الاختبار الفصلي الثاني 382 بحث

الفصل الدراسي الأول للعام 1438-1439هـ

اسم الطالب :	الرقم الجامعي :

المسألة 1 : لديك المباراة الثنائية التالية :

$$G_{A,B} = \begin{bmatrix} (-9, 6) & (3 , -1) \\ (2 , 0) & (0 , 2) \end{bmatrix}$$

1) هل للمباراة نقاط توازن في مجموعة الإستراتيجيات الصافية ؟. إذا كان الجواب بنعم فحددها.

لا يوجد .

2) احسب العائد المتوقع لكل لاعب $P_A(x,y)$ و $P_B(x,y)$ كدالة في x و y حيث $X^T=(x\ \ 1-x)$ و $Y^T=(y\ \ 1-y)$.

$$P_A(x,y) = x^T G_A Y = (x\ \ 1-x)\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} =$$

$$= -14xy + 3x + 2y = x(-14y+3) + 2y$$

$$P_B(x,y) = x^T G_B Y = (x\ \ 1-x)\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = 9xy - 3x - 2y + 2$$

$$= y(9x-2) + (-3x+2$$

$$P_A(x,y) = x(-14y+3) + (\ 2y\ )$$

$$P_B(x,y) = y(9x-2) + (-3x+2)$$

3) حدد الحل لمسألة الأمثلية : $\max_{0\le x\le 1} P_A(x,y)$ حسب قيم $0 \le y \le 1$, y (x^*)

ثم لمسألة الأمثلية : $\max_{0\le y\le 1} P_B(x,y)$ حسب قيم $0 \le x \le 1$, x (y^*)

$$P_A(x,y) = x(-14y+3) + (2y)$$

Case 1 : $-14y+3 < 0 \Leftrightarrow y > \frac{3}{14}$: $x^* = 0$

Case 2 : $-14y+3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{14}$: $0 \le x^* \le 1$

Case 3 : $-14y+3 > 0 \Leftrightarrow y < \frac{3}{14}$: $x^* = 1$

$$P_B(x,y) = y(9x-2) + (-3x+2)$$

Case 1 : $9x-2 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{9}$: $y^* = 0$

Case 2 : $9x-2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{9}$: $0 \le y^* \le 1$

Case 3 : $9x-2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{9}$: $y^* = 1$

4) أوجد جميع نقاط التوازن لهذه المباراة بطريقة سواستكا باستخدام الرسم.

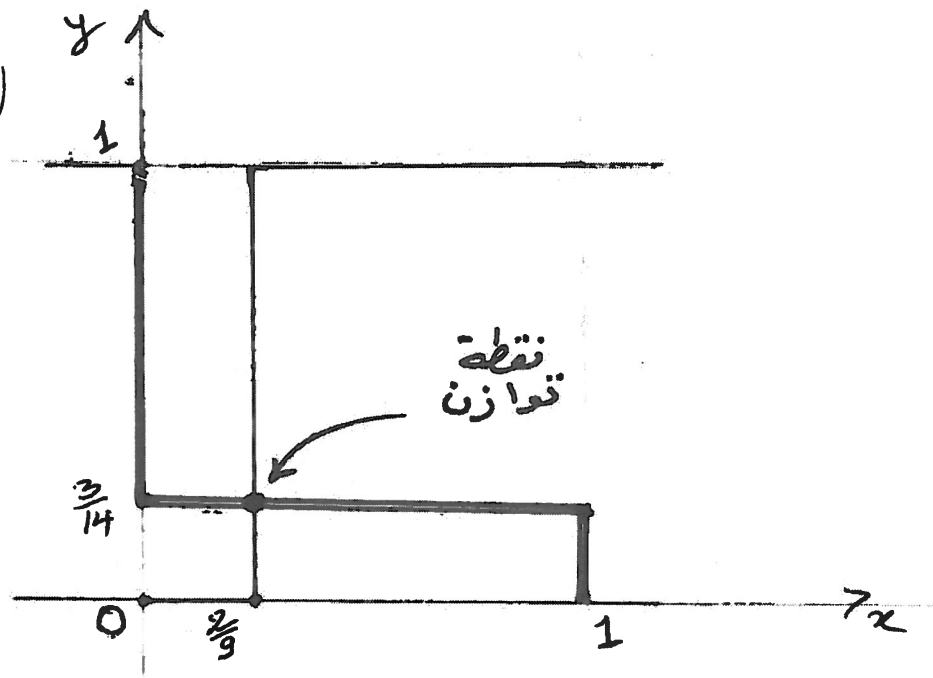
نقطة توازن وحيدة

$x^* = \frac{2}{9} \Rightarrow x^{*T} = (\frac{2}{9}, \frac{7}{9})$

$y^* = \frac{3}{14} \Rightarrow y^{*T} = (\frac{3}{14}, \frac{11}{14})$

$P_A(x^*, y^*) = \frac{3}{7}$

$P_B(x^*, y^*) = \frac{4}{3}$



382 بحث | الإمتحان الفصلي #2 | 1440-1439 _ ف1

قسم الإحصاء و بحوث العمليات

جامعة الملك سعود

المسألة 1 : لديك المباراة الثنائية التالية :

$$G_{A,B} = \begin{bmatrix} (3,2) & (0,4) \\ (0,1) & (4,0) \end{bmatrix}$$

1) هل للمباراة نقاط توازن في مجموعة الإستراتيجيات الصافية ؟. إذا كان الجواب بنعم فحددها.

لا يوجد

2) احسب العائد المتوقع لكل لاعب $P_A(x,y)$ و $P_B(x,y)$ كدالة في x و y حيث $X = (x \;\; 1-x)$ و $Y = (y \;\; 1-y)$.

$G_A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$(x \;\; 1-x)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = (3x \;\; 4(1-x))\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$$

$$= 3xy + 4(1-x)(1-y)$$
$$= 3xy + 4(1-x-y+xy)$$
$$= 3xy + 4 - 4x - 4y + 4xy$$
$$= 7xy - 4x - 4y + 4$$
$$= x(7y-4) - 4y + 4$$

$G_B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$(x \;\; 1-x)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = (2x + 1 - x \;\; 4x)\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$$

$$= (x+1 \;\; 4x)\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$$
$$= (x+1)y + 4x(1-y)$$
$$= xy + y + 4x - 4xy$$
$$= -3xy + 4x + y$$
$$= y(-3x+1) + 4x$$

اكتب الجواب هنا :

$P_A(x,y) =$ $x(7y-4) - 4y + 4$

$P_B(x,y) =$ $y(-3x+1) + 4x$

3) أوجد جميع نقاط التوازن لهذه المباراة بطريقة سواستكا .

$x(7y-4)-4x+4$

$7y-4<0 \Leftrightarrow y<\frac{4}{7}$
$x^*=0$
$7y-4=0 \Leftrightarrow y=\frac{4}{7}$
$0 \leq x^* \leq 1$
$7y-4>0 \Leftrightarrow y>\frac{4}{7}$
$x^*=1$

$y(-3x+1)+4x$

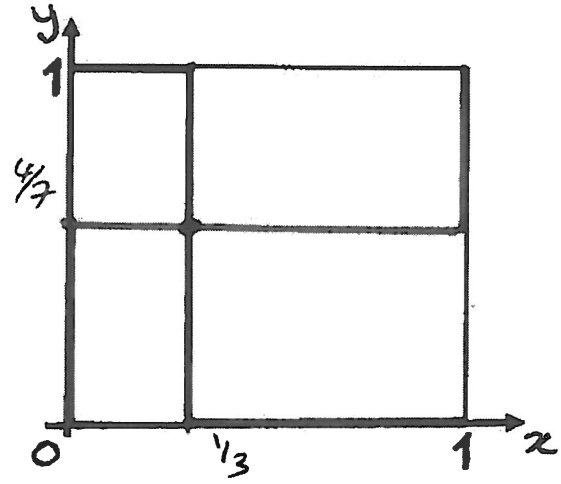
$-3x+1<0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$ $\quad y^*=0$
$-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ $\quad 0 \leq y^* \leq 1$
$-3x+1>0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{3}$ $\quad y^*=1$

نقطة التوازن :

$x^*=\frac{1}{3} \Rightarrow 1-x^*=\frac{2}{3}$
$y^*=\frac{4}{7} \Rightarrow 1-y^*=\frac{3}{7}$

$P_A(x^*;y^*)=\frac{1}{3}(7\times\frac{4}{7}-4)-4\times\frac{4}{7}+4$
$=\frac{12}{7}$

$P_B(x^*;y^*)=\frac{4}{7}(-3\times\frac{1}{3}+1)+4\times\frac{1}{3}$
$=$



المسألة 2: لديك المباراة الثنائية التالية:

$G_{A,B}=$

$(\alpha, 1)$	$(4, -5)$
$(6, 2)$	$(7, \beta)$

السؤال : حدد فترة لـ α و فترة لـ β بحيث تكون $(\alpha, 1)$ و $(7, \beta)$ نقاط توازن .

الجواب : $\beta \geq 2$ ، $6 \leq \alpha$

382 بحث	الإمتحان النهائي	1440-1439 - ف1

قسم الإحصاء و بحوث العمليات

جامعة الملك سعود

الإسم :	الرقم الجامعي :

المسألة 1: لديك المباراة الثنائية التالية :

$$G_{A,B} = \begin{bmatrix} (-9,6) & (3,-1) \\ (2,0) & (0,2) \end{bmatrix}$$

1) هل للمباراة نقاط توازن في مجموعة الإستراتيجيات الصافية ؟. إذا كان الجواب بنعم فحددها.

2) احسب العائد المتوقع لكل لاعب $P_A(x,y)$ و $P_B(x,y)$ كدالة في x و y حيث $X^T=(x\ \ 1-x)$ و $Y^T=(y\ \ 1-y)$ و من ثم أوجد جميع نقاط التوازن لهذه المباراة بطريقة سواستكا باستخدام الرسم.

$$P_A(x,y) = x(-14y+3)+2y$$

$$P_B(x,y) = y(9x-2)-3x+2$$

$-14y+3 < 0 \Leftrightarrow y > \frac{3}{14}$: $x^* = 0$

$-14y+3 = 0 \Leftrightarrow y = 3/14$: $0 \leq x^* \leq 1$

$-14y+3 > 0 \Leftrightarrow y < 3/14$: $x^* = 1$

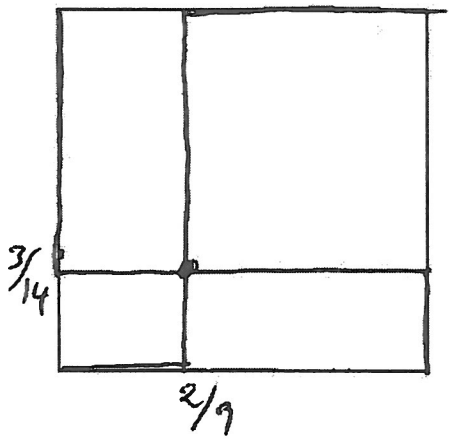
$9x-2 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{9}$: $y^* = 0$

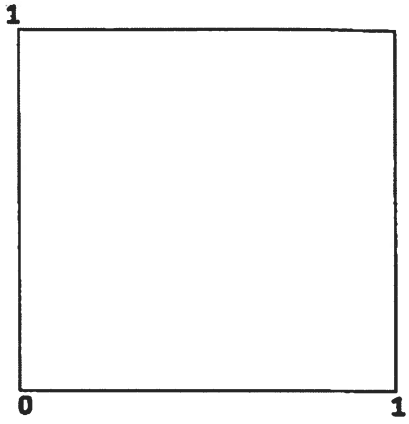
$9x-2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{9}$: $0 \leq y^* \leq 1$

$9x-2 = 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{9}$: $y^* = 1$

$x^* = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right)$, $y^* = \left(\frac{3}{14}, \frac{11}{14}\right)$

$P_A(x^*, y^*) = \frac{3}{7}$, $P_B(x^*, y^*) = \frac{4}{3}$

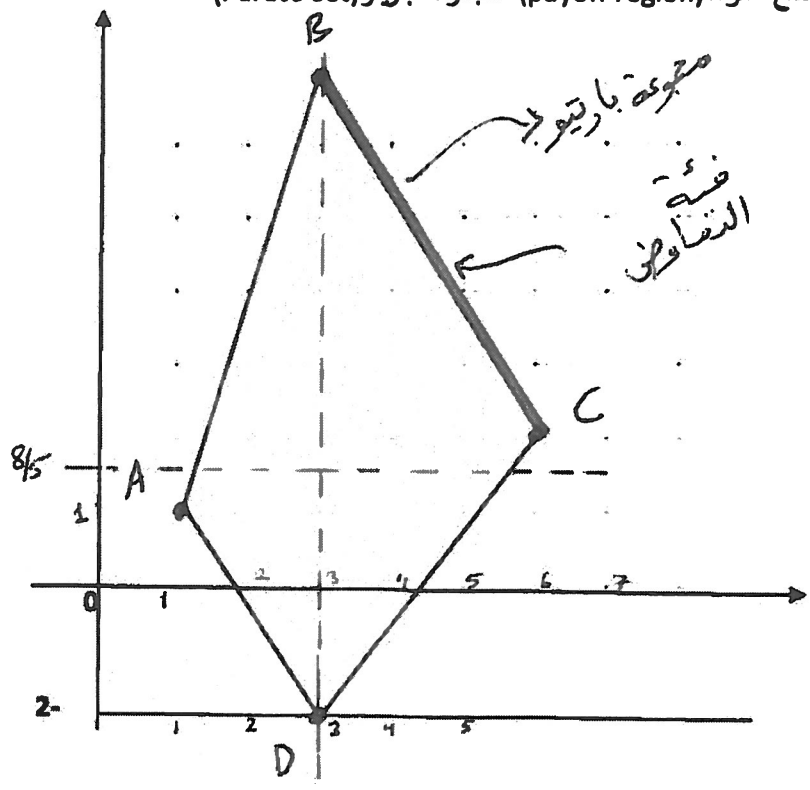




المسألة 2: لديك المباراة الثنائية التالية والتي سنعتبرها مباراة تعاونية :

$$G_{A,B} = \begin{bmatrix} (1,1) & (3,7) \\ (6,2) & (3,-2) \end{bmatrix}$$

1) ارسم مضلع العوائد(payoff region)، مجموعة باريتو(Pareto set)،



2) أوجد نقطة الأمان(security point) (u_A, v_B)، ثم حدد في الرسم فئة التفاوض(bargaining set)

$u_A = 3$	$v_B = \frac{8}{5}$

3) أوجد العوائد المثلى (u^*, v^*) و الاستراتجية المشتركة باستخدام طريقة شابلي معتبرا نقطة الوضع الراهن هي نقطة الأمان (u_A, v_B).

$u^* = \frac{231}{50}$ $\simeq 4.62$	$v^* = \frac{43}{10}$ $\simeq 4.3$

معادلة المستقيم : $v = -\frac{5}{3}u + 12$

$$F(u,v) = (u-3)(v-\tfrac{8}{5}) = (u-3)(-\tfrac{5}{3}u+12-\tfrac{8}{5})$$

$$= -\frac{5}{3}u^2 + \frac{77}{5}u - \frac{156}{5} = f(u)$$

$$f'(u) = -\frac{10}{3}u + \frac{77}{5} = 0$$

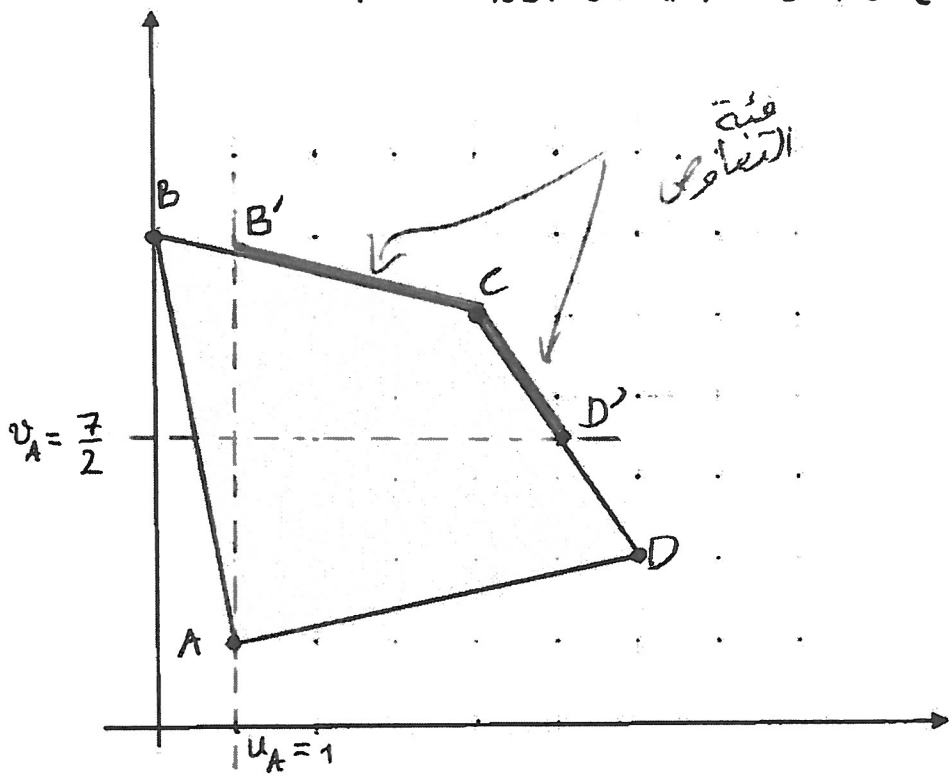
$$\Rightarrow u^* = \frac{231}{50} \simeq 4.62 \in [3, 6].$$

$$v^* = \frac{43}{10}.$$

المسألة 3: لديك المباراة الثنائية التالية والتي سنعتبرها مباراة تعاونية :

$$G_{A,B} = \begin{bmatrix} (1,1) & (4,5) \\ (0,6) & (6,2) \end{bmatrix}$$

1) ارسم مضلع العوائد(payoff region)، مجموعة باريتو(Pareto set)،



2) أوجد نقطة الأمان(security point) (u_A, v_B)، ثم حدد في الرسم فئة التفاوض(bargaining set)

$u_A = 1$	$v_B = \frac{7}{2}$

1) معادلة المستقيم الذي يمر من B و C :

$$v = -\frac{1}{4}u + 6$$

$$F(u,v) = (u-1)\left(v - \frac{7}{2}\right) = (u-1)\left(-\frac{1}{4}u + 6 - \frac{7}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}u^2 + \frac{11}{4}u - \frac{5}{2} = f(u)$$

$$f'(u) = 0 \Leftrightarrow -\frac{u}{2} + \frac{11}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$u = \frac{11}{2} \notin [1,4] \Rightarrow u^* = 4 \text{ and } f(u^*) = \frac{9}{2}$$

$$v^* = 5$$

3) أوجد العوائد المثلى (u^*, v^*) و الاستراتجية المشتركة باستخدام طريقة شابلي معتبرا نقطة الوضع الراهن هي نقطة الأمان (u_A, v_B) .

$u^* = 4$	$v^* = 5$

2) معادلة المستقيم الذي يمر من C و D :

$$v = -\frac{3}{2}u + 11$$

$$F(u,v) = (u-1)\left(v - \frac{7}{2}\right) = (u-1)\left(-\frac{3}{2}u + 11 - \frac{7}{2}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}u^2 + 9u - \frac{15}{2} = f(u)$$

$$f'(u) = -3u + 9 = 0 \Rightarrow u = 3 \notin [4,5]$$

$$\Rightarrow u^* = 4 \quad \text{and} \quad f(u^*) = \frac{9}{2}$$

$$v^* = 5$$

382 بحث	الإمتحان النهائي	1440-1441 _ف1

قسم الإحصاء و بحوث العمليات

جامعة الملك سعود

الإسم :	الرقم الجامعي :

المسألة 1 : لديك المباراة الثنائية التالية :

$$G_{A,B} = \begin{bmatrix} (-2,5) & (1,9) \\ (3,0) & (0,-7) \end{bmatrix}$$

1) هل للمباراة نقاط توازن في مجموعة الإستراتيجيات الصافية ؟. إذا كان الجواب بنعم فحددها.

2) احسب العائد المتوقع لكل لاعب $P_A(x,y)$ و $P_B(x,y)$ كدالة في x و y حيث $X = (x \;\; 1-x)$ و $Y = (y \;\; 1-y)$.

$$P_A(x,y) = (x \;\; 1-x)\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = x(6y-1) + 3y$$

$$P_B(x,y) = (x \;\; 1-x)\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = y(-11x+7) + (16x-7)$$

اكتب الجواب هنا :

$P_A(x,y)=$ $x(6y-1) + 3y$

$P_B(x,y)=$ $y(-11x+7) + 16x - 7$

3) أوجد جميع نقاط التوازن لهذه المباراة بطريقة سواستكا .

مسألة اللاعب A :

$$\max_{0\le x\le 1} f_A(x,y) = P_A(x,y)$$

$$f_A(x,y) = x(-6y+1)+3y$$

$$x^* = \begin{cases} 0 & , \ y > \frac{1}{6} \\ 1 & , \ y < \frac{1}{6} \\ [0,1] & , \ y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

مسألة اللاعب B :

$$\max_{0\le y\le 1} f_B(x,y) = P_B(x,y)$$

$$f_B(x,y) = y(-11x+7)+16x-7$$

$$y^* = \begin{cases} 0 & , \ x > \frac{7}{11} \\ 1 & , \ x < \frac{7}{11} \\ [0,1] & , \ x = \frac{7}{11} \end{cases}$$

A و C توافقان نقاط توازن في الإستراتيجيات الخالصة وهي : A ← (3,0)
C ← (1,9)

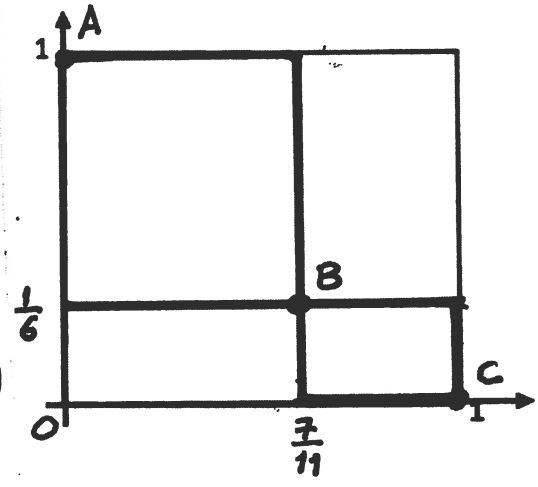
أما B :

$$x = \frac{7}{11} \Rightarrow 1-x = \frac{4}{11}$$

$$\Rightarrow x^{*T} = \left(\frac{7}{11}, \frac{4}{11}\right), \ y = \frac{1}{6} \Rightarrow 1-y = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow y^{*T} = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

$$\Rightarrow P_A(x^*,y^*) = \frac{1}{2}, \ P_B(x^*,y^*) = \frac{35}{11}$$



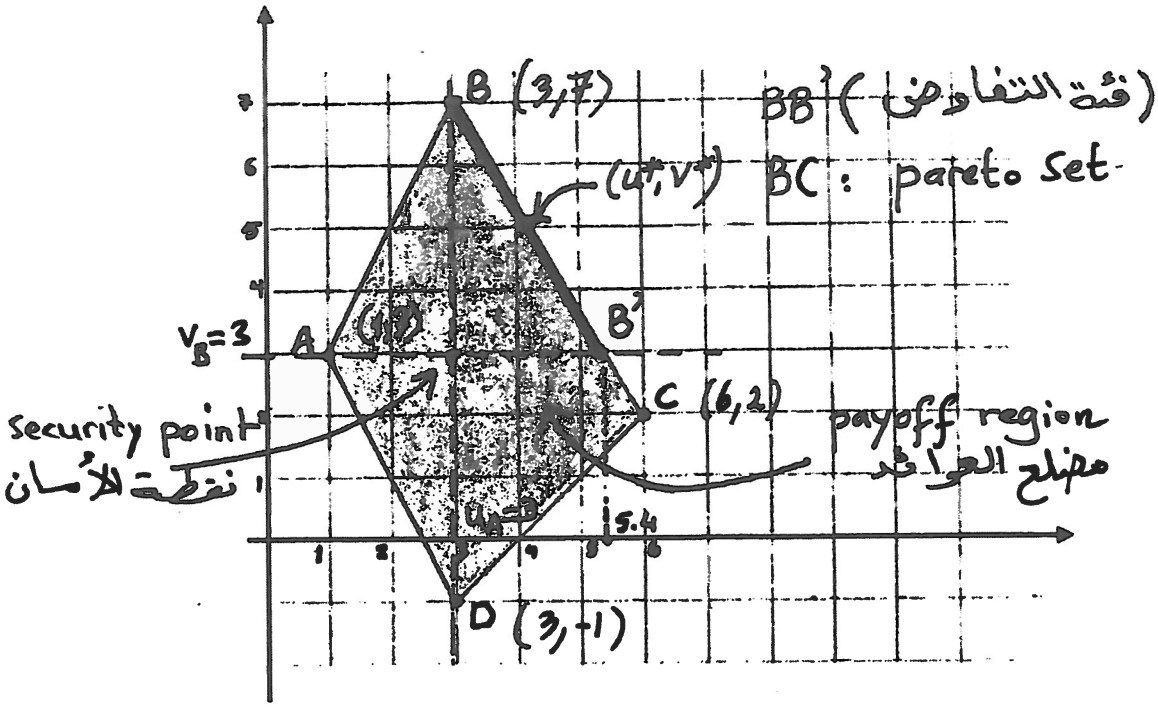
المسألة 2: لديك المباراة الثنائية التالية :

$$G_{A,B} = \begin{bmatrix} (3,-1) & (3,7) \\ (6,2) & (1,3) \end{bmatrix}$$

1. حدد مصفوفات عوائد كل لاعب.

$$G_A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_B = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. إذا اعتبرنا المباراة تعاونية : ارسم مضلع العوائد(payoff region) و مجموعة باريتو(Pareto set).



3 . أوجد نقطة الأمان(security point) (u_A, v_B)، ثم حدد في الرسم فئة التفاوض(bargaining set)

$u_A = 3$	$v_B = 3$

$$G_B = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad G_A = \begin{bmatrix} 3 & \boxed{3} \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$v_B = 3$ العمود 2 $\quad G_B^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & \boxed{3} \end{bmatrix}$ $\quad u_A = 3$ العمود 2

4. أوجد العوائد المثلى (u^*, v^*) باستخدام طريقة شابلي معتبرا نقطة الوضع الراهن هي نقطة الأمان (u_A, v_B).

معادلة المستقيم التي تمر من B و C معطى بـ :

$$v = -\frac{5}{3}u + 12$$

$$\max F(u,v) = (u-3)(v-3) = (u-u_A)(v-v_B)$$

$$\text{s.t. :} \quad v = -\frac{5}{3}u + 12$$

$$3 \leqq u \leqq 5{,}4 \quad (x=5.4, y=3 : B' \text{ إيجاد إثبات})$$

$$F(u,v) = (u-3)\left(-\frac{5}{3}u + 12 - 3\right) = -\frac{5}{3}u^2 + 14u - 27 = f(u)$$

$$f'(u) = -\frac{10}{3}u + 14 = 0 \Rightarrow u = 4.2 \in [3, 5.4]$$

$$\Rightarrow u^* = 4.2 \quad \text{and} \quad v^* = -\frac{5}{3}u^* + 12 = -\frac{5}{3} \times \frac{42}{10} + 12$$

$$\Rightarrow (u^*, v^*) = (4.2, 5) \Big] = 5$$

$$\begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4.2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda + 6(1-\lambda) \\ 7\lambda + (1-\lambda)2 \end{pmatrix}$$

5. من الفقرة 4. حدد الإستراتجية المشتركة للاعبين.

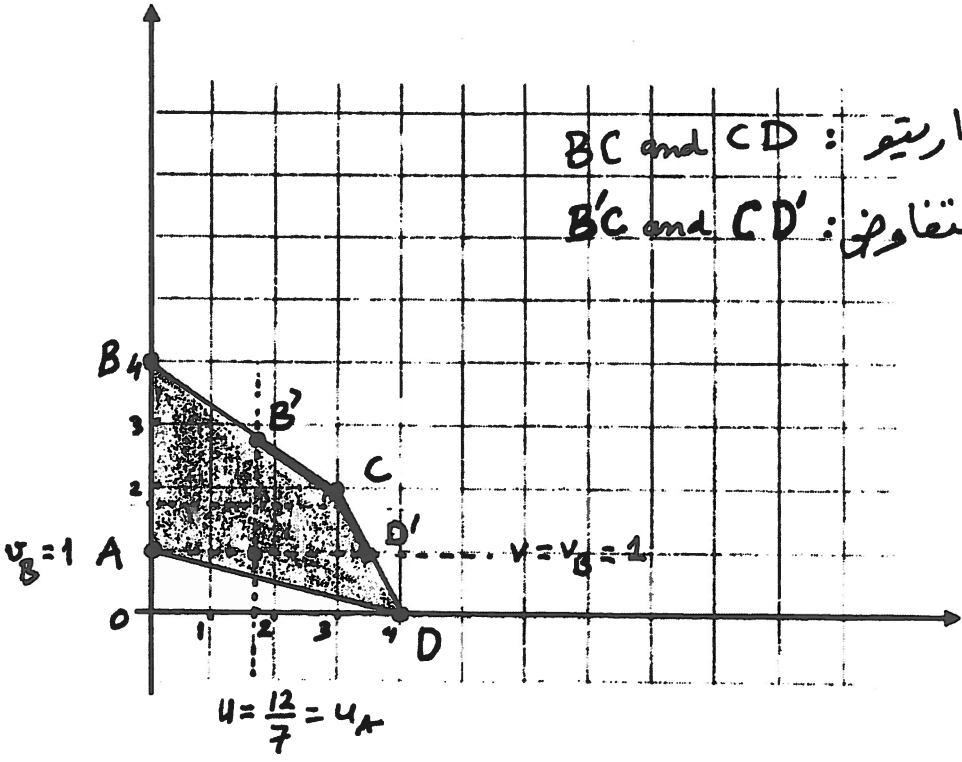
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\lambda + 6 = 4.2 \\ 5\lambda + 2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \lambda^* = 0.6 \Rightarrow$$

الإستراتيجيات المشتركة هي:
اختيار (A_1, B_2) باحتمال 0.6
و (A_2, B_1) باحتمال 0.4

المسألة 3: لديك المباراة الثنائية التالية والتي سنعتبرها مباراة تعاونية :

$$G_{A,B} = \begin{bmatrix} D(4,0) & A(0,1) \\ B(0,4) & C(3,2) \end{bmatrix}$$

1) ارسم مضلع العوائد(payoff region) و مجموعة باريتو(Pareto set) .



2) إذا علمت أن نقطة الأمان (u_A, v_B)، معطاة بـ $v_B = 1$ و $u_A = \frac{12}{7}$ فحدد في الرسم فنة التفاوض ثم

أ) أوجد العوائد المثلى (u^*, v^*) باستخدام طريقة شابلي معتبرا نقطة الوضع الراهن هي نقطة الأمان (u_A, v_B).

انتباه : معادلة المستقيم الذي يمرمن النقاط B و C هي : $v = -\frac{2}{3}u + 4$ و

معادلة المستقيم الذي يمرمن النقاط C و D هي : $v = -2u + 8$

$$\max F(u,v) = (u-u_A)(v-v_B)$$
$$(u,v) \in B'C \cup CD'$$

$(u,v) \in B'C$: $\max F(u,v) = (u-\frac{12}{7})(v-1)$, $v = -\frac{2}{3}u+4$

$$= -\frac{2}{3}u^2 + \frac{29}{7}u - \frac{36}{7} = f_1(u)$$

$$f_1'(u) = -\frac{4}{3}u + \frac{29}{7} = 0 \Rightarrow u = \frac{87}{28} = 3,1 > 3 \Rightarrow u_1^* = 3$$
$$\Rightarrow v_1^* = 2$$
$$f_1(u_1^*) = \frac{9}{7}.$$

$(u,v) \in CD'$: $F(u,v) = (u-\frac{12}{7})(v-1)$, $v = -2u+8$

$$\Rightarrow F(u,v) = (u-\frac{12}{7})(-2u+8-1) = -2u^2 + \frac{73}{7}u - 12$$
$$= f_2(u)$$

$$f_2(u) = 0 \Leftrightarrow -4u + \frac{73}{7} = 0 \Rightarrow u = \frac{73}{28} < 3 \Rightarrow u_2^* = 3$$
$$\Rightarrow v_2^* = 2$$
$$f_2(u_2^*) = \frac{9}{7}$$

Since $f_2(u_2^*) = f_1(u_1^*) \Rightarrow \begin{cases} u^* = 3 \\ v^* = 2 \end{cases}$

ب) حدد الإستراتجية المشتركة التي توافق العوائد المثلى (u^*, v^*).

اللاعبين يتفقون على اختيار الاستراتيجية

الحالة : اللاعب A يختار A_2

واللاعب B يختار B_2

والعائد المشترك هو $(3,2)$