مساوياً الواحد.

ملاحظة (1 . 1)

ثمة شيء يجب التنويه عنه هو ما سنطلق عليه **مجموعة المعلومات** (Information set).

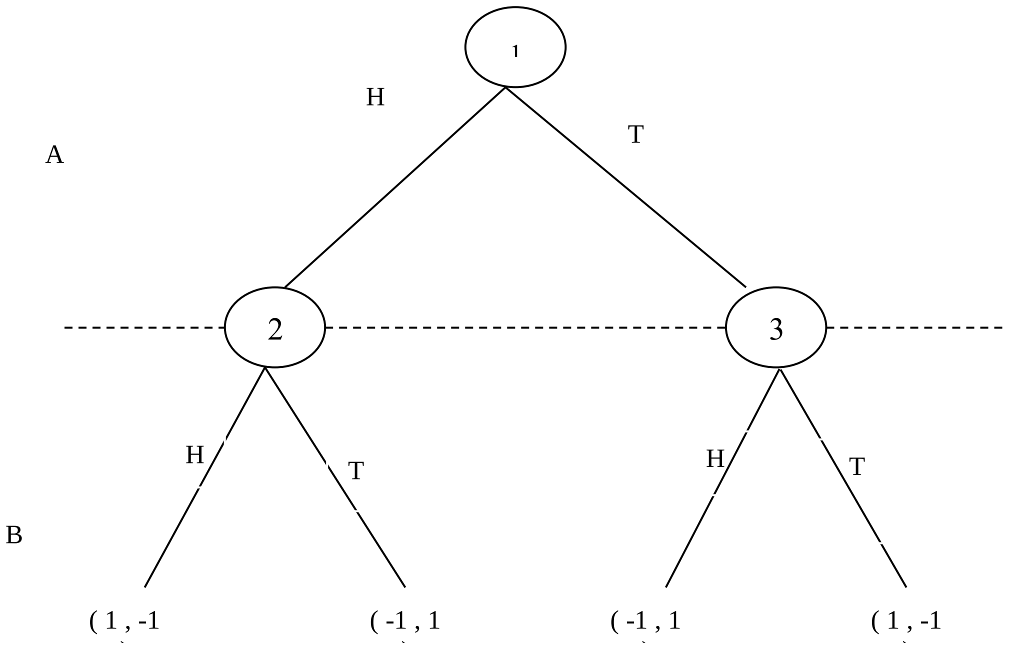
ففي المثال (1 ـــ 3) نجد أن اللاعب B لا يعرف بالضبط مقدار ما وضعه اللاعب A في الوعاء ولكنه يعرف أنه إما أن يكون قد وضع 2 $ وهذا يقابل العقدتين (4) و (6) أو وضع 4 $ وهذا يقابل العقدتين (5) و (7) . نسمي كلا المجموعتين { (4) ، (6) } و { (5) ، (7) } بـ مجموعة معلومات .

ولتوضيح أهمية مجموعة المعلومات نسوق المثال البسيط التالي:

مثال 1 . 4

لنفرض أن اللاعبين A و B لعبا اللعبتين التاليتين:

اللعبة الأولى: لدى كل من اللاعبين قطعة عملة ويبدأ اللاعب A باختيار الوجه H أو الوجه T دون أن يعلن عن اختياره ثم يقوم بعدها اللاعب B باختيار H أو T، فإذا توافقت الاختيارات فإن اللاعب A سيربح 1 $ (من B) و إلا فإن اللاعب B يربح 1 $ من A . عندئذٍ تكون شجرة المباراة لهذه اللعبة كما هي مبينة في الشكل (1 . 6) .



شجرة المباراة لمثال (4 . 1) اللعبة الأولى

ومصفوفاتها هي (لاحظ أن المباراة ذات مجموع صفري) :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} H & T \end{array} \\ A \quad \begin{array}{c} H \\ T \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

وهنا نعتبر المجموعة { (3) ، (2) } مجموعة معلومات حيث يعرف اللاعب B أنه إما في (2) [تقابل الاختيار H للاعب A] أو في (3) [تقابل الاختيار T للاعب A] ولكنه لا يعرف أين هو بالضبط و إلا فإنه سيبني اختياره لاستراتيجياته على هذه المعرفة . يقال عن هذا النوع من المباريات بأنها **ذات معلومات غير كاملة** (Imperfect Information) كما سبق وأشرنا .

2 – المباراة ذات المجموع الصفري لشخصين (Two persons zero sum game)

وتتميز المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين بالخصائص التالية:

1. لـدينـا لاعبين فقط يمكن لكـل منهمـا اختيـار واحـدة من عـدد محـدد (منتـه) من الاستراتيجيات.
2. إن اصطلاح " المجموع الصفري " يعني أن أي ربح (أو عائد) يحققه أحد اللاعبين لـدى لعبه استراتيجية معينة يساوي بالضبط خسارة (أو معكوس) ما يحققه اللاعب الآخر لدى لعبه الاســتراتيجية المقابلة أو أن مجموع عوائد اللاعبين لدى لعبهما أي اســتراتيجيتين متقابلتين يكون صفراً أو مقداراً ثابتاً.
3. لدى كل من اللاعبين معرفة كاملة عن كل الاستراتيجيات المتوافرة لكلا اللاعبين كما أن العوائد المقابلة لكل استراتيجية تنافسية معروفة لكلا اللاعبين.

1-2 معيار تكبير الأصغر(Maximin criterion) - النقطة السرجية (Saddle point).

لنفرض أن لدينا لاعبين A و B يلعبان مباراة ذات مجموع صـــفري وأن اللاعب A يمتلك m استراتيجية هي $A_1 , A_2 , \dots , A_m$ وأن اللاعب B يمتلك n استراتيجية هي $B_1 , B_2 , \dots ,$ B_n ، ولنرمز g_{ij} للعائد الذي يحصل عليه A لدى لعب الاستراتيجية (A_i , B_j) (نذكر بأن B يحصل عندئذٍ على $-g_{ij}$) عندئذٍ تكون مصفوفة المباراة ولتكن G هي مصفوفة $m \times n$ ومعطاة كما يلي :

$$G = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ : \\ A_i \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} B_1 & & B_2 & \dots & B_j & \dots & B_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} g_{11} & & g_{12} & \dots & g_{1j} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & & g_{22} & \dots & g_{2j} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{i1} & & g_{i2} & \dots & g_{ij} & \dots & g_{in} \\ \hdashline g_{m1} & & g_{m2} & \dots & g_{mj} & \dots & g_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

بعد معرفة مصفوفة المباراة G سنكون قادرين وبشكل عام على حل المباراة . وتستند فكرة حل المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين على التحليل التالي .

ينظر إلى المباريات ذات المجموع الصفري بأنها **غير تعاونية** (Non-cooperative) بمعنى أن كلاً من الخصمين يسعى إلى جعل عائده أكبر ما يمكن وهذا يعني ضمناً جعل عوائد الخصم أقل ما يمكن. فبالنسبة للاعب الأول (A مثلاً) فإنه سيحاول النظر إلى أقل عائد يمكن أن يحصل عليه مقابل كل استراتيجية A_i و يتمثل بالقيمة $\min\limits_{1\le j\le n} g_{ij}$ لكل i $(1,2,..,m)$

و سيقوم بعدها باختيار الاستراتيجية التي تقابل أكبر هذه النتائج المتمثلة بالقيمة $\max\limits_{1\le i\le m}\left(\min\limits_{1\le j\le n} g_{ij}\right)$ وهو بذلك يضمن أنه لن يحصل على عائد أقل من تلك القيمة مهما كانت الاستراتيجيات التي يتبعها خصمه (اللاعب B). تلك القيمة والتي نرمز لهل بالرمز $\underline{v}^P$ تسمى **القيمة الدنيا للمباراة** (Lower value of the game). المعطاة بـ:

$$\underline{v}^P = \max_{1\le i\le m}\left(\min_{1\le j\le n} g_{ij}\right) \qquad (2.1)$$

تعني أن اللاعب A لن يحصل على عائد أقل من $\underline{v}^P$ مهما كانت الإستراتيجية التي يختارها اللاعب B.

ومن ثم فإن عائد اللاعب A و الذي نرمز له بـ v_A يحقق العلاقة التالية:

$$\underline{v}^P \le v_A \qquad (2.2)$$

بالمقابل فإن اللاعب B (خصم A) سيتبع نفس سياسة A. فإذا تذكرنا أن عناصر مصفوفة العوائد هي تعبير عن عوائد اللاعب A وأن عوائد اللاعب B هي بالضبط عوائد اللاعب A مضروبة بـــ -1 فإن ذلك يعني أن اللاعب B سيقوم بالنظر إلى أكبر عائد(خسارة) يمكن أن يحصل عليه مقابل كل استراتيجية B_j و يتمثل بالقيمة $\max\limits_{1\le i\le n} g_{ij}$ لكل j $(j = 1,2,..,n)$

وسيقوم بعدها باختيار الاستراتيجية التي تقابل أصغر هذه النتائج المتمثلة بالقيمة

وبذلك فإن اللاعب B يضــمن أن أكبر عائد يحصــل عليه اللاعب A $\min_{1 \le j \le n} \left(\max_{1 \le i \le m} g_{ij} \right)$

هي تلك القيمة مهما كانت الاســـتراتيجيات التي يتبعها. هذه القيمة والتي نرمز لهل بالرمز $\overline{v}^{P}$

تسمى **القيمة العليا للمباراة(Upper value of the game)** و المعطاة بـ:

$$\overline{v}^{P} = \min_{1 \le j \le n} \left(\max_{1 \le i \le m} g_{ij} \right) \qquad (2.3)$$

تعني أن اللاعب A لن يحصل على عائد أكبر من $\overline{v}^{P}$ مهما كانت الإستراتيجية التي يختارها.

ومن ثم فإن عائد اللاعب A يحقق العلاقة التالية:

$$v_{\mathrm{A}} \le \overline{v}^{P} \qquad (2.4)$$

من العلاقتين (2.2) و(2.4)، نستنتج أن :

$$\underline{v}^{P} \le v_{\mathrm{A}} \le \overline{v}^{\mathrm{p}} \qquad (2.5)$$

من العلاقة (2.5) يتبين أن أفضل عائد يحصل عليه اللاعب A مهما كانت الإستراتيجية التي يختارها اللاعب B يقع بين القيمتين $\underline{v}^{\mathrm{P}}$ و $\overline{v}^{\mathrm{P}}$. ولو رمزنا بالرمز v_{B} لعائد اللاعب B فنستنتج من العلاقة (2.5) أن:

$$-\overline{v}^{\mathrm{p}} \le v_{\mathrm{B}} \le -\underline{v}^{P} \qquad (2.5)$$

<u>مثال 1 :</u>

$$\begin{array}{cc}
G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \min \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{array} \\
\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 1 \end{array} &
\end{array}$$

نجد أن:

$$\overline{v}^{\mathrm{P}} = 1/2, \quad \underline{v}^{\mathrm{P}} = 0$$

وبالتالي فإن عائد اللاعب A يحقق: $0 \le v_{\mathrm{A}} \le 1/2$

و عائد اللاعب B يحقق: $-1/2 \le v_{\mathrm{B}} \le 0$

وتعني هذه النتيجة أن أقل قيمة يمكن أن يحصل عليها اللاعب A هي $\underline{v}^{\mathrm{P}} = 0$ و أكبر قيمة هي 1/2.

مثال 2 :

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 6 & 6 & 9 \end{matrix}$$

نجد أن :

$$\overline{v}^{\mathrm{P}} = 6, \quad \underline{v}^{\mathrm{P}} = 5$$

وبالتالي فإن عائد اللاعب A يحقق: $5 \leq v_{\mathrm{A}} \leq 6$

و عائد اللاعب B يحقق: $-6 \leq v_{\mathrm{B}} \leq -5$

مثال 3 : لتكن مصفوفة المباراة التالية :

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

نجد أن:

$$\overline{v}^{\mathrm{P}} = 3, \quad \underline{v}^{\mathrm{P}} = 3$$

سنرمز للقيمة 3 بــ v^P و نسميها **قيمة المباراة** ($3 = \overline{v}^{\mathrm{P}} = \underline{v}^{\mathrm{P}} = v^P$)

في حالة $\underline{v}^{\mathrm{P}} = \overline{v}^{\mathrm{P}}$ فإننا نقول إن للمباراة **نقطة سرجية** (Saddle point) أو **نقطة توازن** **و قيمتها** $\boldsymbol{v^P}$ **=3** ومحددة بالصف الثاني في المصفوفة الموافق للاستراتيجية الخالصة A_2 و العمود الثالث الموافق للاستراتيجية الخالصة B_3. إذا كانت $\underline{v}^{\mathrm{P}} = \overline{v}^{\mathrm{P}}$ ، فإن عائد اللاعب A (v_{A}) يحقق:

$$3 \leq v_{\mathrm{A}} \leq 3$$

و هذا يعني أن $v_{\mathrm{A}} = 3$. بنفس الطريقة فإن عائد اللاعب B (v_{B}) يحقق :

$$-3 \leq v_{\mathrm{B}} \leq -3$$

وبالتالي فإن $v_{\mathrm{B}} = -3$. نستنتج مما سبق أن أفضل استراتيجية للاعب A هي الاستراتيجية الخالصة A_2 التي تحقق للاعب أفضل عائد بقيمة 3. والدليل على ذلك هو أن في حالة اختار

اللاعب A استراتيجية خالصة أخرى (A_1 أو A_3) ، و مع العلم أن اللاعب B قد اختار الاستراتيجية الخالصة B_3 ، فإن عائده سيقل عن 3 .(انظر إلى قيم العمود الثالث في المصفوفة G) . أما بالنسبة للاعب B، فإن أفضل استراتيجية هي الاستراتيجية الخالصة B_3 التي تحقق للاعب أفضل عائد بقيمة -3. ذلك أنه إذا رغب اللاعب B اختيار استراتيجية

صافية أخرى (B_1 أو B_2) و علما أن اللاعب A قد اختار الاستراتيجية الخالصة A_2، فإن عائده سيقل عن 3-(انظر إلى قيم الصف الثاني في المصفوفة) . يمكن مما سبق صياغة الحل الأمثل للمباراة التالي:

أ. الاستراتيجية الخالصة الأمثل للاعب A هي A_2.

ب. الاستراتيجية الخالصة الأمثل للاعب B هي B_3.

ت. قيمة المباراة $v = 3$. العائد الأمثل للاعب A = 3 و العائد الأمثل للاعب B = -3

مثال (4)

$$G = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \text{max} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & -5 & -6 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ 7 & -3 & 5 & -1 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 7 & 3 & 5 & 6 & 6 \end{matrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{min} \\ -5 \\ -6 \\ 3 \\ -3 \\ \\ \end{array}$$

لدينا : $\underline{v}^{\mathrm{P}} = \max\{-5,-6,3,-3\} = 3$ و $\overline{v}^{\mathrm{P}} = \min\{7,3,5,6,6\} = 3$

إذا $\underline{v}^{\mathrm{P}} = \overline{v}^{\mathrm{P}} = 3$ و بالتالي توجد نقطة سرجيه محددة بالصف الثالث و يوافق الاستراتيجية الخالصة A_3 والعمود الثاني الذي يوافق الاستراتيجية الخالصة B_2 والحل الأمثل هو:

أ. اللاعب A يختار الاستراتيجية الخالصة A_3.

ب. اللاعب B يختار الاستراتيجية الخالصة B_2.

ت. قيمة المباراة $v^P = \underline{v}^{\mathrm{P}} = \overline{v}^{\mathrm{P}} = 3$. (عائد اللاعب A = 3 ، عائد اللاعب B = -3)

<u>تعريف</u>: النقطة الســرجية هي قيمة في المصــفوفة بحيث أنها الأقل في صــفها و الأكبر في عمودها.

<u>قاعدة مهمة</u>: لتكن مباراة ذات مجموع صــفري لشــخصــين. إذا كانت مصــفوفة المباراة تحتوي على نقطة سرجيه فإن للمباراة حل أمثل في مجموعة الاستراتيجيات الخالصة.

2-2 الاستراتيجيات المختلطة

لتوضيح مفهوم الاستراتيجيات المختلطة نعود إلى المثال 4 أعلاه:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

إن الاعب A يملك ثلاثة استراتيجيات خالصة $\{A_1, A_2, A_3\}$، و كذلك الاعب B يملك ثلاثة استراتيجيات خالصة $\{B_1, B_2, B_3\}$. لتوضيح مفهوم الاستراتيجية المختلطة نفترض أن اللعبة تكررت عدداً من المرات (مئة مرة مثلاً) فإن اللاعب الأول مثلاً قد يجد أن عائده ســـيكون أفضل فيما لو قام يلعب كل من استراتيجياته الثلاثة نسبة من المرات الـــ 100 التي تتكرر فيها اللعبة كأن يلعب الاستراتيجية A_1 بـــ 50 % من المرات ويلعب الاستراتيجية A_2 بـــ 40 % من المــــرات ويلعب كلاً من الاســتراتيجية A_3 بنســبة 10 % من المرات (المجموع = 100 %) ونقول في هذه الحالة إن لدى اللاعب الأول:

الاستراتيجية المختلطة التالية (10 %، 40 %، 50 %) أو بالاحتمالات (0.1، 0.4، 0.5) (المجموع يساوي 1) :

أو بأسلوب اخر يمكن كتابة ما يلي مع العلم أن $P(\ldots)$ يرمز للاحتمال:

$$P(\text{اللاعب A يختار } A_1) = 0.5$$
$$P(\text{اللاعب A يختار } A_2) = 0.4$$
$$P(\text{اللاعب A يختار } A_3) = 0.1$$

بالمثل إذا لعب اللاعب الثاني الاستراتيجية B_1 بنسبة 70 % مثلاً ولعب الاستراتيجية B_2 بنسبة 15 % و B_3 بنسبة 15 % من المرات قلنا إن لدى اللاعب الثاني:

الاستراتيجية المختلطة التالية (15 %، 15 %، 70 %) أو بالاحتمالات (0.7, 0.15, 0.15) (المجموع يساوي 1) .

أو بأسلوب اخر يمكن كتابة ما يلي:

$0.7 = P(B_1$ يختار B اللاعب)

$0.15 = P(B_2$ يختار B اللاعب)

$0.15 = P(B_3$ يختار B اللاعب)

و هذا يؤدي إلى تعريف الاستراتيجية المختلطة كما يلي:

تعريف : الاستراتيجية المختلطة هي توزيع احتمالي على مجموعة الاستراتيجيات الخالصة.

إذا كانت $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_m\}$ مجموعة الاستراتيجيات الخالصة للاعب A وكان

$x_1 = P(\{A_1$ يختار A اللاعب$\})$

$x_2 = P(\{A_2$ يختار A اللاعب$\})$

… … … … …

… … … … …

… … … … …

$x_m = P(\{A_m$ يختار A اللاعب$\})$

فإن المتجه $X = (x_1, x_2, \ \dots \ , x_m)$ يمثل استراتيجية مختلطة للاعب A حيث أن $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \quad 0 \le x_i \le 1$.

بنفس الطريقة، إذا كانت $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\}$ مجموعة الاستراتيجيات الخالصة للاعب B و كان

$y_1 = P(\{B_1$ يختار B اللاعب$\})$

$y_2 = P(\{B_2$ يختار B اللاعب$\})$

… … … … …

… … … … …

… … … … …

$y_n = P(\{B_n$ يختار B اللاعب$\})$

فإن المتجه $Y = \ (y_1, y_2, y_3, \dots \dots, y_n)$ يمثل استراتيجية مختلطة للاعب B حيث $\sum_{j=1}^{nm} y_j = 1, \quad 0 \le y_j \le 1$

نرمز بـ S لمجموعة الاستراتيجيات المختلطة للاعب A و بـ T لمجموعة الاستراتيجيات المختلطة للاعب B.

$$S = \{ X = (x_1, x_2, \dots\dots, x_m): \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad 0 \le x_i \le 1\}$$

$$T = \{ Y = (y_1, y_2, y_3, \dots\dots, y_n): \sum_{j=1}^{nm} y_j = 1, \quad 0 \le y_j \le 1\}$$

ولعل أهم فائدة اســتخدام الاســتراتيجيات المختلطة هو أنها (وكما ســنرى) تضــمن وجود حل للعديد من المباريات (كالمباريات ذات المجموع الصفري عندما $\overline{v}^{\mathrm{P}} \neq \underline{v}^{\mathrm{P}}$) مثلاً ولكن عيبها الرئيســي يكمن في أن بعض المباريات لا تتكرر أكثر من مرة كما هي الحال في بعض النزاعات العســكرية ومع ذلك فإن هناك العديد من المباريات التي تتكرر فيها الســياســات المتوافرة لدى أطراف النزاع كتلك التي تقع بين الشركات المتنافسة .

والسؤال كيف نحل مثل المباراة ذات المجموع الصفري عندما $\overline{v}^{\mathrm{P}} \neq \underline{v}^{\mathrm{P}}$ ؟

للإجابة نذّكر أولاً أن الحل لمثل هذه المباراة (ذات المجموع الصفري) يعتمد على الاستراتيجيات المختلطة. فإن اســتخدام فكرة الاســتراتيجيات المختلطة (من الخالصــة) قد أثرى نظرية المباريات فقد أثبت **ڤون نيومان** عام 1937 النظرية التالية:

<u>نظرية (ڤون نيومان):</u>

في المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين إذا كان كل من اللاعبين يملك عدداً منتهياً من الاســتراتيجيات الخالصــة فعندئذٍ يوجد على الأقل حل للمباراة يتمثل في إســتراتيجية خالصــة أو مختلطة.

حساب العائد المتوقع :

بالعودة إلى المباراة :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

فلو فرضـــنا أن اللاعب A يلعب الاســتراتيجية المختلطة $X^T = (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ و أن اللاعـــــب B يلعـــب الاستراتيجية المختلطة $Y^T = (y_1, y_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. ، فإن العائد المتوقع الذي يحصل عليه اللاعب A، و نرمز إليه بـ $P_A(X, Y)$ معطى بـ:

$$P_A(X, Y) = X^T G Y = (\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = -5/12$$

أما العائد المتوقع للاعب B ، و نرمز إليه بـ $P_B(X, Y)$ معطى بـ:

$$P_B(X, Y) = -\ P_A(X, Y) = 5/12$$

طريقة أخرى لحساب العائد المتوقع للاعب A وهي:

$P_A(X, Y) =$ مجموع ضـــرب الاحتمال صـــف **في** الاحتمال عمود **في** العنصـــر داخل المصفوفة الموافق لصف و عمود الاحتمال.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P_A(X, Y) = \frac{1}{2}(0)1 + \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(0)\frac{2}{3} = -\frac{5}{12}$$

أما عائد اللاعب B: $P_B(X, Y) = -\ P_A(X, Y) = 5/12$

في العموم، لتكن G مصفوفة المباراة وهي مصفوفة $m \times n$. إذا اختار اللاعب A الاستراتيجية المختلطة $X = (x_1, x_2, \ \dots\ , x_m)$ واختار اللاعب B الاستراتيجية المختلطة $Y = (y_1, y_2, y_3, \dots \dots, y_n)$ فإن العائد المتوقع للاعب A هو:

$$P_A(X, Y) = X^T G Y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i g_{ij} y_j$$

و العائد المتوقع للاعب B معطى بــ: $P_B(X, Y) = -\ P_A(X, Y)$

2–3 حل المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين من الشكل 2x2

بالعودة إلى المباراة :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

فقد وجدنا أن $-\frac{1}{2} = \overline{v}^{\mathrm{P}} \neq \underline{v}^{\mathrm{P}} = 0$ ويعني ذلك أن اللاعب الأول يمكن أن يحصـــل على عائد v_{A} بين $0, -\frac{1}{2}$ $(-1/2 \leq v_{\mathrm{A}} \leq 0)$.

2–3 نظرية تصغير الأكبر(Minimax Theorem) – حل المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين عندما G مصفوفة $m \times n$:

إذا اختار اللاعب A الاستراتيجية المختلطة $X \in S$ ، فإن أفضل عائد متوقع يحصل عليه هو: $v_A(X) = \min_{Y \in T} X^T G Y$

و ذلك مهما كان كانت الاستراتيجية المختلطة التي يختارها اللاعب B .

أفضل استراتيجية مختلطة X، و نرمز لها بــ X^* (و تسمى minimax strategy) يختارها اللاعب A هي التي تحقق له أكبر عائد متوقع $v_A(X)$:

$$v_A(X^*) = \max_{X \in S} v_A(X) = \max_{X \in S} \min_{Y \in T} X^T G Y$$

نرمز للقيمة أعلاه بـــــ $\underline{v}^M$ و تسمى **القيمة الدنيا المتوقعة للمباراة** (Expected lower value of the game) .

إن العائد المتوقع للاعب A ، $P_A(X,Y)$ ، يحقق العلاقة التالية :

$$(*) \qquad \underline{v}^M \leq P_A(X,Y)$$

وبالنسـبة للاعب B فإذا لعب الاسـتراتيجية المختلطة Y فإنه سـيضـمن أن أكبر خسـارة ينالها هي : $v_B(Y) = \max_{X \in S} X^T G Y$

و ذلك مهما كانت الاستراتيجية المختلطة التي يختارها اللاعب A .

أفضل استراتيجية مختلطة Y و نرمز لها بـــ Y^* (و تسمى maximin strategy) يختارها اللاعب B هي التي تحقق له أقل خسارة :

$$v_B(Y^*) = \min_{Y\in T} v_B(Y) = \min_{Y\in T}\max_{X\in S} X^T G Y$$

نرمز للقيمة أعلاه بـ...... $\overline{v}^M$ و تسمى **القيمة العليا المتوقعة للمباراة** (Expected upper value of the game)

إن العائد المتوقع للاعب B ، $P_B(X,Y)$ ، يحقق العلاقة التالية :

$$-\overline{v}^M \le P_B(X,Y)$$

وبالتالي فإن العائد المتوقع للاعب A ، $P_A(X,Y)$ ، يحقق العلاقة التالية :

$$(**) \qquad P_A(X,Y) \le \overline{v}^M$$

من العلاقتين $(*)$ و $(**)$، نستنتج أن العائد المتوقع للاعب A ، $P_A(X,Y)$ ، يحقق العلاقة التالية : $\underline{v}^M \le P_A(X,Y) \le \overline{v}^M$

نظرية تصغير الأكبر (Minimax theorem) :

$$\boldsymbol{\underline{v}^M = \overline{v}^M}$$

أو

$$\max_{X\in S}\min_{Y\in T} X^T G Y = \min_{Y\in T}\max_{X\in S} X^T G Y$$

سوف يرمز للقيمة أعلاه بـــ $\boldsymbol{v^M}$ و تسمى " القيمة المتوقعة للمباراة " (Expected value of the game) يعني $v^M = \max_{X\in S}\min_{Y\in T} X^T G Y = \min_{Y\in T}\max_{X\in S} X^T G Y$

نتيجة مباشــرة للنظرية: لكل مباراة ذات مجموع صــفري لشــخصــين يوجد حل أمثل للمباراة في مجموعة الاستراتيجيات المختلطة ويتكون من:

أ- الاستراتيجية المختلطة المثلى للاعب A التي هي X^* .

ب-الاستراتيجية المختلطة المثلى للاعب B التي هي Y^* .

جـ -العائد المتوقع الأمثل للاعب A ويساوي $\boldsymbol{P_A(X^*,Y^*) = v^M}$

العائد المتوقع الأمثل للاعب B ويساوي $P_B(X^*, Y^*) = -v^M$

حل المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين عندما G مصفوفة $m \times n = 2x2$:

هناك طريقة بسيطة لحل مسائل المباريات 2 x 2 ذات المجموع الصفري وهي كما يلي:

مثال (2 . 2) :لنأخذ المباراة التالية :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

نقوم أولاً بالتأكد أن المباراة لا تملك نقطة سرجيه ثم نقوم بعدها بطرح الرقم الصغير في كل سطر (في كل عمود) من الرقم الكبير ونضع ناتج الطرح مقابل السطر (العمود) الآخر ثم نقسم كل ناتج مقابل كل سطر (كل عمود) على مجموع الناتجين في السطرين أي على

3 + 2 = 5 (في العمودين أي على 4 + 1 = 5). وجميع هذه العمليات موضحة أدناه:

$$G = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 5-3=2 \\ 4-1=3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 4-3=1 & 5-1=4 \end{array} \end{array}$$

$$G = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 2/5 \\ 3/5 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1/5 & 4/5 \end{array} \end{array}$$

عندئذٍ تكون الاستراتيجية المختلطة المثلى للاعب A هي $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ لـــ $(A_1\ ,\ A_2)$ والاستراتيجية المختلطة المثلى للاعب B هي $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$ لـــ $(B_1\ ,\ B_2)$. أما القيمة المتوقعة للمباراة فنحصل عليها بإحدى الطريقتين:

الطريقة الأولى : أن نضرب الاحتمالات $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ العائدة للاعب A بالعوائد المتوقعة المقابلة في أي عمود:

$$v^M = \frac{2}{5} \times 4 + \frac{3}{5} \times 3 = \frac{17}{5} \quad \text{أو} \quad v^M = \frac{2}{5} \times 1 + \frac{3}{5} \times 5 = \frac{17}{5}$$

الطريقة الثانية: أن نضـــرب الاحتمالات $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$ العائدة للاعب B بالعوائد المقابلة في أي سطر:

$$v^M = \frac{1}{5} \times 5 + \frac{4}{5} \times 3 = \frac{17}{5} \quad \text{أو} \quad v^M = \frac{1}{5} \times 1 + \frac{4}{5} \times 4 = \frac{17}{5}$$

إذاً A يحصـل على $\frac{17}{5}$ فهو اللاعب الرابح بينما يحصـل B على $-\frac{17}{5}$ فهو اللاعب الخاسر. وهذا أمر طبيعي بملاحظة أن جميع عوائد A في المصـــفوفة G هي موجبة بينما عوائد B هي سالبة.

2 . 3 الهيمنة في الاستراتيجيات للمباريات ذات المجموع الصفري لشخصين .

نصادف أحياناً مباريات تكون فيها عوائد إستراتيجية ما لأحـــد اللاعبين أفضل من (أو تعادل) مقابلاتها لإســـتراتيجية أو أكثر لنفس ذلك اللاعب عندئذٍ نقول إن الإســـتراتيجية الأولى **تهيمن** (dominate) على الاستراتيجيات الأخيرة ويمكننا عندئذٍ حذف هذه الأخيرة من مصفوفة المباراة (وبالطبع فإنه في حال وجود اســـتراتيجيات مكرره فإنه يُكتفى ببقاء أحدها) وفي حال كانت العوائد لإســتراتيجية أفضـــل تماماً من مقابلاتها لإســتراتيجية أخرى فإننا نقول إن الأولى تهيمن هيمنة مطلقة على الثانية . لنوضح ذلك بالأمثلة التالية:

مثال (2 . 3)

اختصـــر كلاً من المباريات (ذات المجموع الصــفري لشــخصــين) التالية إلى أقصـــى ما يمكن باستخدام مفهوم الهيمنة:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 16 & 14 & 6 & 11 \\ -14 & 4 & -10 & -8 \\ 0 & -2 & 12 & -6 \\ 12 & -12 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

اختصـار G_1 : نلاحظ أن عوائد الإسـتراتيجية A_2 أفضـل من مقابلاتها للإسـتراتيجية A_1 لذا فإن G_1 تختصــر كمرحلة أولى إلى [5 4] فإذا تذكرنا أن [5 4] تعني أن اللاعب B يحصــل على -4 في الإستراتيجية B_1 وعلى -5 في الإستراتيجية B_2 فإنه يمكن حذف الإستراتيجية B_2 واختصـار G_1 إلى [4] فالحل الأمثل للمباراة هو (A_2 , B_1) وقيمته $\upsilon = 4$ (لاحظ أن 4 هي نقطة سرجيه للمباراة G_1 حتى ولو لم نقم باختصارها) .

اختصار **G_2** : لا توجد هيمنة بين استراتيجيات اللاعب A . وبالنسبة للاعب B فإن B_2 تهيمن على B_3 ويقود ذلك إلى المباراة :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

وهو أقل اختصــار ممكن للمباراة G_2 . لاحظ أنه لا توجد لهذه المباراة نقطة سرجيه وسنتعرف بعد قليل على كيفية حل مثل هذا النوع من المباريات .

اختصارG_3 : نلاحظ أن A_1 تهيمن على A_2 و A_4 فنحصل على المباراة :

$$\begin{bmatrix} 16 & 14 & 6 & 11 \\ 0 & -2 & 12 & -6 \end{bmatrix}$$

وفيها B_4 تهيمن على B_1 و B_2 فنحصل على :

$$\begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$$

وليس لهذه الأخيرة نقطة سرجيه لكنها من النوع 2 x 2 لذا يمكن حلها بالطريقة البسيطة المشار إليها في الملاحظة (2 . 1) أعلاه حيث نجد الحل التالي :

$(\frac{18}{23}, \frac{5}{23})$ لـ (A_1 , A_3) و $(\frac{6}{23}, \frac{17}{23})$ لـ (B_3 , B_4) و $v^M = \frac{168}{23}$

(تحقق من ذلك) .

وبشكل عام ولاختصـار مباراة فإننا نقوم أولاً بفحص استراتيجيات أحد اللاعبين وحذف تلك التي تخضع للهيمنة ومن ثم نقوم بفحص استراتيجيات اللاعب الثاني وحذف تلك التي تخضع للهيمنة وهكذا حتى نصل إلى أقصى اختصار ممكن للمباراة المعنية . وفي هذا الصدد لدينا النظرية التالية([33]):

نظرية (2 . 2)

إذا أمكن اختصار المباراة G إلى المباراة 'G فإن أي حل لـ 'G هو حل لـ G .

إن عكس النظرية (2 ـ 2) ليس صحيحاً بشكل عام فكل حل لـ G ليس بالضرورة حل لـ 'G . وهذا يعني أننا قد نخسر بعض الحلول المثلى الممكنة للمباراة الأصلية G عند استخدامنا للمباراة المختصـرة 'G . فمثلاً لو أخذنا المباراة $G = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإنه يمكن اختصـارها إلى $[2 \quad 2]$ ثم إلى $G' = [2]$ والتي تقود إلى الحل الأمثل (A_1 , B_1) وقيمته $= 2v^M$ للمباراة المختصـرة والأصلية معاً . وفي الحقيقة يمكننا التأكد من أن الاستراتيجيات (1,0) و $(\alpha, 1-\alpha)$ ل A و B على الترتيب حيث $0 \le \alpha \le 1$ هي جميعاً حلول مثلى لـ G وأن قيمها جميعاً

هي v^M =2 .أي أننا خســـرنا بعض الحلول للمباراة الأصـــلية . ومع ذلك إذا كانت الهيمنة مطلقة فإنه لن تكون هناك خســارة في الحلول (لاحظ أن الهيمنة في [2 2] ليســت مطلقة) كما في المثال التالي :

مثال (2 . 4)

شـركتان A و B تتنافسـان للسـيطرة على تسـويق الخدمات الهاتفية في أحد البلدان .العوائد مقدرة بملايين الدولارات معطاة بالمصفوفة التالية . المطلوب إيجاد الحل الأمثل لكلا الشركتين .

$$\begin{array}{c|ccc} & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & -600 & 200 & 400 \\ A_2 & 400 & -800 & 1000 \\ A_3 & -800 & -1000 & 1400 \end{array}$$

الحـل :

نلاحظ أولاً عدم وجود نقطة سرجيه وأن B_2 تهيمن مطلقاً على B_3 ولذا فإن المباراة تختصر إلى:

$$\begin{bmatrix} -600 & 200 \\ 400 & -800 \\ -800 & -1000 \end{bmatrix}$$

وفيها A_1 تهيمن مطلقاً على A_3 ولذا فإن الأخيرة تختصر إلى المباراة 2 x 2 التالية :

$$\begin{bmatrix} -600 & 200 \\ 400 & -800 \end{bmatrix}$$

وحلها هو $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ لـ (A_1 , A_2) و $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ لـ (B_1 , B_2) وقيمتها

$v^M = -200$ أي أن الشركة A ستخسر 200 مليون دولار بينما تربح الشركة B مقدار 200 مليون دولار . والحل الذي حصلنا عليه هو حل وحيد للمباراة الأصلية لأن الهيمنة بين الاستراتيجيات مطلقة .

ملاحظة (2 . 2)

أ . في حال تعدد الحلول المثلى فإنها جميعاً تعطي نفس القيمة والتي نسـميها قيمة المباراة وتنفيذ أحدها يكون كاف للاعبين إلا أنه قد يُفقد اللاعبين بعض المرونة التي قد يحتاجونها .

ب . إن مفهوم الهيمنة والهيمنة المطلقة الذي ذكرناه أعلاه بين الاستراتيجيات يتعلق فقط بالاستراتيجيات الخالصة. إن استخدام مفهوم مماثل للاستراتيجيات المختلطة هو من الأمور الصعبة عملياً مع أنه صحيح من الناحية النظرية ولذا فلن نتطرق له في هذا الكتاب .

جـ . إن الطريقة المبسطة لحل المباريات 2×2 والواردة في الملاحظة (2ـ1) تنطبق فقط على المباريات 2×2 غير القابلة للاختصار .

2 . 4 حـل المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين من الشكل n x m حيث $m \geq 2$ و $n \geq 2$ بطريقة البرمجة الخطية

إذا افترضنا أنه بعد إزالة الاستراتيجيات بسبب الهيمنة فإن المباراة المختصرة آلت إلى الشكل n x m حيث $n \geq 3$ و $m \geq 3$ وأن المباراة المختصرة لا تملك نقطة سرجيه عندئذٍ تكون الطريقة المناسبة لحل هذه المباراة هي طريقة البرمجة الخطية (Linear programming) . وسنوضح ذلك من خلال المثال التالي :

مثال 1

أوجد الحل الأمثل للمباراة المعطاة بالمصفوفة التالية :

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحـل:

نلاحظ أن هذه المباراة هي من النوع 3 × 3 وأنها لا تملك نقطة ســــرجيه كما أنها غير قابلة للاختصار أكثر من ذلك. نقوم في مثل هذه الحالة باستخدام تقنيات البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل. فبما أنه لا توجد نقطة ســرجيه فإن الحل الأمثل لكلا اللاعبين هو اســتراتيجية مختلطة. فلو فرضــنا أن الاســتراتيجية المختلطة للاعب الأول هي $(x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3)$ وللاعب الثاني هي $(y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3)$ حيث :

x_i = احتمال أن يلعب A الاستراتيجية A_i (i = 1, 2, 3) و $\sum_{i=1}^{3} x_i = 1$.

y_j = احتمال أن يلعب B الاستراتيجية B_j (j = 1, 2, 3) و $\sum_{j=1}^{3} y_j = 1$.

نرجع إلى ما ذكرناه سابقا وهو أن مسألة اللاعب A هي:

$$\max_{X\in S} v_A(X)$$

$$s.t.:\ v_A(X) = \min_{Y\in T} X^T G Y \quad \text{حيث}$$

و مسألة اللاعب B هي:

$$\min_{Y\in T} v_B(Y)$$

$$s.t.:\ v_B(Y) = \max_{X\in S} X^T G Y \quad \text{حيث}$$

إذا $v_A(X) = v_A$ و $v_B(Y) = v_B$ فإن مسألة الاعب A تصبح

$$max\ v_A$$

$$s.t.:\ v_A = \min_{Y\in T} X^T G Y \quad \text{حيث}$$

و تصبح مسألة الاعب B

$$min\ v_B$$

$$s.t.:\ v_B = \max_{X\in S} X^T G Y \quad \text{حيث}$$

ملاحظة (نتيجة لنظرية تصغير الأكبر Minimax theorem) :

$$max\, v_A = min\, v_B = v^M$$

نرجع إلى مسألة الاعب A و هي:

$$max\, v_A$$
$$s.t.: v_A = \min_{Y \in T} X^T G Y$$

تحديد الدالة v_A يحتاج إلى تحديد أقل قيمة للدالة $X^T GY$ عندما $Y \in T$ و كما سبق فإن T يمثل مجموعة الاستراتيجيات المختلطة للاعب B وهي مجموعة لانهائية. لحسن الحظ توجد نظرية لا يلزم ذكرها تنص على أن تحديد الحل ضمن مجموعة الاستراتيجيات المختلطة اللانهائية مكافأ تحديده ضمن مجموعة الاستراتيجيات الخالصة و هي مجموعة محدودة.

بتطبيق النظرية على المثال1 ، نحصل على ما يلي:

نذكر أولا أن مجموعة الاستراتيجيات الخالصة للاعب B يمكن تمثيلها بالمجموعة التالية:

$Y \in \{ (1\ 0\ 0)\ , (0\ 1\ 0), (0\ 0\ 1)\}$ ، و من ثم فإن

$$\Leftrightarrow \Leftrightarrow v_A = \min_{Y \in T} X^T G Y \;\; = \min_{Y \in \{ (1\ 0\ 0)\ ,(0\ 1\ 0),(0\ 0\ 1)\}} X^T G Y \qquad \Leftrightarrow$$

$$v_A = \min_{Y \epsilon \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}} (x_1\, ,\ x_2\ , \qquad x_3) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= min\, \{\, 2x_1 + x_2 + 4x_3\ \ , 3x_1 + 2x_2 + x_3\, , 3x_2 + 2x_3\, \}$$

تصبح مسألة الاعب A كالتالي:

$$max\, v_A$$
$$s.t.: v_A = min\, \{\, 2x_1 + x_2 + 4x_3\ \ , 3x_1 + 2x_2 + x_3\, , 3x_2 + 2x_3\, \}$$

يمكن تحويل هذه المسألة إلى الصيغة التالية وهي عبارة على برنامج خطي:

$$max\ v_A$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.:}\quad & 2x_1 + x_2 + 4x_3 \ \geq v_A \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \ \geq v_A \\ & 3x_2 + 2x_3 \geq v_A \\ & x_1 \,,\ x_2 \ ,x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

فإذا كانت $v_A > 0$ ، فإن المسألة السابقة تصبح :

$$max\ v_A$$

$$\begin{aligned} s.t.:\quad & 2\frac{x_1}{v_A} + \frac{x_2}{v_A} + 4\frac{x_3}{v_A} \ \geq 1 \\ & 3\frac{x_1}{v_A} + 2\frac{x_2}{v_A} + \frac{x_3}{v_A} \ \geq 1 \\ & 3\frac{x_2}{v_A} + 2\frac{x_3}{v_A} \ \geq 1 \\ & x_1 \,,\ x_2 \ ,x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

فإذا افترضـنا أن $\bar{x}_i = \frac{x_i}{v_A}$ ، $i = 1, 2 ,3$ و $Z = \frac{1}{v_A} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$ ، فإن المسـألة السابقة تكافئ المسألة التالية:

$$min\ \ Z = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$$

وفقاً للقيود:

$$\begin{aligned} & 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 4\bar{x}_3 \ \ \geq 1 \\ & 3\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + \bar{x}_3 \ \ \geq 1 \qquad (LP_A) \\ & 3\bar{x}_2 + 2\bar{x}_3 \ \ \geq 1 \\ & \bar{x}_1 \,,\ \bar{x}_2 \ ,\bar{x}_3 \geq 0 \end{aligned}$$

اتباع لنفس الخطوات السابقة لصياغة مسألة الاعب A على شكل برنامج خطي، فإن

مسألة اللاعب B : $min\ v_B$

$$s.t.:\ 2y_1 + 3y_2 \ \le v_B$$

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ \le v_B$$

$$4y_1 + y_2 + 2_3 \ \le v_B$$

$$y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3 \ge 0$$

فإذا كانت v_B > 0 فإنه بعد القسمة على v_B ، فإن المسألة السابقة تصبح :

$$
\begin{aligned}
& min\ v_B \\
& s.t.: 2\frac{y_1}{v_A} + 3\frac{y_2}{v_A} \qquad\quad \le 1 \\
& \frac{y_1}{v_A} + 2\frac{y_2}{v_A} + 3\frac{y_3}{v_A} \ \le 1 \\
& 4\frac{y_1}{v_A} + \frac{y_2}{v_A} + 2\frac{y_3}{v_A} \ \le 1 \\
& y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

فإذا افترضـنا أن $\bar{y}_j = \frac{y_j}{v_B}$ ، j = 1, 2 ,3 و $W = \frac{1}{v_B} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3$ ، فإن المسـألة السابقة تكافئ المسألة التالية:

$$max\ W = \ \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3$$

وفقاً للقيود :

$$2\bar{y}_1 + 3\bar{y}_2 \ \le 1$$

$$\bar{y}_1 + \overline{2y}_2 + \ 3\bar{y}_3 \ \le 1 \qquad (LP_B)$$

$$4\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 2\bar{y}_3 \ \le 1$$

$$\bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \bar{y}_3 \ge 0$$

ملاحظة (2 . 4) :

وكما نلاحظ فإن مسـألة اللاعـب A هي **المسـألة الثنوية** (Dual problem) لمسألة اللاعب B. وهذا الأمر صـحيح دوماً من أجل أي مباراة ذات مجموع صـفري لشـخصـين. وكما هو معلوم فإن جدول الحل الأمثل لأي من المسـألتين يعطي بنفس الوقت الحل الأمثل للمسـألة الأخرى.

ولما كانت مسـألة اللاعب B على الصـيغة القانونية فإننا نقوم باختيار حل مسـألة اللاعب B ومنها نستنتج حل مسألة اللاعب A.

وإذا أضفنا المتغيرات الراكدة $\bar{y}_4,\ \bar{y}_5,\ \bar{y}_6 \geq 0$ لقيود مسألة اللاعب B ، فإننا نحصل على الصيغة القياسية التالية :

$$max\ W = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3$$

وفقاً للقيود :

$$\begin{aligned} 2\bar{y}_1 + 3\bar{y}_2 + \quad \bar{y}_4 \qquad &= 1 \\ \bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 + 3\bar{y}_3 + \qquad \bar{y}_5 \quad &= 1 \qquad (LP_B)_S \\ 4\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 2\bar{y}_3 + \qquad \bar{y}_6 &= 1 \\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \bar{y}_3,\ \bar{y}_4,\ \bar{y}_5,\ \bar{y}_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

نذكر بالعلاقات التالية :

.1 $x_i = \frac{\bar{x}_i}{Z}$ $\left(\bar{x}_i = \frac{x_i}{v_A}\right)$ $\underset{Z=\frac{1}{v_A}}{\Longleftrightarrow}$ $\bar{x}_i = Zx_i \Leftrightarrow x_i = \frac{\bar{x}_i}{Z}$) .

.2 $y_j = \frac{\bar{y}_j}{W}$ $\left(\bar{y}_j = \frac{y_j}{v_B}\right)$ $\underset{W=\frac{1}{v_B}}{\Longleftrightarrow}$ $\bar{y}_j = Wy_j \Leftrightarrow y_j = \frac{\bar{y}_j}{W}$) .

.3 إذا كانت $\boldsymbol{Z}^*$ القيمة المثلى لدالة الهدف مسألة اللاعب A و $\boldsymbol{W}^*$ القيمة المثلى لدالة الهدف مسألة اللاعب B فحسب نظرية الثنائية فإن $\boldsymbol{Z}^* = \boldsymbol{W}^*$

رجوعا إلى مسألة اللاعب B ، نكون جدول السمبلكس البدائي الموافق لـــــ $(LP_B)_S$ وبإجراء الحسـابات باسـتخدام طريقة السـمبلكس، نجد أن جداول الحلول المتتابعة لهذا البرنامج هي كما يلي:

BV	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_5$	$\bar{y}_6$	**RHS**
W	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
$\bar{y}_4$	2	3	0	1	0	0	1
$\bar{y}_5$	1	2	**3**	0	1	0	1
$\bar{y}_6$	4	1	2	0	0	1	1

BV	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_5$	$\bar{y}_6$	RHS
W	**2/3**	**1/3**	**0**	**0**	**-1/3**	**0**	**-1/3**
$\bar{y}_4$	2	3	0	1	0	0	1
$\bar{y}_3$	1/3	2/3	1	0	1/3	0	1/3
$\bar{y}_6$	**10/3**	-1/3	0	0	-2/3	1	1/3

BV	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_5$	$\bar{y}_6$	RHS
W	**0**	**2/5**	**0**	**0**	**-1/5**	**-1/5**	**-2/5**
$\bar{y}_4$	0	**16/5**	0	1	2/5	-3/5	4/5
$\bar{y}_3$	0	7/10	1	0	2/5	-1/10	3/10
$\bar{y}_1$	1	-1/10	0	0	-1/5	-3/10	1/10

BV	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_5$	$\bar{y}_6$	RHS
W	**0**	**0**	**0**	**-1/8**	**-1/4**	**-1/8**	**-1/2**
$\bar{y}_2$	0	1	0	5/16	1/8	-3/16	1/4
$\bar{y}_3$	0	0	1	-7/32	5/16	1/32	1/8
$\bar{y}_1$	1	0	0	1/32	-3/16	9/32	1/8

-W*= -1/2

من **جدول الحل الأمثل** [وهو الجدول الأخير] نجد ما يلي :

$$W^* = 1/2 \quad \text{و} \quad \bar{y}_1 = \frac{1}{8},\ \bar{y}_2 = \frac{1}{4},\ \bar{y}_3 = 1/8$$

من العلاقة $y_j = \frac{\bar{y}_j}{W}$ ، فإن الحل الأمثل لمسألة اللاعب B ، (LP_B) ، هو :

$$y_1 = \frac{\bar{y}_1}{W^*} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}, \quad y_2 = \frac{\bar{y}_2}{W^*} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \quad y_3 = \frac{\bar{y}_3}{W^*} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

و العائد المتوقع للاعب B هو -2 = $-v_B^* = -\frac{1}{W^*}$

والحل أعلاه يعني أن على اللاعب B أن يلعب الإستراتيجية المختلطة (y_1 , y_2 , y_3) =

(1/4 , 1/2 , 1/4) ليحصل على أفضل عائد متوقع و هو -2 .

يمكننا الآن أن نحصل على الحل الأمثل لمسألة اللاعب A من جدول الحل الأمثل للاعب B

حيث تتمثل قيم المتغيرات $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ بتلك القيم تحت المتغيرات غير الأساسية في جدول

الحل الأمثل للاعب B أي :

$$Z^* = 1/2 \quad \bar{x}_1 = \frac{1}{8}, \ \bar{x}_2 = \frac{1}{4}, \bar{x}_3 = 1/8$$

$$x_1 = \frac{\bar{x}_1}{Z^*} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{\bar{x}_2}{Z^*} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{\bar{x}_3}{Z^*} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

و العائد المتوقع للاعب A هو $v_A^* = \frac{1}{Z^*} = 2$

أي أن على اللاعب A أن يلعب الإسـتراتيجية المختلطة (y_1 , y_2 , y_3) = (1/4 , 1/2 , 1/4)

ليحصل على أفضل عائد متوقع و هو 2 .

مثال 2 :

أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس للمباراة المعطاة بالمصفوفة التالية :

$$G = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 6 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

مسألة اللاعب A هي :

$$min\ \ Z = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$$

وفقاً للقيود:

$$\begin{aligned} 6\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 + \bar{x}_3 &\geq 1 \\ -\bar{x}_1 - 4\bar{x}_2 + 7\bar{x}_3 &\geq 1 \qquad (LP_A) \\ 5\bar{x}_1 \qquad + 10\bar{x}_3 &\geq 1 \\ \bar{x}_1\,,\ \bar{x}_2\ ,\bar{x}_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

مسألة اللاعب B هي : $max\ w = \ \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3$

وفقاً للقيود : $6\bar{y}_1 - \bar{y}_2 \ +\ 5\bar{y}_3 \ \leq 1$

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 - 4\bar{y}_2 \qquad\qquad &\leq 1 \qquad (LP_B) \\ \bar{y}_1 + 7\bar{y}_2 + 10\bar{y}_3 \ &\leq 1 \\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \bar{y}_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

وإذا أضفنا المتغيرات الراكدة $\bar{y}_4,\ \bar{y}_5,\ \bar{y}_6 \geq 0$ لقيود مسألة اللاعب B ، فإننا نحصل على الصيغة القياسية التالية :

$$max\ W = \ \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3$$

وفقاً للقيود :

$$\begin{aligned} 6\bar{y}_1 - \bar{y}_2 \ +\ 5\bar{y}_3 + \quad \bar{y}_4 \qquad &= 1 \\ 4\bar{y}_1 - 4\bar{y}_2 + \qquad\qquad \bar{y}_5 \quad &= 1 \qquad (LP_B)_S \\ \bar{y}_1 + 7\bar{y}_2 + 10\bar{y}_3 \ + \qquad \bar{y}_6 &= 1 \\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2, \bar{y}_3,\ \ \bar{y}_4,\ \ \bar{y}_5,\ \ \bar{y}_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

نكون جدول السـمبلكس البدائي الموافق لــــــــ $(LP_B)_S$ وبإجراء الحسـابات باسـتخدام طريقة السمبلكس، نجد أن جداول الحلول المتتابعة لهذا البرنامج هي كما يلي:

BV	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_5$	$\bar{y}_6$	RHS
W	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
$\bar{y}_4$	**6**	-1	5	1	0	0	1
$\bar{y}_5$	4	-4	0	0	1	0	1
$\bar{y}_6$	1	7	10	0	0	1	1

BV	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_5$	$\bar{y}_6$	RHS
W	**0**	**7/6**	**1/6**	**-1/6**	**0**	**0**	**-1/6**
$\bar{y}_1$	1	-1/6	5/6	1/6	0	0	1/6
$\bar{y}_5$	0	-10/3	**-10/3**	-2/3	1	0	1/3
$\bar{y}_6$	0	**43/6**	55/6	-1/6	0	1	5/6

BV	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_5$	$\bar{y}_6$	RHS
W	**0**	**0**	**-57/43**	**-6/43**	**0**	**-7/43**	$\mathbf{-13/43}$
$\bar{y}_1$	1	0	45/43	7/43	0	1/43	8/43
$\bar{y}_5$	0	0	40/43	-32/43	1	20/43	31/43
$\bar{y}_2$	0	1	55/43	-1/43	0	6/43	5/43

من **جدول الحل الأمثل** [وهو الجدول الأخير] نجد ما يلي :

$\bar{y}_1 = 8/43,\ \bar{y}_2 = 5/43,\ \bar{y}_3 = 0$ و $W^* = 13/43$

من العلاقة $y_j = \frac{\bar{y}_j}{W}$ ، فإن الحل الأمثل لمسألة اللاعب B ، (LP_B) ، هو :

$$y_1 = \frac{\bar{y}_1}{W^*} = \frac{\frac{8}{43}}{\frac{13}{43}} = \frac{8}{13}, \quad y_2 = \frac{\bar{y}_2}{W^*} = \frac{\frac{5}{43}}{\frac{13}{43}} = \frac{5}{13} \ ,$$

$$y_3 = \frac{\bar{y}_3}{W^*} = \frac{0}{\frac{13}{43}} = 0$$

و العائد المتوقع للاعب B هو $-v_B^* = -\frac{1}{W^*} = -\frac{43}{13}$

والحل أعلاه يعني أن على اللاعب B أن يلعب الإستراتيجية المختلطة $(y_1 , y_2 , y_3) =$

(8/13 , 5/13 , 0) ليحصل على أفضل عائد متوقع و هو 43/13- .

يمكننا الآن أن نحصل على الحل الأمثل لمسألة اللاعب A من جدول الحل الأمثل للاعب B

حيث تتمثل قيم المتغيرات $\bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \bar{x}_3$ بتلك القيم تحت المتغيرات غير الأساسية في جدول

الحل الأمثل للاعب B أي :

$$Z^* = W^* = \frac{13}{43} \quad \bar{x}_1 = \frac{6}{43}, \ \bar{x}_2 = 0, \qquad \bar{x}_3 = 7/43$$

$$x_1 = \frac{\bar{x}_1}{W^*} = \frac{\frac{6}{43}}{\frac{13}{43}} = \frac{6}{13}, \quad x_2 = \frac{\bar{x}_2}{W^*} = \frac{0}{\frac{13}{43}} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\bar{x}_3}{W^*} = \frac{\frac{7}{43}}{\frac{13}{43}} = \frac{7}{13}$$

و العائد المتوقع للاعب A هو $v_A^* = \frac{1}{Z^*} = 43/13$

أي أن على اللاعب A أن يلعب الإســتراتيجية المختلطة $(y_1 , y_2 , y_3) =$ (6/13 , 0 ,

7/13) ليحصل على أفضل عائد متوقع و هو $43/13$.

تمارين (2 . 1)

1 . يقوم كل من اللاعبين A و B برمي قطعة عملة متوازنة وقد اتفقا على أن A يربح $1 من B إذا توافق الوجهان الظاهران و إلا فإن B يربح $1 من A .

المطلوب :

أ) تحليل هذه اللعبة ورسم شجرتها وإيجاد استراتيجيات كل من اللاعبين .

ب) إيجاد مصفوفة العوائد ثم حساب قيمة هذه اللعبة .

2 . يقوم كل من اللاعبين A وB وبشكل مستقل بكتابة أحد الأعداد 3 ، 2 ، 1 فإذا كان مجموع ناتج الكتابة زوجي فإن A يدفع لـB مقدار هذا المجموع بالدولار أما إذا كان مجموع ناتج الكتابة فردي فإن B يدفع لـ A مقدار هذا المجموع بالدولار .

المطلوب :

أ) تحليل هذه اللعبة ورسم شجرتها وإيجاد استراتيجيات كل من A و B .

ب) إيجاد مصفوفة العوائد ثم حساب قيمة هذه اللعبة .

ج) هل الحل الأمثل هو إستراتيجية بحته أم مختلطة ؟ وما هي هذه الإستراتيجية .

3 . تتنافس فرقتان عسكريتان A و B على احتلال موقعين عسكريين L_1 و L_2 في إحدى المناورات . تتكون الفرقة A من لواءين بينما تتكون الفرقة B من لواء واحد ، وتهدف قيادة كل فرقة إلى تحقيق أكبر ربح ممكن وفقاً للقاعدة التالية: مقدار ربح أو خسارة الفرقة في أي موقع يساوي الفرق في عدد ألويتها المتواجدة في ذلك الموقع على ألوية الفرقة الأخرى . أوجد كل من شجرة المباراة واستراتيجيات كل من الفرقتين ومصفوفة العوائد والحل الأمثل لكلا الفرقتين .

4 . تمثل المصفوفة التالية مصفوفة العوائد المقابلة للاستراتيجيات المختلفة لشركتي فنادق لكسب الزبائن في عواصم إحدى الدول ، الأرقام بمئات الملايين من الدولارات

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 4 & -8 & -10 \\ -10 & -10 & 14- \end{bmatrix}$$

هل من هيمنة بين الاستراتيجيات

ما هي الإستراتيجية المثلى لكلا الشركتين وقيمة المباراة . أوجد الحل بيانياً .

5 . أوجد الحل الأمثل للمباريات التالية :

$$G_1 = \begin{bmatrix} 18 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix}
5 & 4 & 5 \\
16 & 3 & 2
\end{bmatrix}
$$

$$
G_2 = \begin{bmatrix}
-1 & 6 & -2 \\
2 & 4 & 6 \\
-2 & -6 & 12
\end{bmatrix}
$$

$$
G_3 = \begin{bmatrix}
2 & 0 \\
1 & 3
\end{bmatrix}
$$

$$
G_4 = \begin{bmatrix}
2 & 1 & 2 & 2 \\
1 & 2 & -1 & 3 \\
2 & -3 & -1 & -4
\end{bmatrix}
$$

6 . تتنافسان مؤسستان في سوق معين وكل مؤسسة تستطيع أن نختار للترويج عن بضاعتها ، أما عن طريق التلفزيون أو عن طريق الجرائد إذا علمت أن حصص المؤسستين في السوق وفقاً للطرق الدعائية معطاة في :

المؤسسة B

المؤسسة A

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} J & TV \end{array} \\
\begin{array}{c} J \\ TV \end{array} & \begin{bmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.50 & 0.70 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

فما هي الإستراتيجية المثلى لكل مؤسسة حول استخدام التلفزيون والجرائد في ترويج بضائعها .

7 . شركتان بصدد اتخاذ قرار للإعلان عن منتجاتها المتنافسة ويمكن لأي منها أن تعرض إنتاجها في السوق الأول أو في السوق الثاني ، فإذا عرضت الشركتان إنتاجهما في السوق نفسه فإن كل شركة ستبيع من منتجاتها بنسبة % 30 من المستهلكين وإن عرضت منتجاتها في سوق مختلف فإنها ستبيعه إلى % 50 من المستهلكين ، وقد قدر عدد مستهلكي السوق الأول بـ 40000 مستهلك وعدد مستهلكي السوق الثاني 60000 مستهلك

. إذا علمت أن كل شركة تهدف إلى جعل الفرق بين عدد زبائنها وزبائن الشركة المنافسة أكبر ما يمكن المطلوب تحليل هذه المباراة ورسم شجرتها وإيجاد مصفوفة العوائد ومن ثم الحل الأمثل لكل منهما .

8 . لنفرض أن شخصين A ، B يلعبان المباراة التالية :

يكتب كل منهما رقماً على ورقة ولا يراها الأخر ثم تكشف الورقتان معاً فإذا كان الرقمان فرديين فإن B يدفع لـ A مبلغ ثلاثة دولارات وإذا كان الرقمان زوجيين فإن B يدفع لـ A دولا واحد ، أما إذا كان الرقمين أحدهما زوجياً والأخر فردياً فإن A هو الذي يدفع لـ B دولارين والمطلوب :

1 . ارسم شجرة المباراة واكتب مصفوفة العوائد لهذه المباراة .

2 . أوجد الحل الأمثل للمباراة

9 . أوجد الحل الأمثل لكل من المباريات التالية باستخدام طريقة البرمجة الخطية :

$$G_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 10 & 20 & -20 & 13 \\ 12 & 14 & 0 & 15 \\ 7 & 2 & 18 & 19 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

10 . المصفوفة التالية :

تبين الاستراتيجيات الثلاث للدفاع الجوي لمقابلة طائرات العدو الذي يستخدم ثلاثة أساليب في الهجوم ، والمطلوب تحديد أفضل أسلوب للدفاع الجوي لإيقاع أكبر خسارة في طائرات العدو ثم إيجاد قيمة هذه الخسائر .

استراتيجيات الهجوم

استراتيجيات الدفاع الجوي

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.05 \\ 0.4 & 0.45 & 0.15 \\ 0.2 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

11 . تتنافس شركتان لصناعة الطائرات الحربية للحصول على أكبر عدد من الدول المشترية لطائرتها . إن الأسلوب المتبع لزيادة نصيب كل شركة في السوق هو استخدام أسلوب الدعاية وتتبع كل شركة ثلاثة خطط خاصة بالحملة الدعائية وتبين المصفوفة التالية نسبة عدد الدول للشركة الأولى A .

$$\begin{array}{c c} & B \\ A & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & -13 \\ 2 & 9 & -1 & -3 \\ 3 & 17 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

أوجد الاستراتيجيات الخاصة لكل شركة مع إيجاد القيمة المثلى للمنافسة .

12 . قررت قيادة الجيش في الدولة A مهاجمة المصنع الحربي الرئيسي للدولة B الواقع في ضواحي عاصمتها وقد بلغ ذلك إلى علم الدولة B وعلمت أن هذا الهجوم سيكون عن طريق الإنزال الجوي أو الإنزال البحري إلا أن القوة العسكرية التي تمتلكها B لا تسمح لها بحشد القوات اللازمة لكل من الهجومين (عند B من القوات ما يكفي لصد أحد الهجومين) ولكنها تستطيع مع ذلك أن تجهز كميناً لمواجهة الهجوم الآخر بعد انسحابه . إن الجيش المهاجم من A يمتلك القليل من الذخيرة وقد تبينت الحقائق التالية :

إذا تلاقى الجيشان فإن جيش A سينسحب وبذلك فإن B تكسب المعركة (خسائر A عندها تقدر بـ 15 $ مليون) . وإذا لم يلتق الجيشين عند المصنع فإن جيش A سيصل إلى المصنع ويكِبد B خسارة قدرها 200 $ مليون . هناك احتمال قدرة 0.7 بأن يصادف هذا الجيش في عودته كميناً سيكبده خسائر تقدر بـ 100 $ مليون . في حال الإنزال الجوي و 70 $ مليون في حال الإنزال البحري . صغ هذه المسألة كمباراة ذات مجموع صفري وأوجد الإستراتيجية المثلى

المباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين

Two Persons Nonzero Sum Games

مقدمة

تعرفنا أعلاه على شروط المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين وأهمها هو أن هذا النوع من المباريات يقتصر على شخصين فقط ، وأن عائد أحد الشخصين يساوي القيمة السالبة لعائد الشخص الآخر بحيث أن مجموع العائدين يساوي الصفر دوماً . وقد تعرفنا في أحد الأمثلة أعلاه وهو المثال (1- 2) على مباراة بين شخصين ولكنها ذات مجموع غير صفري (وهو مثال السجينين المتهمين بسرقة أحد محلات المجوهرات). وكما أشرنا في الفصل السابق فإن المباريات ذات المجموع غير الصفري تبدو أكثر واقعية من المباريات ذات المجموع الصفري إلا أننا (وكما سنرى في هذا الفصل) سنحتاج للمباريات ذات المجموع الصفري عند حل المباريات ذات المجموع غير الصفري .وتتلخص الفروق الرئيسية بين المباريات ذات المجموع الصفري ومقابلاتها ذات المجموع غير الصفري بالنقطتين التاليتين :

(i) إذا اعتبرنا عوائد كل من طرفي المباراة كما لو أنها عوائد لمباراة ذات مجموع صفري وذلك بتطبيق مبدأ أكبر الأقل (Maxmin) فإن الحل الذي نحصل عليه لا يكون بالضرورة نقطة توازن [نذكر بالتعريف (2 . 2)] .

(ii) إذا وجد للمباراة ذات المجموع غير الصفري أكثر من نقطة توازن فليس من الضروري أن تتساوى العوائد المتوقعة عند هذه النقاط .

وقبل الدخول في شرح ما تعنيه هذه الفروق دعنا أولاً نذكر بتعريف نقاط التوازن لمباراة ذات مجموع غير صفري لشخصين A وB .

تعريف (3 . 1)

لنرمز بـ S_A ، T_B لمجموعة الاستراتيجيات الممكنة للاعبين A و B على الترتيب . نقول عن الاستراتيجية (X^*, Y^*) أنها **نقطة توازن** إذا تحقق الشرط التالي:

$$P_A(X, Y^*) \le P_A(X^*, Y^*) \text{ و } P_B(X^*, Y) \le P_B(X^*, Y^*) \qquad (3.1)$$

من أجل أي $X \in S_A$ و $Y \in T_B$ حيث $P_A(.\,,.)$ و $P_B(.\,,.)$ ترمز للعوائد المتوقعة لـ A و B على الترتيب .

ومن الناحية العملية, تكون النقطة $(X^*\,,\,Y^*)$ نقطة توازن للمباراة إذا لم يكن هناك حافز لأي من طرفي المباراة للتحول بمفرده من هذه النقطة لأي نقطة أخرى غير $(X^*\,,\,Y^*)$. وسنستعرض في هذا الفصل نوعين من المباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين .

أولاً : المباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين وغير التعاونية

Two person nonzero non-cooperative games

في هذا النوع من المباريات سيكون اهتمام كل من اللاعبين منصباً على جعل عوائده أكبر ما يمكن دون النظر إلى ما يحصل عليه اللاعب الخصم خلافاً لما هو عليه الحال في المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين حيث يسعى كل من اللاعبين إلى جعل عوائده أكبر ما يمكن وعوائد خصمه أقل ما يمكن . وفي كلا النوعين فإنه لا يوجد أي نوع من التعاون أو التنسيق أو التفاوض بين طرفي النزاع ، ولكن ثمة فروق رئيسية بينهما كما أشرنا أعلاه والتي سنوضحها في الفقرة التالية .ولكننا قبل ذلك سنورد الملاحظة التالية.

ملاحظة (13)

في هذا النوع من المباريات الثنائية وذات المجموع غير الصفري فإننا كثيرا ما نستخلص مصفوفة العوائد الخاصة بكل من A و B والتي سنرمز لهما بـ G_A و G_B على الترتيب من مصفوفة العوائد الثنائية. وسنحتاج للتعامل مع كلا من هاتين المصفوفتين كمباراة ذات مجموع صفري. ولذا فلا بد لنا عندئذ من أخذ منقول(Transpose) المصفوفة G_B لأن اللاعب B هو أصلا لاعب عمود في المباريات ذات المجموع الصفري ولابد من تحويله إلى لاعب سطر كما هي الحال للاعب A ولأننا نتعامل مع عوائد A فقط في المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين. وعندئذ نطلق على قيمة G_A اسم مستوى أمانِ A وقيمة منقول G_B اسم مستوى أمان B.وتبرير هذه التسمية يعود إلى أنه وفي المباريات ذات المجموع الصفري فإن أي من اللاعبين A و B لا يمكن أن يحصل على أقل ولا على أكثر من قيمة مباراته الصفرية والتي تساوي مستوى الأمان المشار إليه أعلاه.

(3 . 2) أمثلة توضيحية للفروق بين المباريات الصفرية وغير الصفرية

قبل إعطاء أمثلة فإننا نود الإشـــارة أولاً إلى أنه وكقاعدة عملية لإيجاد بعض نقاط التوازن (كإستراتيجيات خالصة فقط) لمباراة ذات مجموع غير صفري لشخصين والتي من الشكل 2×2 نقوم برسم أسهم باتجاه تزايد عوائد كل من اللاعبين A وB فتكون نقاط التقاء هذه الأسهم هي نقاط توازن *شريطة أن أيا منها يحقق الشرط (3.1)* . وعندما تكون مصفوفة المباراة من الشكل $m \times n$ حيث m أو n أكبر من 2 فإننا نطبق القاعدة على المصفوفات الجزئية 2×2 الناتجة .وبشكل عام فإن هذه القاعدة لا تعطي جميع نقاط التوازن كما سنرى أدناه .

مثال (3 . 1)

لنأخذ المباراة التالية بين اللاعبين A و B :

$$G = \uparrow \begin{bmatrix} (1,1) & \xrightarrow{} & (2,2) \\ (0,0) & \xrightarrow{} & (3,3) \end{bmatrix} \downarrow \quad A$$

$$B$$

وهي مباراة ثنائية ذات مجموع غير صفري لشخصين .وبحسب قاعدة الأسهم وعائدها (3,3) أعلاه فإن نقطة التوازن الوحيدة هي (A_2, B_2) وكذلك.

$$G_B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} , \quad G_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ولـــ G_A نقطة سرجيه هي 1 ، فمستوى أمان A هو $\upsilon_A = 1$ ولـــ G_B^t نقطة سرجيه هي 2 فمستوى أمان B هو $\upsilon_B = 2$. فباعتماد كل من اللاعبين مبدأ أكبر الأقل كطرف مســـتقل عن الآخر فإن قيمة المباراة هي نقطة الأمان s (1,2) .إن نقطة الأمان هي إســـتراتيجية مختلطة (لأن العائد (1,2) لا يقابل أي من الإستراتيجيات الثنائية في المصــفوفة G) يكون عندها $\upsilon_A = 1$ و $\upsilon_B = 2$. ولكننا وللسسهولة سنقول إن s (1,2) هي نقطة الأمان وسنقول إن النقطة (3,3) هي نقطة التوازن. ولكن لو لعب الطرفان إســـتراتيجيتين مقابلتين كطرفين غير مســـتقلين. فمثلا لو قام A بلعب الإستراتيجية A_1 وقام B بلعب الإستراتيجية B_2 فإن العائد المقابل هو (2,2) والذي يختلف عن

نقطة الأمان . كما أن نقطة التوازن الوحيدة للمباراة (3,3) تختلف عن نقطة الأمان (لاحظ أن (3,3 هي النقطة الوحيدة التي تحقق العلاقتين (3.1)) وهذا ما يؤكد مضــمون ما جاء في النقطة الأولى .

أما ما يخص النقطة الثانية فقد أثبت ناش

نظرية (3 . 1)

في أي مباراة لشــخصــين ســـــــواءً كانت ذات مجموع صــفري أو غير صــفري . إذا كان عدد الاستراتيجيات الخالصة لكلا اللاعبين منتهياً فإن لهذه المباراة نقطة توازن واحدة على الأقل .

فحســب ما رأيناه في الفصــل الخاص بالمباريات ذات المجموع الصــفري لشــخصــين فإن لكل مباراة نقطة توازن واحدة على الأقل هي أحد حلول تلك المباراة .كذلك فقد وجدت نقطة توازن للمباراة في مثال (3 . 1) أعلاه . أما تعدد نقاط التوازن واختلاف القيم المتوقعة فيوضحه المثال التالي .

مثال (3 . 2)

لو أخذنا المباراة :

$$G = \begin{bmatrix} (4,2) & \leftarrow & (0,0) & \leftrightarrow & (0,0) \\ \uparrow & & \downarrow & & \updownarrow \\ (0,0) & \rightarrow & (3,3) & \leftarrow & (0,0) \\ \updownarrow & & \uparrow & & \downarrow \\ (0,0) & \leftrightarrow & (0.0) & \rightarrow & (2,4) \end{bmatrix}$$

فحسب ما ورد في قاعدة الأسهم أعلاه فإن كلاً من النقاط (4,2) ، (3,3) و (2,4) هي نقطـــة توازن للمباراة وهي تقابل الاستراتيجيات (A_1,B_1) و (A_2,B_2) و (A_3,B_3) على الترتيب . ولتبرير أن كل من النقاط الثلاث الأولى هو نقطة توازن ، لنأخذ النقطة (4,2) والتي تقابل اختيار A للاســتراتيجية A_1 واختيار B للاســتراتيجية B_1 فلو أراد A التحول من A_1 إلى A_2 أو A_3 وبقي B على B_1 فإن عائده ســيتراجع من 4 إلى 0 ولو أراد B التحول من B_1 إلى

B_2 أو B_3 وبقي A على A_1 فإن عائده ســـيتراجع من 2 إلى 0 . فلا يوجد إذاً حافز لأي من الطرفين A و B للتحول بمفرده عن (A_1, B_1) إلى أي اســـتراتيجية أخرى الأمر الذي يبرر كون (A_1,B_1) هي نقطة توازن . ويمكن تبرير أن (A_2,B_2) و (A_3,B_3) هي نقاط توازن بطريقة مماثلة . لاحظ اختلاف العوائد عند نقاط التوازن هذا الأمر الذي يعطيها أفضلية مختلفة لدى الطرفين A و B . فمن الواضح أن A يفضل (4,2) المقابلة لـــ (A_1,B_1) بينما يفضل B (2,4) المقابلة لـ(A_3, B_3) . وفي مثل هذه الحالة قد يتوصل الطرفان A و B لاختيار نقطة التوازن التي تقود إلى حل مرضي لكل منهما وهي بالطبع النقطة (3,3) التي تقابل الاستراتيجية (A_2,B_2) .

وقد أشار شيلنج Schelling إلى مثل هذه الاستراتيجية وأعطاها اسم " **استراتيجية بارزة** " (Prominent) . وقد يُستدل من المثالين أعلاه للمباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين أنه إذا وجدت نقطة توازن وحيدة للمباراة فإن هذه النقطة هي حل مناسب لهذه المباراة أما إذا وجد أكثر من نقطة توازن وكان أحدها يمثل استراتيجية بارزة فإن هذه الأخيرة قد تكون حلاً مناسباً للمباراة . ولكننا قد نصادف الكثير من المباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين التي تكون نقاط توازنها ليست من النوع الذي وجدناه في المثالين أعلاه ولتوضيح ذلك نسوق المثالين التاليين :

مثال (3 . 3)

لو أخذنا المباراة التالية بين A و B

$$G = \begin{bmatrix} (4,2) & (0,0) \\ (0,0) & (2,4) \end{bmatrix}$$

فيمكننا التأكد بسهولة أن كلاً من النقطتين (4,2) و (2,4) هي نقطة توازن لهذه المباراة ومع ذلك فأي منهما لا يمثل استراتيجية بارزة فهل سيختار الطرفين الاستراتيجية (A_1, B_1) التي هي في صالح الطرف A أم سيختاران الاستراتيجية (A_2,B_2) التي هي في صالح الطرف B ؟ ويبقى الجواب في مثل هذه الحالة غير معروف .

مثال (3 . 4)

بالعودة إلى مثال السجينين المتهمين بسرقة أحد محلات المجوهرات فقد وجدنا أن مصفوفة المباراة هي [راجع مثال (1 . 2)] .

$$G = \begin{bmatrix} (-9,-9) & (-10,0) \\ (0,-10) & (-1,-1) \end{bmatrix}$$

فيمكننا التأكد بســــهولة أن النقطة (9-,9-) والتي تقابل الاســــتراتيجية (A_1,B_1) هي نقطة التوازن الوحيدة لهذه المباراة . ومن الواضـح أن هذه النقطة ليسـت حلاً مقنعاً للمباراة إذ أنه من الواضـح بأن النقطة (1-,1-) هي أفضل لطرفي المباراة من (9-,9-) .

ملاحظة (3 . 2)

إن إيجاد نقاط التوازن في المباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين بموجب التعريف (3 ـ 1) قد لا يكون دوماً بالسهولة التي وجدنا فيها نقاط التوازن في جميع الأمثلة أعلاه ، وعلاوة على ذلك فإن البحث عن نقاط التوازن بموجب هذا التعريف قد لا يوصـــلنا إلى جميع نقاط التوازن ولتوضـــيح ذلك نسوق المثال التالي :

مثال (3 . 5)

لو أخذنا المباراة التالية :

$$G = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} (2,1) & \leftarrow & (1,0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (-1,2) & \rightarrow & (3,3) \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x \\ \\ 1-x \end{array} \\ \begin{array}{ccc} y & \quad\quad & 1-y \end{array} & \end{array}$$

فمن الواضـــح أن التعريف (3 ـــ 1) يدل على أن النقطة (2,1) هي نقطة توازن لهذه المباراة .
والسؤال هنا :

هل توجد نقاط توازن أخرى للمباراة ؟

لقد أجاب **ســـواســـتكا** (Swastika) على جزء من هذا الســـؤال ، وقدم طريقة لإيجاد جميع نقاط التوازن للمباريات التي من الشـكل 2×2 وذات المجموع غير الصـفري لشـخصـين والتي سـنوضـحها فيما يلي :

(3.3) طريقة سواستكا لإيجاد نقاط التوازن للمباريات من الشكل 2×2 .

تقوم هذه الطريقة على التحليل التالي . بموجب التعريف (3 ـ 1) لدينا ما يلي : بالنسبة للاعب A عليه أن يبحث عن النقطة (X^*, Y^*) التي تحقق

$$P_A(X^*, Y^*) \geq P_A(X, Y^*) \text{ من أجل أي } X \in S_A$$

ويكافيء ذلك إيجاد النقطة (X^*, Y^*) التي تجعل الدالة $P_A(X, Y)$ أكبر ما يمكن من أجل قيمة محددة لـ Y (هي Y^*) . كذلك الأمر بالنسبة للاعب B ، فإن على اللاعب B أن يبحث عن النقطة (X^*, Y^*) التي تحقق

$$P_B(X^*, Y^*) \geq P_B(X, Y^*) \text{ من أجل أي } Y \in T_B$$

والذي يكافيء بدوره إلى إيجاد النقطة (X^*, Y^*) التي تجعل الدالة $P_B(X,Y)$ أكبر ما يمكن من أجل قيمة محددة لـ X (هي X^*) . ولما كانت المباراة من الشكل 2×2 فإن X ستكون من الشكل $X = (x, 1-x)$ و Y من الشـكل $Y = (y, 1-y)$. ففي مثالنا (3 ــــ 5) أعلاه نجد أن العوائد المتوقعة $P_A(X,Y)$ و $P_B(X,Y)$ هي كما يلي :

$$G_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P_A(X,Y) = X^T G_A Y = (x \;\; 1-x) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} =$$

$$= 2xy + x(1-y) + (-1)(1-x)y + 31 - x)(1-y)$$

$$= x(5y-2) + 3 - 4y$$

$$\Rightarrow P_A(X,Y) = x(5y-2) + 3 - 4y$$

$$G_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P_B(X,Y) = X^T G_B Y = (x\ 1-x)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{xy} + 0.\mathrm{x}(1-\mathrm{y}) + 2\mathrm{y}(1-\mathrm{x} + 3(1-\mathrm{y})(1-\mathrm{x}) =$$

$$= y(2x-1) + 3 - 3x$$

$$\Rightarrow P_B(X,Y) = y(2x-1) + 3 - 3x$$

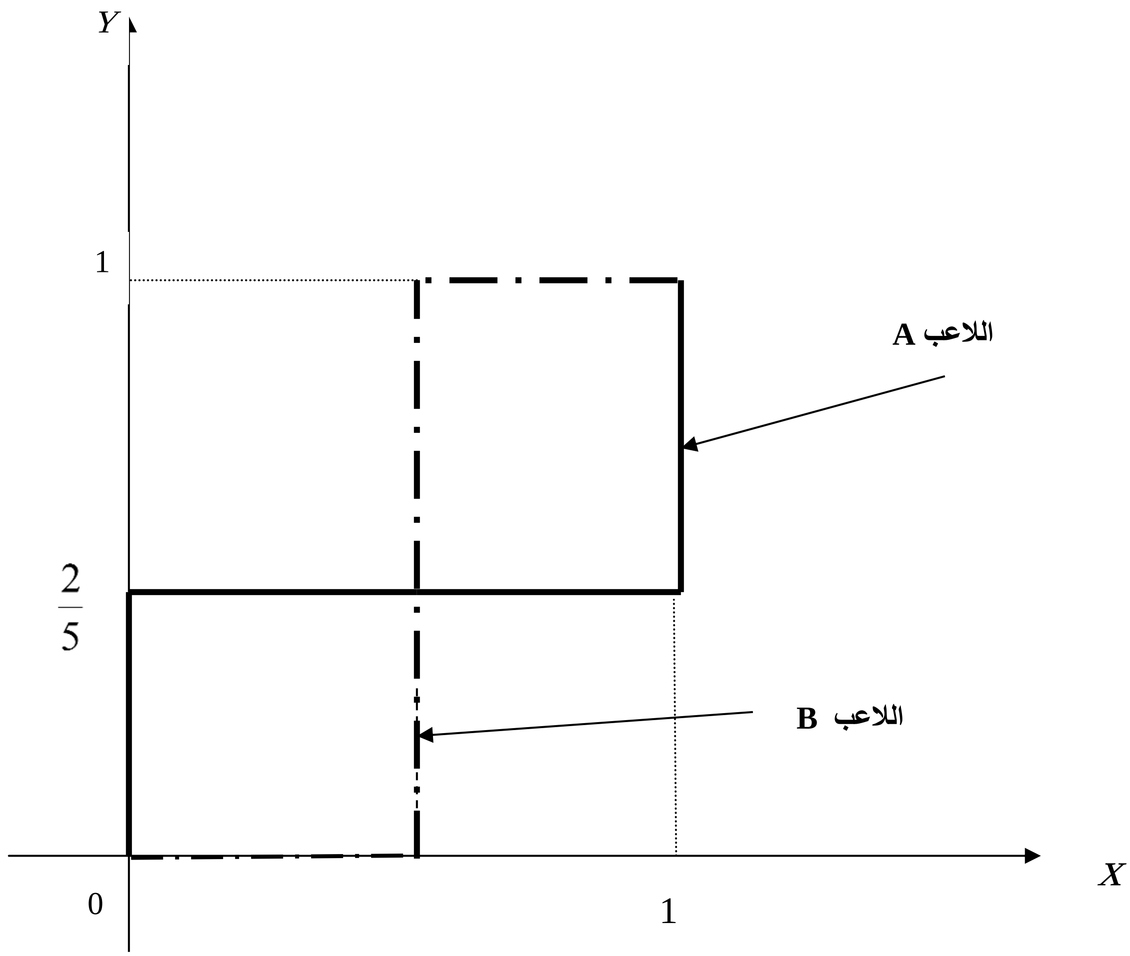
ففي الدالة P_A (x , y) وباعتبار أن قيمة y محددة فيمكن النظر إلى الدالة P_A (x , y) كدالة خطية في x وبالتالي فإن بلوغ هذه الدالة أكبر قيمة لها يتعلق بإشارة أمثال x كما يلي :

إذا كانت أمثال x سالبة أي $y < \frac{2}{5}$ فإن أكبر قيمة للدالة تقع عندما $x = 0$ أما إذا كانت أمثال x مساوية للصفر أي $y = \frac{2}{5}$ فإنها تبلغ قيماً كبرى متعددة من أجل أي $0 \le x \le 1$, وإذا كانت أمثال x موجبة أي $y > \frac{2}{5}$ فإن الدالة تبلغ قيمتها الكبرى عندما $x = 1$. وبذلك يصبح الخط البياني للحلول كما في الشكل (1.3) (القسم المطموس)

و بالمثل وفي الدالة P_B (x,y) وباعتبار أن قيمة x محددة نجد ما يلي :

إذا كان $x < \frac{1}{2}$ فإن هذه الدالة تبلغ أكبر قيمة لها عندما $y = 0$ وإذا كان $x = \frac{1}{2}$ فإن جميع القيم $0 \le y \le 1$ هي قيم كبرى لهذه الدالة ، أما إذا كان $x > \frac{1}{2}$ فإن الدالة تبلغ قيمتها الكبرى عندما y

1 = . وبذلك فإن الخط البياني للحلول هو القسم المنقط المطموس في الشكل (1.3) . وبموجب التعريف (1.3) القاضي بوجوب تحقق المتباينتين (3.1) فإن نقاط تقاطع الخطين البيانيين هي



نقاط توازن للمباراة G في المثال (5.3) وهذه النقاط هي (0,0) ، $(\frac{1}{2},\frac{2}{5})$ ، (1,1) . أما الاستراتيجيات والعوائد المقابلة لهذه النقاط فهي على النحو التالي :

. النقطة $(x = 0 , y = 0)$ تقابل الاستراتيجية (X,Y) حيث $X = (0,1)$ و $Y = (0,1)$ والعائد المقابل هو (3,3) أي أنها تقابل الاستراتيجية (A_2 , B_2) وهي ما سبق وأوجدناها مباشرة من مصفوفة العوائد .

. النقطة $(x=\frac{1}{2}\ ,\ y=\frac{2}{5})$ تقابل الإستراتيجية (X,Y) حيث $X=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ و $Y=(\frac{2}{5},\frac{3}{5})$ والعائد المقابل هو $(\frac{7}{5},\frac{3}{2})$ فهي إستراتيجية مختلطة .

. النقطة (x = 1 , y = 1) تقابل الاستراتيجية (X,Y) حيث X = (1,0) و Y = (1,0) والعائد المقابل هو (2,1) أي أنها تقابل الاستراتيجية (A_1, B_1).

ثانياً : المباريات التعاونية (التفاوضية)

Cooperative Games

بالعودة إلى مثال 4.3 (مثال السجينين المتهمين بسرقة أحد محلات المجوهرات) فقد وجدنا أن النقطة (9-,9-) والتي تقابل الاستراتيجية (A_1 , B_1) (أي كلاهما يعترف بالسرقة) هي نقطة التوازن الوحيدة للمباراة ، وقد أشرنا أن هذا الحل غير مقنع لطرفي المباراة إذ أن النقطة (1- , 1-) والتي تقابل الاستراتيجية (A_2 , B_2) أي عدم الاعتراف لكل منهما هي الأفضل . ومن الواضح أنه لم يكن بالإمكان الوصول إلى مثل هذه الاستراتيجية إلا بالتنسيق والتعاون بين السجينين . ولمزيد من الإيضاح لايجابيات التعاون بين أطراف النزاع والتي تستلزم عمليات تفاوضية تستند إلى معايير مختلفة نسوق المثال التالي والذي سندرسه بشيء من التفصيل .

مثال (3 . 6)

تتنافس شركتان A و B لأجهزة الهاتف الجوال على تسويق الاشتراكات لدى إحدى الدول . ولكل من الشركتين استراتيجيتين ممكنتين للتسويق ، وقد تبين لكل منهما أن العوائد المقابلة للاستراتيجيات المختلفة تعطي كما في المصفوفة التالية (الأرقام بمليارات الدولارات) .

$$G = \begin{bmatrix} (-2\ ,\ 2) & (1\ ,\ -2) \\ (3\ ,\ 1) & (0\ ,\ 5) \end{bmatrix}$$

مثلاً العائد (3 , 1) يعني أنه لو اُستخدمت الاستراتيجية (A_2 , B_1) فإن الشركة A تربح 3 مليارات دولار بينما تربح الشركة B مليار دولار. وكما هو ملاحظ فإنه باستثناء العوائد المقابلة للاستراتيجية (A_1 , B_1) فإن مجموع العوائد المقابلة لكل استراتيجية ليس صفراً ، كما أنه لا توجد

لهذه المباراة نقطة توازن يمكن إيجادها مباشرة من المباراة بطريقة الأسهم, إلا أن طريقة **سواستكا** ستقود إلى نقطة التوازن الوحيدة (X^*,Y^*) حيث $X^* = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ، $Y^* = (\frac{1}{6},\frac{5}{6})$ والتي تقود إلى العائد $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ (تحقق من ذلك) . والسؤال الآن ما هي الاستراتيجية المثلى لكل من الشركتين ؟

وللإجابة :نلاحظ أن أي من الشركتين لن يقبل أن تستخدم الأخرى إحدى الاستراتيجيات الأربعة المقابلة للعوائد الأربع المعطاة في المصفوفة G ويعود السبب في ذلك إلى التحليل التالي :

لو قامت الشركة B باستخدام الاستراتيجية (A_1 , B_1) فإن ذلك سيؤدي إلى خسارة كبيرة للشركة A وكذلك لو قامت الشركة B باستخدام الاستراتيجية (A_2 , B_2)فإن ذلك سيحرم الشركة A من أي ربح . وبالمقابل فإنه لو قامت الشركة A باستخدام الاستراتيجية (A_1 , B_2) فسيؤدي ذلك إلى خسارة كبيرة للشركة B ولو قامت A باستخدام الاستراتيجية (A_2 , B_1) فسيؤدي ذلك إلى تقليل أرباح الشركة B . وينظر إلى مثل هذه الاستراتيجيات التي تقود إلى ربح أحد اللاعبين وخسارة الأخر أو تلك التي تؤدي إلى ربح أكبر لأحد اللاعبين وربح أقل بكثير للاعب الأخر بأنها **استراتيجيات تهديديه** (Threat Strategies) . ولذا فإنه في مثل هذا النوع من المباريات (ذات المجموع غير الصفري) يكون من المنطقي أن يكون هناك **تفاوض** أو **مساومة** (Bargaining) بين اللاعبين لمصلحتهما المشتركة حيث يطمح كل من اللاعبين عندئذ بالحصول على عائد أفضل ولذا فإنه يطلق على هذا النوع من المباريات أيضاً اسم " **المباريات التفاوضية** " . وتثير عملية التفاوض هذه سؤالاً آخر هو ؟

ما دمنا سنتفاوض فمن أي نقطة (أو على أي أساس) نبدأ التفاوض ؟

للإجابة: نعرّف أولاً النقطة التي تبنى عليها عملية التفاوض بأنها" **نقطة الوضع الراهن** " (Status Quo Point) . وهناك عدة إمكانيات لنقطة الوضع الراهن . فقد يصّر أحد اللاعبين استخدام ما أسميناه " استراتيجية تهديديه " وعندئذ تكون هذه الاستراتيجية التهديديه هي نقطة الوضع الراهن مع ما لهذه النقطة من مخاطر على أحد اللاعبين. ولذا فقد لا يفضل أي من اللاعبين أن يختار هذه النقطة كأساس للتفاوض . وما هو منطقي لكلا اللاعبين في هذه الحالة أن ينطلق اللاعبان من نقطة لا يقبل أي منهما أن يحصل على عائد أقل من العائد في هذه النقطة . ويطلق على مثل هذه النقطة اسم "**نقطة الأمان**"(Security Point) وهي ذات النقطة التي نوهنا عنها أعلاه .

والفلسفة القائمة وراء اختيار نقطة الأمان هذه كأساس للتفاوض هو " أن يعتبر كل من اللاعبين العوائد التي يحصل عليها كما لو أنها عوائد للعبة ذات مجموع صفري " ثم يحسب قيمة المباراة الناتجة فعندئذ تكون هذه القيمة هي أقل ما يمكن أن يحصل عليه هذا اللاعب مهما كانت الاستراتيجية التي ينتهجها اللاعب الأخر . ففي مثالنا أعلاه فإن عوائد اللاعبين (الشركتين) A و B تعطيان بالمصفوفتين التاليتين على الترتيب G_B , G_A :

$$G_B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad G_A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3/6 \\ 3/6 \end{array}$$

ولإجراء الحسابات المتعلقة بـ G_B لابد من أخذ منقول G_B أي :

$$G_B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 7/8 \\ 1/8 \end{array}$$

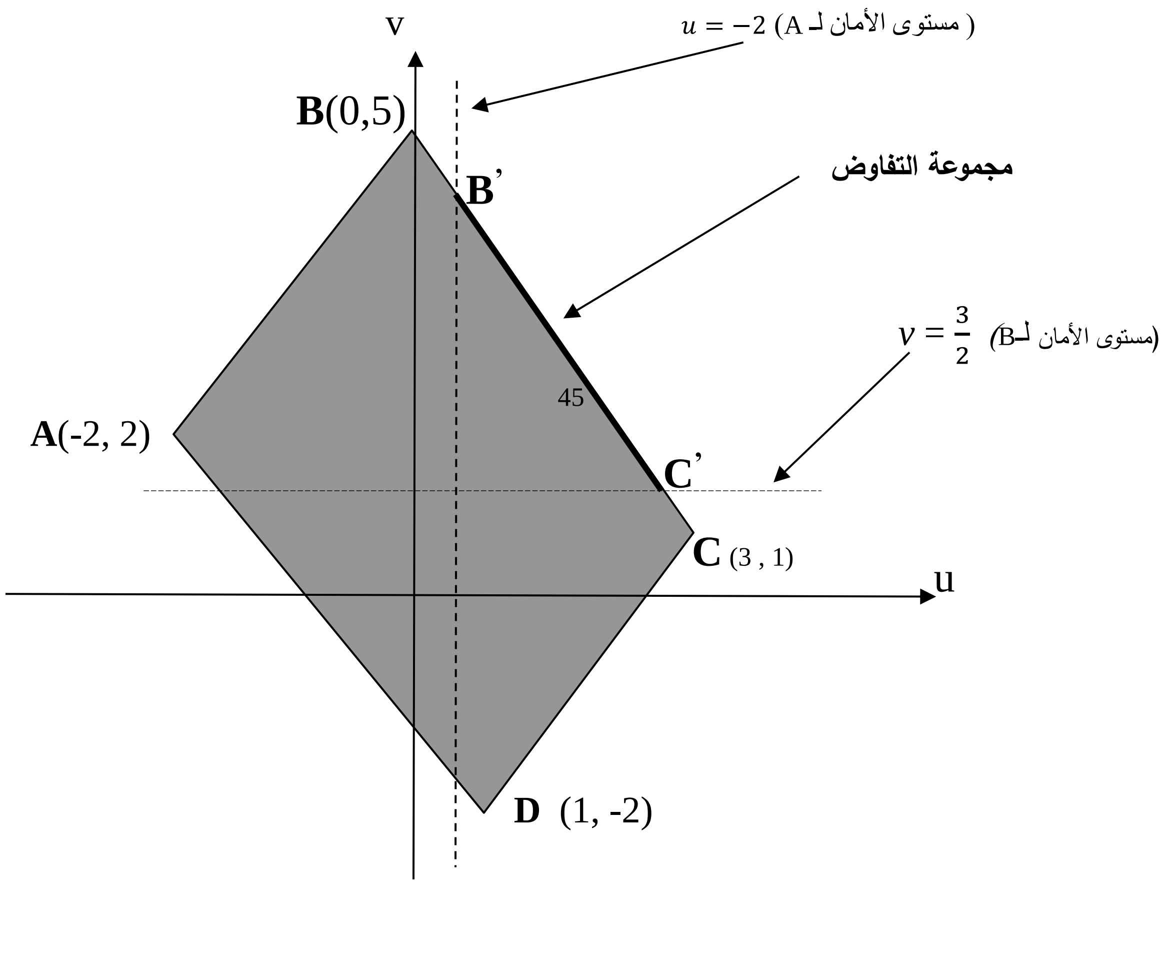
وذلك لجعل اللاعب B كما لو أنه يلعب مباراة ذات مجموع صفري ونوجد قيمة المباراة الخاصة به من المصفوفة G_B^t وليس من المصفوفة G_B كما نوهنا أعلاه.
ولا توجد لأي من المصفوفتين نقطة سرجيه وبإجراء الحسابات نجد أن قيم المباراتين (ذات المجموع الصفري) الممثلتين بالمصفوفتين G_B^t وG_A هو $u_A = \frac{1}{2}$ و $\upsilon_B = \frac{3}{2}$ على الترتيب وبذلك فإن نقطة الأمان للشركتين هي $S = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ والتي تعني أن اللاعب A لن يقبل بأي استراتيجية تجعل عائده أقل من $\frac{1}{2}$. كما أن اللاعب B لن يقبل بأي استراتيجية تجعل عائده أقل من $\frac{3}{2}$. كذلك وكما ذكرنا أعلاه فقد اصطلح على تسمية القيمة $u_A = \frac{1}{2}$ **مستوى الأمان** (Security Level) للاعب A وعلى القيمة $\upsilon_B = \frac{3}{2}$ مستوى الأمان للاعب B . (لاحظ أن النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ تقابل نقطة توازن للمباراة

وأنها تقابل استراتيجية مختلطة كما وجدنا أعلاه مع أن هذا الأمر قد لا يقع في الكثير من المباريات كما أشرنا في الفرق الرئيس (i) في مطلع هذا الفصل) .

(4 . 3) التمثيل البياني للمباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين

يمكن تمثيل كل العوائد المتوقعة للاعبين في حالة التفاوض بمضلع يطلق عليه **مضلع المباراة** (Game Polygon) أو **مضلع العوائد** (Payoff Polygon) .

ففي مثال الشركتين A و B أعلاه فإن مضلع العوائد يعطي كما في الشكل (2 . 3) .



شكل (2 . 3) مضلع العوائد لمثال (3 . 6)

كما نلاحظ فإن هذا المضلع هو مجموعة محدبة ويعني ذلك أن أي نقطة في داخل المضلع (مثل نقطة الأمان أو غيرها) أو على محيطه يمكن تمثيلها كعبارة محدبة في استراتيجيتين خالصتين أو مختلطتين أو إحداهما خالصة والأخرى مختلطة . (لمزيد من المعرفة حول العبارات المحدبة راجع " الملحق " في نهاية الكتاب) .

أما مستويات الأمان فيمكن تمثيلها على هذا المضلع بالمستقيمين (المنقطين)

$u = \frac{1}{2}$ (المستقيم الذي يمثل مستوى الأمان للشركة A) .

$v = \frac{3}{2}$ (المستقيم الذي يمثل مستوى الأمان للشركة B) .

(3 . 5) فئة التفاوض.

بشكل عام تعرف فئة التفاوض بأنها أي مجموعة جزئية من مضلع العوائد يمكن للاعبين أن يختاروا منها استراتيجية تعطي عوائد مقبولة لدى طرفي النزاع. وبشكل عام أيضاً فإن لهذه الفئة علاقة بما أسميناه نقطة الوضع الراهن . وسنوضح ذلك من خلال المثال (3 . 6) . إن اللاعب (الشركة) A يطمح بأن يحصل على عائد يقع على يمين المستقيم $u = \frac{1}{2}$ كما أن اللاعب (الشركة) B يطمح بأن يحصل على عائد فوق المستقيم $v = \frac{3}{2}$. أي أن الشركتين تطمحان بأن تحصلا على عوائد تقع على قطعة المستقيم $B'C'$. وتسمى العوائد الممثلة بنقاط القطعة المستقيمة $B'C'$ باسم :

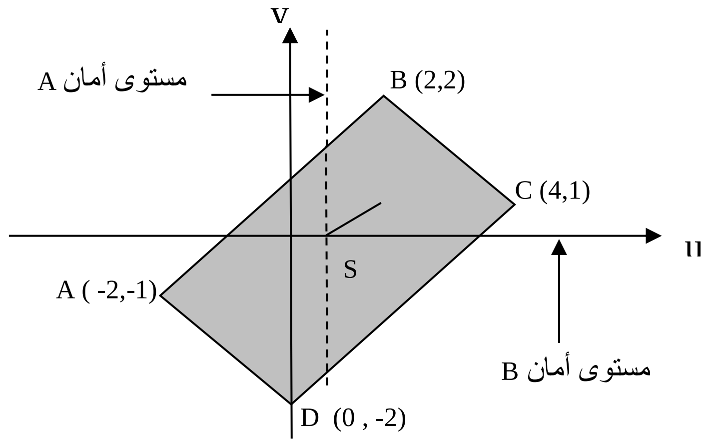
مجموعة التفاوض (Negotiation set)أو **فئة التفاوض** (Bargaining Set)

ونقوم عادة بالإشارة إلى فئة التفاوض وذلك بطمسها(Bold) على مضلع العوائد.

مثال (3 . 7)

لدينا المباراة (ذات المجموع غير الصفري) التالية للاعبين A و B .

$$G = \begin{bmatrix} (0\ ,\ -2) & (2\ ,\ 2) \\ & \\ (4\ ,\ 1) & (-2\ ,\ -1) \end{bmatrix}$$



شكل (3 . 3)

المطلوب تحديد كلاً من مستوى الأمان ، وفئة التفاوض للاعبين .

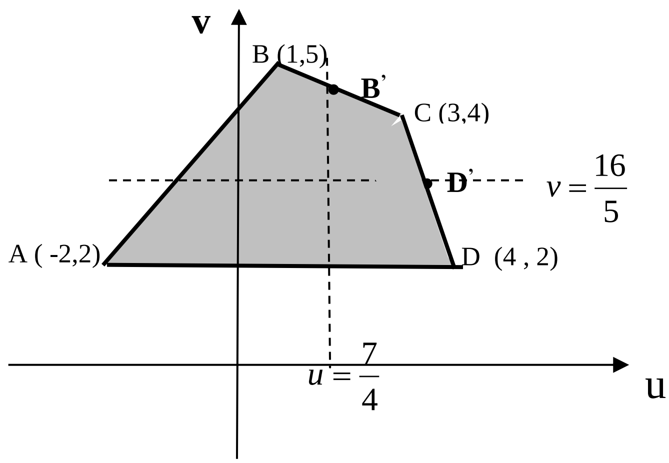
الحـل

إن مضلع العوائد هو داخل ومحيط المضلع ABCD الموضح بالشكل (3 . 3) . ويمكننا التحقق أن نقطة الأمان هي النقطة $s= (1,0)$. وبذلك فإن مستوى أمان A هو $u_A = 1$ ومستوى أمان B هو $v_B = 0$. ولتحديد فئة التفاوض نلاحظ أنها ممثلة بالقطعة المستقيمة BC فقط .

مثال (3 . 8)

أوجد مستوى الأمان وفئة التفاوض للمباراة ذات المجموع غير الصفري التالية :

$$G = \begin{bmatrix} (-2 , 2) & (1 , 5) \\ (3 , 4) & (4 , 2) \end{bmatrix}$$



شكل (4 . 3)

الحـل

إن مضلع العوائد هو داخل ومحيط المضلع ABCD شكل (4 . 3) .

وبحساب قيم المباريات الصفرية لكلا اللاعبين نجد أن مستوى الأمان للاعب A هو $u_A = \frac{7}{4}$ ومستوى الأمان للاعب B هو $v_B = \frac{16}{5}$ الموضحان على الشكل (4 . 3) . وفي هذه الحالة فإن فئة التفاوض تتألف من القطعتين B'C و CD' لأنهما الجزء الأبعد من مضلع العوائد .

نقطة الوضع الراهن

ألمحنا فيما سبق أن نقطة الوضع الراهن قد تكون أي عوائد تهديديه أو أنها قد تكون نقطة الأمان . وبعد أن تعرفنا على ما أسميناه مضلع العوائد نعّرف " نقطة الوضع الراهن " بشكل أعم بأنها " أي نقطة من مضلع العوائد " . وكما هو واضح من اسمها بأن هذه النقطة يجب أن تعكس الوضع الراهن للاعبين أي أنها يجب أن تعكس الوضع التفاوضي لكلا اللاعبين كأن يكون أحدهما في مركز أقوى من الأخر . ويرى البعض أن تكون هذه النقطة هي " الحد الأدنى المقبول لكلا الطرفين " كما يرى آخرون أن " نقطة الأمان " هي نقطة مناسبة كأساس للتفاوض وذلك لأنها تأخذ بعين الاعتبار كل العوائد في مصفوفة المباراة عند حسابها .

الإستراتيجية التهديديه المثلى

بالعودة إلى مثال (3 . 6) فقد ذكرنا أن لكل من اللاعبين استراتيجياته التهديديه الخاصة به . والسؤال الآن : لو أصرّ أحد اللاعبين على استخدام استراتيجية تهديديه فما هي الاستراتيجية التهديديه المثلى لهذا اللاعب ؟

قبل الإجابة يجب التنويه إلى أن الاستراتيجية التهديديه المثلى لأي من اللاعبين قد تكون إحدى الاستراتيجيات البحتة أو أنها استراتيجية مختلطة . وتتلخص عملية إيجاد مثل هذه الاستراتيجية المثلى للمباريات ذات المجموع غير الصفري للاعبين بما يلي :

1. إذا أردنا إيجاد الاستراتيجية التهديديه المثلي للاعب A (للاعب B) فإننا نطرح عوائد اللاعب B (اللاعب A) من مقابلاتها لـ A (لـ B) في مصفوفة المباراة ذات المجموع غير الصفري ونضع النواتج في أماكنها بنفس الترتيب لتعطينا بذلك مصفوفة خاصة بـ A (خاصة بـ B) .
2. نعتبر المصفوفة الخاصة بـ A (الخاصة بـ B) كما لو أنها مصفوفة خاصة بمباراة ذات مجموع صفري ثم نوجد الحل الأمثل لهذه الأخيرة .
3. نستنتج المباراة التهديديه المثلى للاعب A (للاعب B) من الحل الأمثل الذي حصلنا عليه في (2) .

فبالعودة إلى مثالنا (3 . 6) يمكننا إيجاد الاستراتيجية التهديديه المثلى لـ A كما يلي : بعد طرح عائدات B من مقابلاتها لـ A نحصل على المصفوفة التالية :

$$G_A^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \end{array}$$

وليس لهذه المباراة الصفرية نقطة سرجيه وحلها هو الاستراتيجية المختلطة $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. وتعني هذه النتيجة أن على اللاعب A (الشركة) أن يلعب (أن تطبق) كلاً من استراتيجياتها الاثنتين A_1 , A_2 نصف العدد من المرات والتي تمثل له (لها) أفضل استراتيجية تهديديه للاعب (الشركة) B .

أما بالنسبة للاعب (الشركة) B فنحصل على المباراة الصفرية التالية :

$$G_B^T = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

وكذلك ليس لهذه المباراة نقطة ســـرجيه وحلها هو الاســـتراتيجية المختلطة $\left(\frac{4}{7},\frac{3}{7}\right)$ والتي تعني أن أفضــل اســتراتيجية تهديديه للاعب (الشــركة) B هو أن يلعب (أن تطبق) اســتراتيجيته الأولى B_1 ، $\frac{4}{7}$ المرات ويلعب استراتيجيته الثانية B_2 ، $\frac{3}{7}$ من المرات .

.

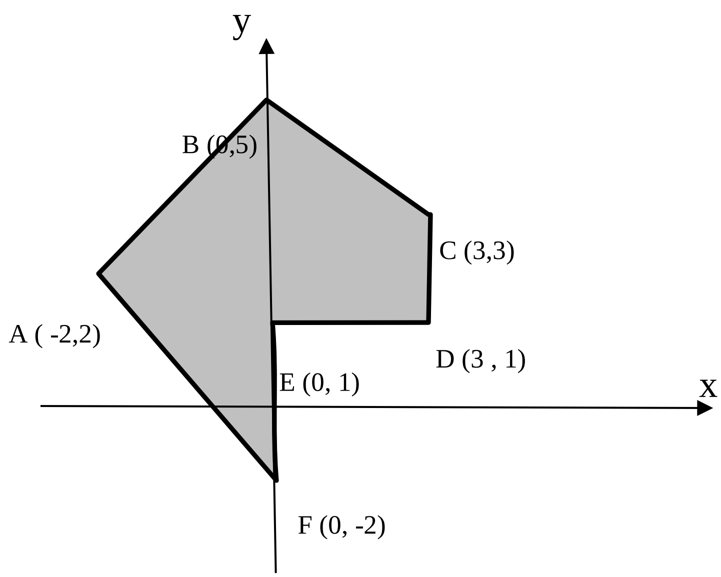
ملاحظة (3 . 2)

ألمحنا أعلاه على أنه لدى تمثيل مضلع العوائد بيانياً فعلينا أن نحرص على أن يكون هذا المضلع هو مجموعة محدبة . وسنوضح ذلك من خلال المثال التالي :

مثال (3 . 9)

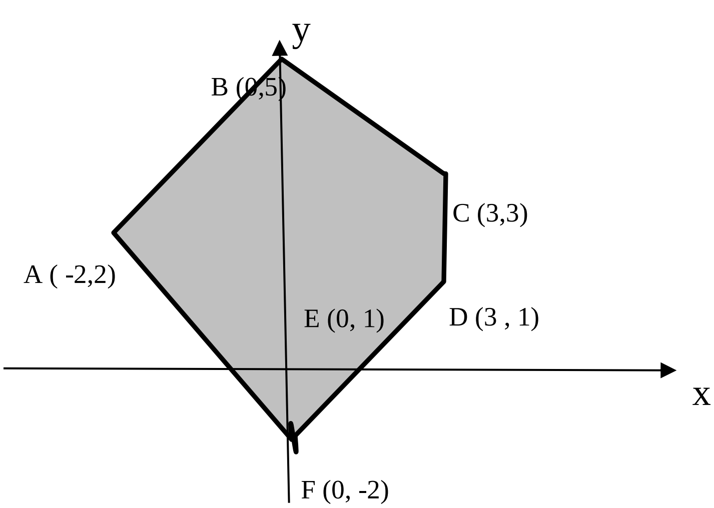
إذا أخذنا المباراة ذات المجموع غير الصفري الممثلة بالمصفوفة G أدناه نجد أنه يمكننا تمثيل مضلع العوائد كما في الشكل(3 . 5) ABCDEF.

$$G = \begin{bmatrix} (0\,,5) & (-2\,,2) & (3\,,3) \\ (0\,,1) & (3\,,1) & (0\,,-2) \end{bmatrix}$$



شكل (5 . 3)

لكن المضلع ABCDEF ليس مجموعة محدبة. ليصبح مضلع محدب فنجعل النقطة E (0, 1) نقطة داخلية كما في الشكل (6.3)



شكل (6 . 3) تصحيح الوضع لشكل (5 . 3)

سنتعرف فيما يلي على بعض طرق الحل للمباريات التفاوضية ذات المجموع غير الصفري لشخصين . نشير أخيرا إلى أن اسم " المباريات التفاوضية " يطلق على مباريات الشخصين ذات المجموع غير الصفري ذلك أن التفاوض قد يلعب دوراً (في حال عدم وجود إستراتيجية تهديديه) في تحديد نقطة الوضع الراهن والذي يؤدي بدوره إلى تحديد فئة التفاوض . وهناك العديد من الطرق التي تم اقتراحها لحل المباريات التفاوضية نتعرف فيما يلي على بعض منها . ونود التأكيد هنا إلى أنه قبل الشروع في تطبيق أي من هذه الطرق فلا بد لنا أولاً من تحديد نقطة الوضع الراهن وفئة التفاوض بدقة .

طريقة ناش وشابلي حل المباريات التفاوضية ذات المجموع غير الصفري لشخصين . Shapley and Nash Method

نظرية (3 . 2):

إذا كانت (u_A , v_B) هي نقطة الوضع الراهن ، عندئذٍ توجد نقطة وحيدة (u^*, v^*) تحقق الشروط (ش1) إلى (ش6) وهذه النقطة هي التي تجعل الدالة التالية :

$$F(u,v) = (u - u_A)(v - v_B) \qquad (3.3)$$

أكبر ما يمكن وتحقق بنفس الوقت

$$u \geq u_A \;,\;\; v \geq v_B \qquad (3.4)$$

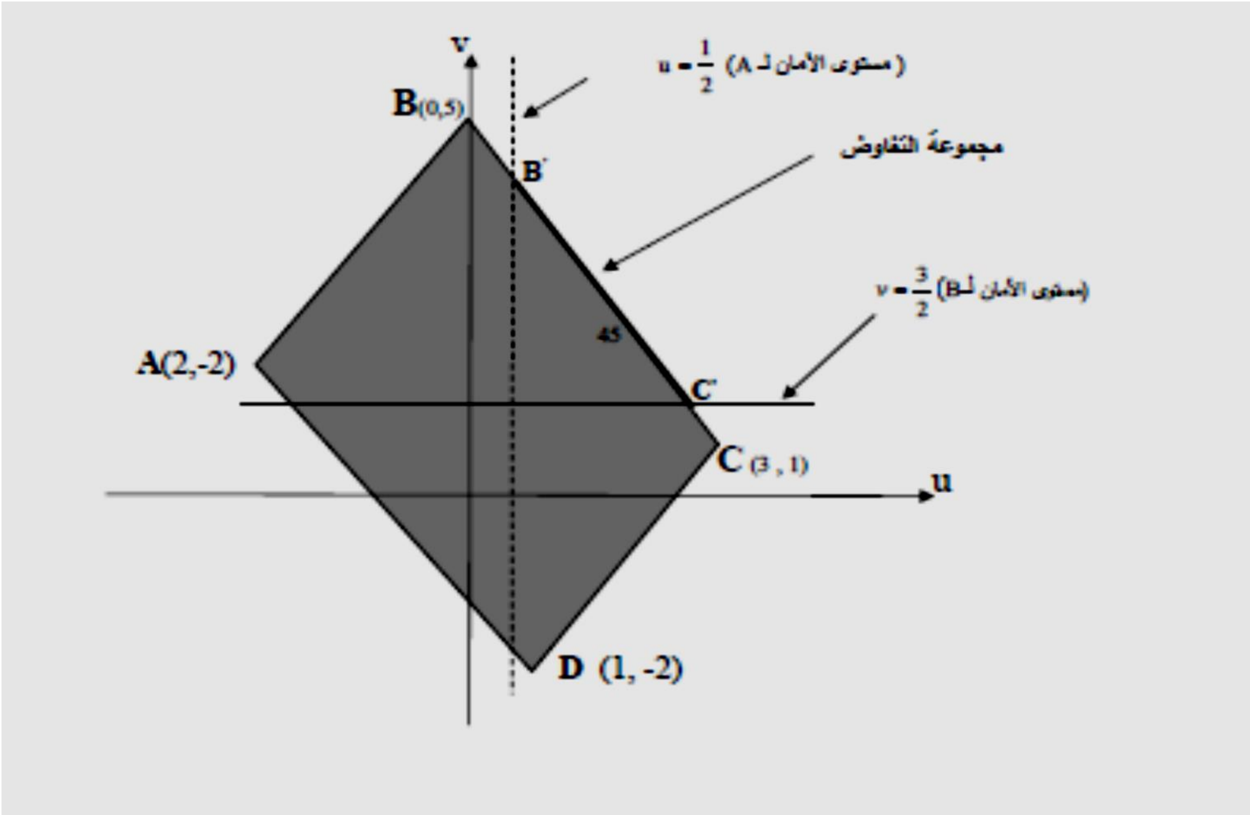
حيث (u, v) تنتمي لفئة التفاوض.

سنوضح الآن طريقة **ناش . شابلي** من خلال إعادة حل المثال (6.3) بهذه الطريقة.

مثال 1 :

بالعودة إلى مثال (6.3)

$$G = \begin{bmatrix} (-2 , 2) & (1 , -2) \\ (3 , 1) & (0 , 5) \end{bmatrix}$$



شكل (3 . 2) مضلع العوائد لمثال (3 . 6)

أوجد الحل الأمثل بطريقة **ناش . شابلي** معتبراً الحالتين التاليتين :

أ . نقطة الوضع الراهن هي نقطة الأمان $S = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

ب . نقطة الوضع الراهن هي الاستراتيجية التهديدية (2 , 2-) .

الحـل

أ . علمنا مما سبق أن الحل يجب أن يقع على حدود مضلع العوائد والذي سميناه فئة التفاوض وهو القطعة $B'C'$. وفي هذه الحالة فإنه يمكن تطبيق النظرية (3-2) أعلاه دون صعوبة . فعلينا في هـــــذه الحالة البحث عن النقطة (u^*, v^*) من فئة التفاوض $B'C'$ والتي تجعل الدالة (3.3) أكبر ما يمكن حيث $u_A = \frac{1}{2}$, $v_B = \frac{3}{2}$.

معادلة المستقيم المار بالنقطتين (0,5) B و (3,1) C والذي تقع عليه فئة التفاوض $B'C'$ هي :

$$\frac{v-1}{u-3} = \frac{5-1}{0-3} \quad \text{أو} \quad v = \frac{-4}{3}u + 5$$

ومنها نجد إحداثيات $B^{'}$ من أجل $u_A = \frac{1}{2}$ وإحداثيات $C^{'}$ من أجل $v_B = \frac{3}{2}$ و هي $C^{'} = \left(\frac{21}{8}, \frac{3}{2}\right)$, $B^{'} = \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{3}\right)$.

الآن يمكن تحويل الدالة

$$F(u,v) = \left(u - \tfrac{1}{2}\right)\left(v - \tfrac{3}{2}\right)$$

إلى دالة ذات متغير واحد وذلك بالاستفادة من العلاقة بين u , v على المستقيم BC الحامل لفئة التفاوض حيث وجدنا أن معادلة هذا المستقيم هي :

$$v = -\frac{4}{3}u + 5$$

وبذلك فإن :

$$F(u, v) = f(u) = (u - \frac{1}{2})(-\frac{4}{3}u + 5 - \frac{3}{2}) = -\frac{4}{3}u^2 + \frac{25}{6}u - \frac{7}{4}$$

ومن المعروف أن هذه الدالـة تبلـغ قيمتها الكبرى عند النقطة u^* التي تجعل $f^{'}(u) = 0$ و $f^{''}(u) < 0$.

الآن :

$$f^{'}(u) = -\frac{8}{3}u + \frac{25}{6} = 0 \qquad \text{ومنها نجد: } u^* = \frac{25}{16} = 1.5625$$

ولما كـــان $f^{''}(u) = -\frac{8}{3} < 0$ فــإن الدالـــة $F(u, v) = f(u)$ تبلــغ قيمتها الكبرى عنــد القيمــة $u^* = \frac{25}{16}$. ومن هذه القيمة ومعادلة المستقيم BC نجد :

$$v^* = -\frac{4}{3} \times \frac{25}{16} + 5 = \frac{35}{12} = 2.9166$$

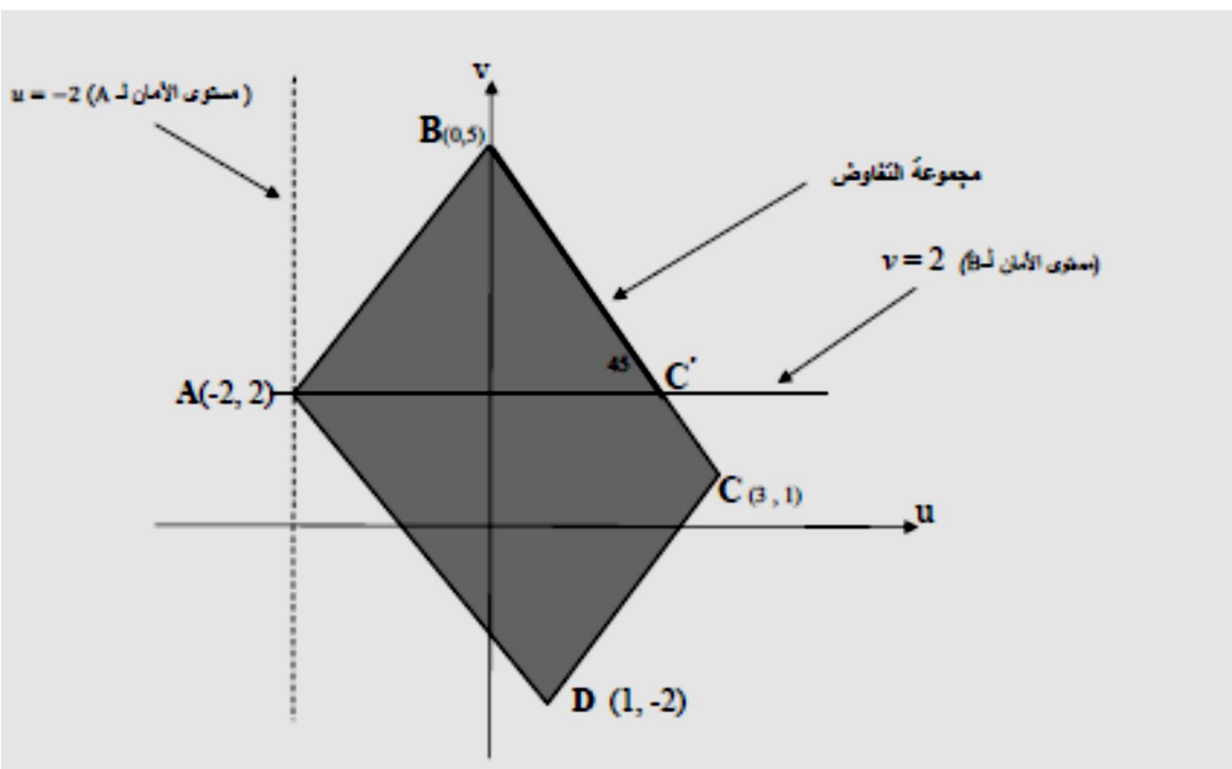
لاحظ أن $u^* = 1.5625 > u_A$ وأن $v^* = 2.9166 > v_B$

والحل الأمثل هنا هو إيجاد الاستراتيجية المختلطة المثلى التي تجعل عائد A يساوي $\frac{25}{16}$ وعائد B يساوي $\frac{35}{12}$. وهذه الاستراتيجية هي تركيب محدب أو عبارة محدبة للاستراتيجيتين الخالصتين (0 , 5) B و (3 , 1) C حيث يتعين علينا إيجاد قيمة λ بين الصفر والواحد التي يكون من أجلها $(u^*, v^*) = \lambda B + (1-\lambda)\, C$ والتي تكافئ

$$\begin{bmatrix} \frac{25}{16} \\ \frac{35}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1-\lambda) \\ 5\lambda + 1(1-\lambda) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 - 3\lambda = \frac{25}{16} \\ 4\lambda + 1 = \frac{35}{12} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda = \frac{23}{48}$$

وتعني هذه النتيجة أن على اللاعبين (الشركيتين) أن يلعبا (يطبقا) الاستراتيجية المختلطة $\left(\frac{23}{48}\,B\ ,\ \frac{25}{48}\,C\right)$ ليحصلا على العوائد $\left(\frac{25}{16}, \frac{35}{12}\right) = (u^*, v^*)$.

ب .



شكل (7 . 3) مضلع العوائد للمباراة G

لو قمنا برسم المستقيمين u = -2 و v = 2 [راجع شكل (3 − 7)] فإنه يجب أن يقع الحل على القطعة BC' حيث $C' = (\frac{9}{4}, 2)$,

$$F(u, v) = (u+2)(v-2) = (u+2)(-\frac{4}{3}u+3)$$

أو $$f(u) = -\frac{4}{3}u^2 + \frac{u}{3} + 6$$

ومنها $f'(u) = -\frac{8}{3}u + \frac{1}{3} = 0$ وتعطينا $u = \frac{1}{8}$ ، ويقابلها $v = \frac{29}{6}$ والنقطة الناتجة $\left(\frac{1}{8}, \frac{29}{6}\right) = (u^*, v^*)$ تجعل F (u , v) أكبر ما يمكن لأن $f''(u) = -\frac{8}{3} < 0$ كما أن هذه النقطة تقع على القطعة BC′ .

وهذه النقطة هي تركيب محدب أو عبارة محدبة للاستراتيجيتين الخالصتين

B (0 , 5) و C (3 , 1) حيث يتعين علينا إيجاد قيمة λ بين الصفر والواحد التي يكون من أجلها C والتي تكافئ $(u^*, v^*) = \lambda B + (1-\lambda)$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{29}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1-\lambda) \\ 5\lambda + 1(1-\lambda) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 - 3\lambda = \frac{1}{8} \\ 4\lambda + 1 = \frac{29}{6} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda = \frac{23}{24}$$

وتعني هذه النتيجة أن على اللاعبين (الشركيتين) أن يلعبا (يطبقا) الاستراتيجية المختلطة $\left(\frac{23}{24}B, \frac{1}{24}C\right)$ ليحصلا على العوائد $\left(\frac{1}{8}, \frac{29}{6}\right) = (u^*, v^*)$.

لاحظ أن عوائد اللاعب (الشـركة) B قد ارتفعت كثيراً في حين أن عوائد اللاعب (الشـركة A) قد انخفضت كثيراً وتبدو هذه النتيجة منطقية لأن الاستراتيجية (2 , 2-) هي أصلاً في غير صالح اللاعب (الشركة) A .

مثال 2 :

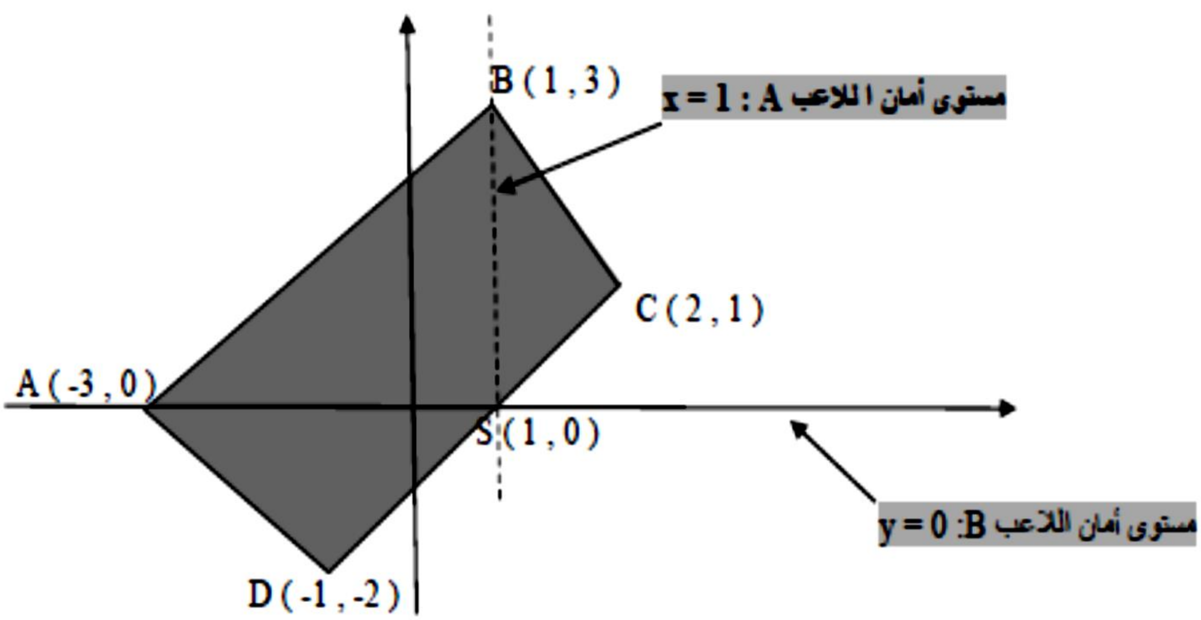
لدينا المباراة التالية ذات المجموع غير الصفري لشخصين

$$G = \begin{bmatrix} (-3 , 0) & (-1 , -2) \\ (2 , 1) & (1 , 3) \end{bmatrix}$$

المطلوب :

أ . إيجاد الحل الأمثل للمباراة بطريقة **شـــابلي** وذلك باعتبار أن نقطة الوضـــع الراهن هي نقطة الأمان .

ب . إيجاد الحل الأمثل للمباراة بطريقة ناش وذلك باعتبار أن نقطة الوضـــــع الراهن هي النقطة التهديديه (-2 , -1) .



شكل (9.3) مضلع العوائد لمثال (13.3)

الحـل

إن مضلع العوائد لهذه المباراة معطى كما في الشكل (3 . 9) .

أ . **طريقة شابلي :**

$$G_A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{Min} \\ -3 \\ 1 \end{matrix} \\ \text{Max} \quad \begin{matrix} 2 & 1 \end{matrix} & \end{array} \qquad \text{و} \qquad G_B = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{Max} \\ 0 \\ 3 \end{matrix} \\ \text{Min} \quad \begin{matrix} 0 & -2 \end{matrix} & \end{array}$$

وللأولى G_A نقطة سرجيه هي 1 كما أن للثانية نقطة سرجيه هي 0 . فنقطة الأمان هي $s = (1,0)$ وفئة التفاوض هي BC. فعلينا إذاً أن نبحث عن النقطة (u^*, v^*) على المســتقيم BC التي تجعل الدالة

$$F(u, v) = (u - 1)(v - 0)$$

أكبر ما يمكن .معادلة المســـــتقيم BC هي $v = -2u + 5$ ولذا علينا إيجاد u^* التي تجعل الدالة التالية أكبر ما يمكن

$$f(u) = (u-1)(-2u+5) = -2u^2 + 7u - 5$$

لدينا $f'(u) = -4u + 7 = 0$

وهذه تعطينا $(u^*, v^*) = \left(\frac{7}{4}, \frac{3}{2}\right)$ وهي تقابل قيمة كبرى للدالة $F(u, v)$ لأن $f''(u) = -4 < 0$. وهذه النقطة هي تركيب محدب أو عبارة محدبة للاستراتيجيتين الخالصتين $B\ (1, 3)$ و $C\ (2, 1)$ حيث يتعين علينا إيجاد قيمة λ بين الصفر والواحد التي يكون من أجلها $C\ (1-\lambda) + \lambda B = (u^*, v^*)$ والتي تكافئ

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda + 2 \\ 2\lambda + 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda + 2 = \frac{7}{4} \\ 2\lambda + 1 = \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$$

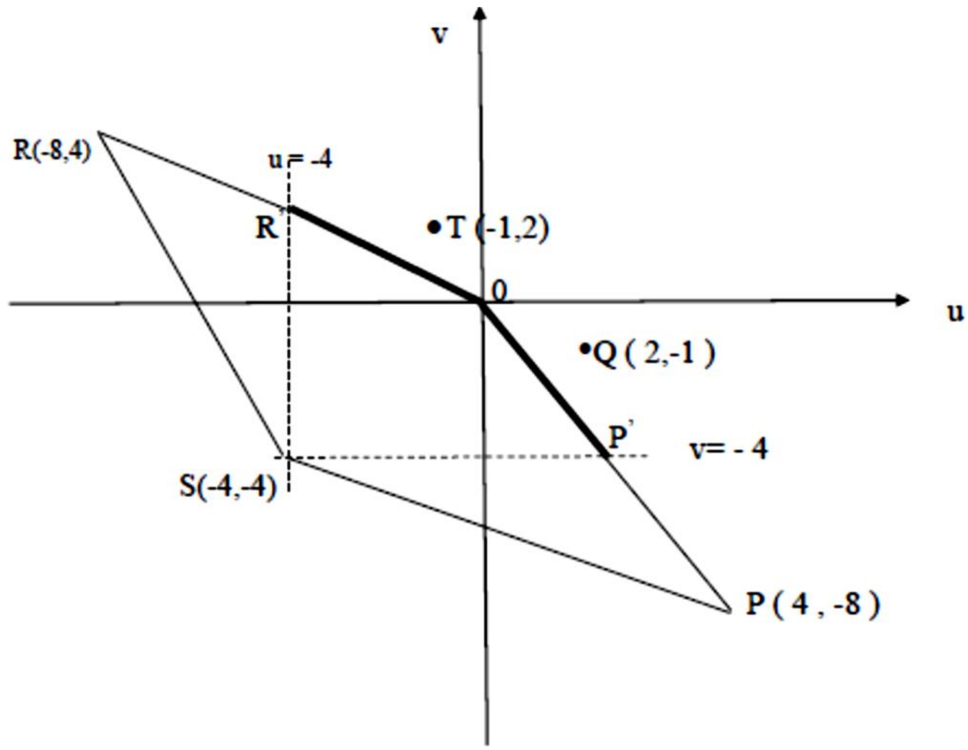
وتعني هذه النتيجة أن على اللاعبين (الشركيتين) أن يلعبا (يطبقا) الاستراتيجية المختلطة $\left(\frac{1}{4}\ B\ ,\ \frac{3}{4}\ C\right)$ ليحصلا على العوائد $\left(\frac{7}{4}\ ,\frac{3}{2}\right) = (\ u^{*}, v^{*})$.

مثال 3 :

لدينا المباراة التالية ذات المجموع غير الصفري لشخصين A و B

$$G = \begin{bmatrix} (-4,-4) & (4,-8) \\ (-8,4) & (0,0) \end{bmatrix}$$

فهل لهذه المباراة حلاً بطريقة **ناش . شابلي ؟**



شكل (3 . 10) مضلع العوائد لمثال (3 . 14)

الحــــل . إن مضلع العوائد لهذه المباراة معطى كما في الشكل (3-10) ويمكننا التحقق بسهولة أن نقطة الأمان هي (4- , 4-)S فإذا اعتبرنا أن هذه النقطة هي نقطة الوضع الراهن فإن فئة التفاوض تتكون من القطعتين R'O و P'O. وللحصول على الحل بطريقة **شابلي** علينا أن نجعل الدالة $F(u,v) = (u + 4)(v + 4)$ أكبر ما يمكن.

فلو أخذنا R'O نجد أن معادلة المستقيم المار بالنقطتين (4 , 8-) R و O (0 , 0) هي

$$\frac{v-4}{u+8} = \frac{-4}{8} \quad \text{أو} \quad v = -\frac{1}{2}u$$

فعلى المستقيم R'O نجد أن :

$$F(u,v) = f(u) = (u+4)(-\frac{1}{2}u+4)$$

أو

$$f(u) = -\frac{1}{2}u^2 + 2u + 16$$

ولما كان $f'(u) = -u + 2$ و $f''(u) = -1 < 0$

فإن أكبر قيمة للدالة f (u) تقع عند النقطة Q (2,-1) والتي تقع خارج مضلع العوائد .
ولو أخذنا P̓O نجد أن معادلته (معادلة المستقيم المار بالنقطتين O (0,0) و P (4,-8))
$v = -2u$. وعلى هذا المستقيم نجد أن

$$F(u,v) = f(u) = (u+4)(-2u+4) = -2u^2 - 4u + 16$$

ولما كان $f'(u) = -4u - 4$ و $f''(u) = -4 < 0$

فإن أكبر قيمة لهذه الدالة تقع عند النقطة T (-1 , 2) والتي تقع هي الأخرى خارج مضلع العوائد . فالحلين Q = (2 , -1) ، T = (-1 , 2) غير مقبولين كحلول للمباراة لأنهما يتناقضـــان مع مضــمون الشــرط ش2 . في مثل هذه الحالة لابد لنا أن نبحث عن نقطة على حدود مضــلع العوائد تكون فيها قيم الدالة F(u,v) في الحالتين متساوية وأكبر ما يمكن . فبمساواة F (u,v) = f (u) في الحالتين نحصل على العلاقة

$$-\frac{1}{2}u^2 - 2u + 16 = -2u^2 - 4u + 16$$

والتي تكافيء $\frac{3}{2}u^2 + 2u = 0$ ولهذه المعادلة حلان هما :

الأول : $u = 0$ ويعطينا النقطة (0 , 0) والتي تقع على مضلع العوائد .

الثاني : $u = -\frac{4}{3}$ ويعطينا النقطة $\left(-\frac{4}{3}, \frac{64}{3}\right)$ والتي تقع خارج مضلع العوائد .

فالحل الأول O (0 , 0) هو الحل المقبول حيث تبلغ F (u,v) القيمة 16 كأكبر قيمة لها على مضلع العوائد . لاحظ أن النقطة (0 , 0) في المصفوفة توافق الإستراتجيات الخالصة (A_2 , B_2) .

تمارين (3 . 1)

1 . تتنافس شركتان A و B لتصنيع السلاح في تسويق منتجاتهما ولدى كل منهما استراتيجيتان مختلفتان لهذا الغرض . ونتيجة للدراسات فقد وجد أن العوائد المقابلة لهذه الاستراتيجيات معطاة كما في المصفوفة التالية :

$$G = \begin{bmatrix} (3, -1) & (-1, 1) \\ (1, 0) & (-2, -1) \end{bmatrix}$$

(1) أوجد جميع نقاط التوازن لهذه المباراة .

(2) إذا اعتبرنا هذه المباراة تفاوضية أوجد أفضل استراتيجية لكلا الشركتين والتي تجعل عوائدها أكبر ما يمكن بكل من الطرق التالية معتبراً أن نقطة الأمان هي نقطة الوضع الراهن :

(أ) طريقة الأمثلية الكلية .

(ب) طريقة منصف الربع الأول .

(جـ) طريقة تكبير حاصل ضرب العوائد .

(د) طريقة **شابلي** .

2 . إن الحفاظ على مواقع التحكم والسيطرة من الأمور ذات الشأن الكبير في الدول . ولدى الطرف المعادي ثلاث استراتيجيات مختلفة لضرب وإضعاف هذه المواقع (من الجو ، من البحر ، من القوات البرية) كما أن لدى الطرف المدافع أيضاً ثلاث استراتيجيات مختلفة للدفاع وقد تم تقدير العوائد المقابلة لهذه الاستراتيجيات المختلفة كما في المصفوفة التالية :

$$G = \begin{bmatrix} (1 , 4) & (3 , -1) & (-2 , -2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1 , 0) & (-1 , 2) & (3 , 3) \\ (5 , 1) & (4 , 2) & (-1 , -1) \end{bmatrix}$$

(1) هل لهذه المباراة نقاط توازن ؟ ما هي في حال الإيجاب ؟

(2) هل يوجد لهذه المباراة استراتيجيات بارزة ؟ وما هي في حال الإيجاب ؟

(3) ارسم مضلع العوائد ، ثم أوجد أفضل استراتيجية لكلا الطرفين معتبراً أن هذه المباراة تفاوضية بين طرفين A و B وذلك بكل من الطرق التالية :

(أ) الأمثلية الكلية .

(ب) طريقة منصف الربع الأول معتبراً نقطة الأمان كنقطة للوضع الراهن .

(جـ) طريقة تكبير حاصل ضرب العوائد معتبراً نقطة الأمان كنقطة للوضع الراهن .

3 . لدى كل من دولتين جارتين بينهما نزاع طويل الأمد ثلاث طرق لمواجهة الدولة الأخرى وإضعافها (سياسية ــ عسكرية ــ اقتصادية) ونتيجة للدراسات فقد تبين أن العوائد المقابلة لاستراتيجيات الدولتين هي كما في المصفوفة التالية :

(1) هل هذه المباراة قابلة للاختصار بواسطة الهيمنة .

(2) أوجد نقاط التوازن للمباراة غير التعاونية .

(3) ارسم مضلع العوائد وأوجد أفضل الاستراتيجيات لكلا الدولتين بكافة الطرق الممكنة معتبراً أنها مباراة تعاونية .

$$G = \begin{bmatrix} (1 , 5) & (4 , -1) & (3 , 2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (2\ ,\ 3) & (2\ ,\ 4) & (5\ ,\ 0) \\ (4\ ,\ 1) & (3\ ,\ -1) & (0\ ,\ 3) \end{bmatrix}$$

4 . تواجه إحدى الدول تمرداً مسلحاً من إحدى الجماعات فيها والتي تستخدم حرب العصابات أحياناً واختطاف الرهائن أحياناً أخرى ولدى الجيش في هذه الدولة أيضاً خطتان ممكنتان لمواجهة هذا التمرد هما إما الهجوم الشامل أو بالقصف الجوي لأماكن المتمردين . يبين الجدول التالي العوائد المقابلة للاستراتيجيات المختلفة :

	الدولـة	
المتمردين	هجوم شامل	قصف جوي
حرب عصابات	(1 , 5)	(-2 , -3)
اختطاف الرهائن	(1 , 5)	(-5 , 0)

(1) أوجد جميع نقاط التوازن للمباراة بطريقة **سواستكا** .

(2) ما هي الاستراتيجية المثلى لكل من الدولة والمتمردين باستخدام (اعتبر أن نقطة الأمان هي نقطة الوضع الراهن) .

(أ) طريقة الأمثلية الكلية .

(ب) طريقة منصف الربع الأول .

(جـ) طريقة تكبير حاصل ضرب العوائد .

(د) طريقة **شابلي** .

5. تتنافس شـركتان عالميتان لتسـويق الملابس الجاهزة ولدى كل منهما اسـتراتيجيتان مختلفتان لهذا الغرض ، وقد تبين أن العوائد المقابلة للاسـتراتيجيات المختلفة لهاتين الشـركتين معطاة كما في المصفوفة التالية :

$$G = \begin{bmatrix} (1\ ,\ 4) & (-1.5\ ,\ 2) \\ (3\ ,\ 1) & (4\ ,\ 1) \end{bmatrix}$$

(1) أوجد جميع نقاط التوازن لهذه المباراة بطريقة **سـواسـتكا** . هل للمباراة حل بالمعنى العام .

(2) ما هي الاسـتراتيجية المثلى لكلا الشـركتين والتي تحقق لها أكبر العوائد إذا اعتبرنا أن هذه المباراة تفاوضية وما هي الطريقة التي تم على أساسها التفاوض ؟ .

6 . لدينا المباراة التالية ذات المجموع غير الصفري لشخصين :

$$G = \begin{bmatrix} (3\ ,\ 2) & (3\ ,\ 0) & (2\ ,\ 2) \\ (1\ ,\ 0) & (3\ ,\ 3) & (0\ ,\ 3) \\ (0\ ,\ 2) & (0\ ,\ 0) & (2\ ,\ 3) \end{bmatrix}$$

(1) ما هي نقاط التوازن لهذه المباراة ؟ وهل يوجد بينهما استراتيجية بارزة ؟

(2) هل توجد نقاط توازن قابلة للمبادلة ؟ ما هي في حال الإيجاب ؟

(3) هل للمباراة حل بالمعنى الدقيق ؟ وهل لها حل بالمعنى العام ؟ وضح إجابتك .

(4) إذا اعتبرنا أن المباراة تفاوضية وأن نقطة الأمان هي نقطة الوضع الراهن فالمطلوب :

(أ) رسم مضلع العوائد وتحديد نقطة الأمان .

(ب) إيجاد الحل الأمثل بطريقة منصف الربع الأول .

(جـ) إيجاد الحل الأمثل بطريقة **شـــابلي** ثم بطريقة **ناش** معتبراً الاســــتراتيجية التهديدية (0,3) .

(د) هل المباراة قابلة للاختصــــار ؟ وما هي أقل مباراة مختصــــرة في حال الإيجاب .

(هـ) هل للمباراة حل بالمعنى الدقيق ؟ بالمعنى العام ؟ وضح إجابتك .

7 . لدينا المباراة الثنائية التفاوضية التالية :

$$G = \begin{bmatrix} (a\,,2) & (3\,,0) \\ (2\,,0) & (2\,,2) \end{bmatrix}$$

حيث a هي معلمة تأخذ قيماً اختيارية . أوجد نقطة الأمان ثم وضح أن الحل بطريقة **شابلي** يعطي كما يلي

(1) $\left(9/4\,,\dfrac{3}{2}\right)$ من أجل $a \le 2$.

(2) $\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4a}\,,\dfrac{3}{2}\right)$ من أجل $2 < a < 3$.

(3) (a , 2) من أجل $a \ge 3$.

ماذا يلفت انتباهك في النتائج التي حصلت عليها في (1) و (2) و (3) ؟

9 . اعتبر المباراة الثنائية التالية كمباراة تعاونية نقطة الوضــــع الراهن فيها هي نقطة الأمان . والمطلوب :

(أ) ارسم مضلع العوائد ثم وضح أن فئة التفاوض تتكون من أكثر من قطعة مستقيمة .

(ب) أوجد الحل بطريقة **شابلي** . ماذا تلاحظ ؟

$$G = \begin{bmatrix} (2,1) & (3,2) & (0,4) \\ (0,1) & (4,1) & (2,1) \end{bmatrix}$$

10 . لديك المباراة الثنائية التالية والتي سنعتبرها مباراة تعاونية نقطة الأمان فيها هي نقطة الوضع الراهن .

$$G = \begin{bmatrix} (1,4) & (-1,-4) \\ (-4,-1) & (4,1) \end{bmatrix}$$

المطلوب :

(أ) ارسم مضلع العوائد ووضح أنه متناظر بالنسبة لمنصف الربع الأول .

(ب) وضح وبموجب شروط ناش أن حل **شابلي** الأمثل (X^*, Y^*) يحقق $X^* = Y^*$ وتحقق من صحة ذلك بالنسبة لهذه المباراة .

(جـ) أعد إيجاد الحل الأمثل بطريقة ناش باستخدام الاستراتيجية التهديديه(1-,4-) ثم باستخدام الاستراتيجية التهديديه (4- , 1-) . ماذا تلاحظ ؟