مدخل

إلى

نظم ضبط ومراقبة المخزون

تأليف

د. زيد تميم البلخي أستاذ مشارك بقسم الإحصاء وبحوث العمليات.

أ.د. لطفي عبد القادر تاج الأستاذ الدكتوربقسم الإحصاء وبحوث العمليات.

د. مسعود أحمد بونخل أستاذ مشارك بقسم الرياضيات

كلية العلوم

جامعة الملك سعود

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد رسول الله الذي بعثه الله رحمة للعالمين وبعد، نضع بين يدي القارئ العربي هذا الكتاب الذي أسميناه «مدخل إلى نظم ضبط ومراقبة المخزون» وهو من بين الكتب القليلة المتوافرة في المكتبة العربية عن هذا الموضوع.

يحتوي هذا الكتاب على النماذج الأساسية لنظم ضبط ومراقبة المخزون والتي يدرس معظمها لطلبة بعض التخصصات في كلية العلوم بجامعة الملك سعود. وقد روعي عرض وتقديم موضوعاته بأسلوب سهل وميسر ومتناسب مع الخلفية العلمية لطلبة هذه التخصصات ومن في حكمهم ممن يهتمون في مجالات ضبط المخزون وتخطيط الإنتاج بشكل خاص وفي مجالات الصناعة والتخطيط والإدارة والاقتصاد والتجارة والزراعة والتطوير والبحوث والشؤون العسكرية بشكل عام. وقد وزعت الموضوعات الرئيسة لهذا الكتاب على خمسة فصول وملحق وقد خصص الفصل الأول للتعريف بالمخزون وأهميته وأنواع النماذج التي يتناولها بالبحث والدراسة إضافة إلى أنواع التكاليف الرئيسة التي نواجهها عادة في أنظمة المخزون المختلفة.

كما خصص الفصل الثاني لنظم المخزون الساكنة والتي يكون فيها الطلب على السلع معروفاً ويتم بشيء من الثبات أو الانتظام بمرور الزمن وقد تم التركيز على النماذج المتعلقة بتخزين أو إنتاج سلعة واحدة حيث تم عرض وتحليل هذه النماذج بشيء من التفصيل. ونظراً لأن هذا النوع من النظم لا ينطبق إلا على عدد قليل من الحالات التي تظهر في الواقع العملي فقد تم تخصيص الفصل الثالث لنظم المخزون الديناميكية والتي يقصد بها أن الطلب على السلع معروف ولكنه وبشكل عام يتغير من فترة (أو لحظة) زمنية لأخرى الأمر الذي لا يسمح بتقديم و/أو دراسة الكثير من هذه النماذج لأنها لا تتناسب مع المقدرات والخلفيات العلمية لطلبة المرحلة الجامعية الأولى. ولذلك فقد تم الاقتصار على بعض النماذج المناسبة لطلبة هذه المرحلة مع الاهتمام في الوقت نفسه بتقديم طرق متنوعة لحلها.

ومع ذلك فإن الدائرة التي يقع ضمنها كلاً من نظم المخزون الساكنة والديناميكية لا تغطي نماذج المخزون الاحتمالية حيث يكون الطلب على السلع ذو صفة أو طبيعة احتمالية.

وبالرغم من أن بناء وحل هذا النوع من النماذج يعتبر الأكثر صعوبة في نماذج المخزون إلا أن ذلك لم يمنعنا من تخصيص الفصل الرابع لعرض وبناء وحل بعض ملائم من هذه النماذج. على أن كثيراً من نظم الإنتاج المعاصرة تتبع مناهج (بل ومدارس) مختلفة كل له فلسفته ومبرراته في اتباع هذه المدرسة أو تلك فقد ألقينا في الفصل الخامس نظرة سريعة على ما يرتبط منها بنظم المخزون. كذلك وقد أفردنا ملحقاً خاصاً في آخر الكتاب يحتوي على بعض البرامج الحاسوبية الجاهزة التي تساعد في حل بعض نماذج المخزون التي تم عرضها ودراستها في فصول الكتاب المختلفة.

ولم يغفل الكتاب تقديم مجموعة متنوعة ومتكاملة من التمارين التي تغطي كافة النماذج المدروسة جاء بعضها في مكانه المناسب داخل فصول الكتاب بغرض توضيح الأفكار والمفاهيم المطروحة وجاء كثيراً منها في نهاية الفصول بغرض الاستزادة والتعمق والتنويع.

ومع أننا بذلنا جهداً غير قليل لإخراج هذا الكتاب في وضعه الحالي فقد لا يكون هذا الوضع هو الأمثل. ولذا فإننا نأمل من قراء أو مستخدمي هذا الكتاب أن يوافونا مشكورين بملاحظاتهم ومقترحاتهم التي قد تساهم في تحسين مضمون وإخراج هذا الكتاب.

وبعد فإننا نأمل أن نكون قد قدمنا بعملنا هذا فائدة مرجوة لمن يقرأ ويفهم العربية كما ندعو الله أن يجعل هذا العمل في صحف حسناتنا يوم نلقاه. والله من وراء القصد وهو ولي التوفيق.

المؤلفون

المحتويات

الفصل الأول

مدخل إلى نماذج المخزون

(١,١) مقدّمة

يعرّف المخزون (Inventory) بأنّه ما يتم تخزينه من مواد أو بضائع للانتفاع بها أو استهلاكها عند الحاجة مثل المواد الخام التي تستخدم لإنتاج البضائع المتنوعة أو البضائع المنتجة نفسها أو المواد الغذائية أو الأموال المحفوظة في المصارف أو المياه خلف السّدود أو الدم في بنوك الدم وغير ذلك الكثير من الأمثلة. وقلما يخلو نظام[١] اقتصادي أو تجاري أو صناعي أو إداري صغيرا كان أم كبيرا من الحاجة لمخزون. ومن الواضح أن لعملية الاحتفاظ بالمخزون تكاليفها الخاصّة بها وتتكون هذه التّكاليف عادة من تكاليف طلب البضائع أو المواد وتكاليف وضعها وترتيبها والاحتفاظ بها في المخازن المخصّصة والتّكاليف النّاتجة عن تعطيل رأس المال الذي دفع ثمناً للبضاعة المخزّنة والتّكاليف النّاتجة عن التّغير في ثمن البضائع أو المواد والتي تعتمد غالبا على حجمها إضافة إلى بعض التّكاليف الأخرى كالتي تنتج عن التلف الكلي أو الجزئي للسلع المخزنة وقد لوحظ أن مجموع التّكاليف المشار إليها قد تصل أحيانا إلى نسبة كبيرة من أثمان المواد المخزّنة ولذلك تعتبر عملية إدارة المخزون من المسائل المهمّة والصّعبة التي تواجه العديد من النظم المتلقية للبضاعة ككل أو التي تموّلها بالبضاعة. تواجه هذه الأنظمة نوعين متضادين من الضّغوطات العملية ، فهي من جهة توّد تخزين كميات كبيرة من البضاعة لتغطية طلبات الزّبائن ومن جهة أخرى توّد تخزين أقّل كمّية ممكنة من البضاعة لتجّنب تكديسها ممّا يؤدّى إلى تجميد رؤوس أموال كان الأنسب الاستفادة منها في استثمارات أخرى.

يتّضح لنا ممّا سبق ذكره أنّ على هذه الأنظمة إيجاد توازن بين هذين الضغطين. ومن هنا تظهر أهمية استخدام ما يسمّى بنماذج المخزون وذلك لتحديد الحجم الأمثل للكمية المطلوبة الذي يحقّق مثل هذا التّوازن.

---

(١) نظام (System): الشركات - المؤسسات - المصانع - المعامل - المزارع - الوزارات - الادارات...الخ هي أمثلة على الأنظمة.

وقبل الخوض في أية تفاصيل نقوم أولا بإعطاء بعض التعاريف الأولية الخاصة بالمخزون والهدف من نماذج المخزون.

تعريف (١,١)

* يقصد بالمخزون البضاعة المخزّنة لتغطية طلبات الزّبائن عند الحاجة.
* مستوى المخزون هو كمّية البضاعة الموجودة في المخازن.

يتغيّر مستوى المخزون مع تغيّر الزّمن فهو يتناقص بتزايد كمّيات الاستهلاك (Demand) ويتزايد عند استقدام البضاعة ووصول الطّلبية (Replenishment). غالبا ما تكون عملية التّحكّم في الاستهلاك غير ممكنة في حين يمكن التّحكّم في حجم وتوقيت الطّلبية.

ملاحظة (١,١)

في كلّ ممّا يأتي سوف نستخدم الاصطلاح التالي:

* **الطّلبية** ونعني بها عملية طلب البضاعة من طرف الموزّع أو التّاجر.
* **الاستهلاك** ونعني به عملية طلب البضاعة من طرف الزّبائن.

ويتم تصنيف الطلب (أو الإستهلاك) وفقاً لحجمه أو لكيفية حصوله أو لطبيعة معدله. فحجم الطلب يقيس لنا الكمية أو عدد الوحدات المطلوبة خلال فترة معينة و معدل الطلب يقيس لنا عدد الوحدات المطلوبة في وحدة الزمن أما معدل الطلب والتي تصنف وفقه نماذج المخزون فيكون إما:

(أ)- معروفا و ثابتاً بمعنى أنه معطى و لا يتغير من فترة زمنية إلى أخرى.

(ب)- معروفا و غير ثابت أي أنه معطى و يتغير مع الزمن.

(ج)- عشوائيا و ثابتاً أي أنه معروف بدلالة توزيع إحتمالي لا يتغير مع الزمن و يسمى هذا النوع الطلب المستقر (Stationary).

(د)- عشوائيا و غير ثابت أي أنه معروف بدلالة توزيع إحتمالي يتغير مع الزمن و يسمى هذا النوع الطلب غير المستقر (Non-Stationary).

قرارات المخزون

إن الهدف من دراسة نظرية أنظمة المخزون هو تحديد القواعد والأسس التي يمكن للمؤسّسة استخدامها للتّقليل من التّكاليف النّاتجة عن عمليات التّخزين ولتغطية طلبات الزّبائن.

لتحقيق التّوازن المذكور أعلاه بين تكلفة الطّلبية وتكلفة عمليات التّخزين بطريقة صحيحة يجب على المؤسّسة اتّخاذ القرارات الأساسية والسّليمة التي قد تؤثّر سلبا أو إيجابا على التّكلفة الإجمالية للمخزون ويتمّ ذلك بالإجابة على الأسئلة التّالية: (متى، كم، أين، كيف).

متى يتمّ تقديم الطّلبية؟

الإجابة على هذا السّؤال تكون بمعرفة فيما إذا كانت الطّلبية تتم دوريا (شهرياً، أسبوعياً، يومياً... الخ) أو تتم عندما يصل مستوى المخزون إلى حدّ معيّن.

كم عدد وحدات الطّلبية؟

الإجابة على هذا السّؤال تتمّ بمعرفة الحجم الأمثل للطّلبية ومعرفة فيما إذا كان من الأفضل الاستفادة من العروض الخاصة المقترحة من طرف المموّلين.

من أين يتمّ استقدام الطّلبية؟

الإجابة على هذا السّؤال تتمّ بإيجاد المموّل الأمثل أو معرفة هل من الأفضل والأوفر استقدام البضاعة جاهزة أو فتح خطوط لإنتاجها داخل المؤسّسة.

كيف يتمّ استقدام وتخزين البضاعة؟

الإجابة على هذا السّؤال تتمّ بمعرفة وسائل النّقل المثلى لشحن البضائع (مثلاً هل عن طريق البرّ، البحر أو الجوّ،... الخ) ومعرفة كيفية توزيع البضاعة على المستودعات.

ملاحظة (١,٢)

في هذا الكتاب سيتمّ التّركيز على الإجابة على السّؤالين الأولين متى وكم.

(٢,١) أنواع نماذج المخزون

إن عملية تصنيف نماذج المخزون تتمّ غالبا حسب طبيعة الاستهلاك أو الطلب التي تكون اما معلومة أو غير معلومة (متغيراً عشوائياً) وينتج عن ذلك صنفين وهما:

(١) نماذج المخزون المحدّدة:

تدعى أيضا نماذج الـ EOQ (Economic Order Quantity). في هذه النّماذج يكون الاستهلاك معلوما وتنقسم إلى قسمين:

(أ) **نماذج المخزون السّاكنة**: وهي النّماذج التي يكون فيها الاستهلاك ثابتا. فمثلا كمية استهلاك المؤسّسات التعليمية للأقلام والطّباشير غالبا ما تكون ثابتة.

(ب) **نماذج المخزون المتحرّكة (الدّيناميكية)**: وهي النّماذج التي يتغيّر فيها الاستهلاك مع الزّمن. فمثلا كمية استهلاك المثلّجات تتغيّر حسب المواسم فهي ترتفع في فصل الصيف وتنخفض نسبيا في فصلي الرّبيع والخريف بينما تكون شبه معدومة في فصل الشّتاء.

(٢) نماذج المخزون العشوائية:

في هذه النّماذج يكون الاستهلاك متغيّرا عشوائيا. فمثلا عند تقديم طلبية جرائد يومية عكاظ من طرف بائع الكشك صباح كل يوم فانّه لا يمكنه التّحديد المسبق لعدد الجرائد (كمية الاستهلاك) التي سوف يبيعها في ذلك اليوم. لدراسة هذا النّوع من أنظمة المخزون لا يمكننا فرض انّ الاستهلاك معلوم. لكنّ التّجربة بيّنت انّه من الأفضل في مثل هذه الحالات اخذ الاستهلاك كمتغيّر عشوائي.

في الواقع العملي غالبا ما تحتاج المؤسّسات إلى معلومات مسبقة حول الاستهلاك ويتم ذلك باستخدام ما يسمّى **بنماذج التّنبّؤ** التي تعطينا المتوسّط والانحراف المعياري للاستهلاك.

ففي نماذج المخزون المحدّدة نستخدم فقط متوسّط الاستهلاك ونهمل أية معلومة أخرى حول التغيّرات أو التذبذبات في الاستهلاك كمعلومة الانحراف المعياري وذلك يرجع لكون الاستهلاك فرض ثابتا في هذه النّماذج.

إهمال هذا النّوع من المعلومات يجعل هذا النّموذج اكثر بساطة وسهولة من ناحية الحسابات في حين فهو يجعله اقلّ واقعية وبعدا عن الحقيقة. بينما في نماذج المخزون العشوائية نستخدم المعلومات حول التّغيّرات والتذبذبات في الاستهلاك بطريقة واضحة وليست ضمنية ممّا

يجعل دراسة هذا النّوع من النّماذج اكثر صعوبة من ناحية الحسابات لكن القرارات النّاتجة عن ذلك تكون احسن من تلك النّاتجة عن النّماذج المحدّدة وخاصّة إذا كانت التّغيّرات والتذبذبات كبيرة جدّاً.

كما أن التنبؤ بالطلب يخضع لتأثير الكثير من العوامل مثل:

١. الحالة الإقتصادية السابقة و الراهنة والمستقبلية،
٢. عوامل المنافسة و ردود الأفعال،
٣. القوانين الحكومية المنظمة لذلك،
٤. عوامل السوق المتغيرة مثل عمر المنتج و نمطه و المبتكرات الحديثة و التي قد تقود إلى التغيير في نوع و/ أو كمية الطلب. و من أبرز التقنيات المستخدمة في عمليات التنبؤ "تحليل السلاسل الزمنية" (Time Series Analysis) و التي تقوم أساساً على التنبؤ بالمستقبل إستناداً على بيانات الماضي و تستخدم في ذالك عدة طرق منها:

(أ)- أن يتم تقدير الطلب بناء على بيانات الفترة الأخيرة حيث يقدر الطلب $\hat{D}_j$ للفترة بنفس ما كان عليه الطلب في الفترة السابقة j-1 و التي يرمز لها ب D_{j-1} أي $\hat{D}_j = D_{j-1}$.

(ب)- أن يتم تقدير الطلب $\hat{D}_j$ للفترة j بالمتوسط الحسابي له خلال عدد n من الفترات السابقة أي

$$\hat{D}_j = \frac{D_1 + D_2 + \cdots + D_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} D_k}{n}$$

حيث D_k هو الطلب الفعلي خلال فترة سابقة k ‏(k=1,2,...,n).

(ج)- طريقة المتوسطات المتحركة (Moving Averages): وذلك بأخذ متوسط الطلب الفعلي لآخر n فترة عادة ما يتم تقدير n بناءً على الخبرات التجريبية و تتميز هذه الطريقة بأنها تأخذ بعين الإعتبار ما يسمى بالتغيرات الموسمية (Seasonal Variations).

و عادة ما تتم مقارنة الطرق الثلاث أعلاه بأخذ مايسمى متوسط الخطأ المطلق (Mean Absolute Deviation) إختصارا (MAD) و الذي يعطى بالعلاقة

$$MAD = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left|D_k - \hat{D}_k\right|}{n}.$$

حيث $\hat{D}_k$ هو الطلب الذي تم التنبؤ به في الفترة k و D_k هو الطلب الفعلي للفترة k و n هو عدد الفترات. و أفضل قيمة لـ $\hat{D}_k$ من بين القيم المحسوبة في الطرق (أ)-(ب)-(ج) هي التي تكون عندها قيمة MAD أقل مايمكن.

(د)- طريقة الإنحدار الخطي (Linear Regression): وهي أبسط أنواع طرق الإنحدار (Regression Analysis) حيث يتم التعبير عن الطلب كدالة خطية في الزمن t أي $\hat{D} = at + b$ ويتم تقدير كل من a و b باستخدام طريقة المربعات الصغرى. فإذا كانت D_1، D_2،....، D_n هي الطلب الفعلي خلال الفترات t_1، t_2،....، t_n على الترتيب فإن طريقة المربعات الصغرى تقدر a بالعلاقة التالية:

$$a = \frac{n\sum_{k=1}^{n} t_k D_k - \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} D_k\right)}{n\sum_{k=1}^{n} t_k^2 - \sum_{k=1}^{n} t_k}$$

و عندها تعطى b بالعلاقة التالية:

$$b = \overline{D} - a\bar{t}$$

حيث $\overline{D}$ و $\bar{t}$ هما القيمتان المتوسطتان لـ D_j و t_j (j=1,2,...,n).

و بعد حساب كل من فاننا نحسب الطلب للفترة من العلاقة .

و الطرق المشار إليها أعلاه بشكل مختصر هي من أبسط الطرق المستخدمة للتنبؤ بالطلب (أو الإستهلاك). وفي هذا الصدد لا بد لنا من الإشارة إلى وجود العديد من الطرق الأخرى التي لا مجال لذكرها في هذا الكتاب إلا أننا ننصح المهتمين بالرجوع إلى المرجع رقم [42].

(٣,١) خواص نماذج المخزون

في الفقرة السّابقة بيّنا أهمية طبيعة الاستهلاك في تصنيف ودراسة نماذج المخزون. في هذه الفقرة سوف نستعرض خواص إضافية لنماذج المخزون التي يجب على الدارس أن يأخذها هي الأخرى بعين الاعتبار.

الاستهلاك الداخلي مقابل الاستهلاك الخارجي:

الاستهلاك الخارجي يكون في الحالة التي لا يمكن للمؤسسة التّحكّم في كميّة وتوقيت طلبات الزّبائن. بينما الاستهلاك الداخلي يكون في حالة التّحكّم وتوقيت طلبات الزّبائن.

هناك أنظمة مخزون التي يجتمع فيها كلاً من الاستهلاك الداخلي والاستهلاك الخارجي كالمؤسّسات التي تقوم بتركيب أو تصنيع أجهزة الحاسب. في هذه المؤسّسات هناك استهلاك خارجي لأجهزة الحاسب واستهلاك داخلي للقطع النّصف مصنّعة (القطع المستخدمة للتّركيب). في هذا الكتاب نكتفي فقط بدراسة نماذج المخزون ذات الاستهلاك الخارجي.

الطّلبية مقابل الإنتاج:

للمؤسّسات إمكانية الحصول على البضاعة عن طريق استقدامها من مموّلين خارجيين أو عن طريق توفير خطوط ووحدات محلّية للقيام بإنتاجها داخل المؤسّسة. كل من هاتين الطّريقتين لها ميزاتها الخاصّة وبالخصوص إذا كانت كمية البضاعة المرغوب في الحصول عليها كبيرة جدّا. فعملية إنتاج البضاعة داخل وحدات إنتاج محلّية غالبا ما تحتاج إلى وقت لتحضير آلات الإنتاج. فإذا كان هذا الوقت كبيرا جدّا فانّ للمؤسّسة إمكانية التّوفير من قيمة ما يسمّى بتكاليف التّحضير وذلك بإنتاج كمّيات كبيرة جدّا في كلّ مرحلة إنتاج.

إنّ ميزة عملية استقدام البضاعة من خارج المؤسّسة هي إمكانية الاستفادة من عروض التّخفيضات المقترحة على المؤسّسة من طرف المموّلين والتي تكون غالبا إن لم نقل دائما في حالة استقدام كمّيات كبيرة جدّا من البضاعة.

المراجعة المتّصلة مقابل المراجعة الدّورية:

للمؤسّسات إمكانية مراجعة المخزون بصفة متّصلة أو بصفة دورية. في حالة المراجعة المتّصلة يكون الإشراف على المخزون متواصلا وبدون انقطاع ويمكن استقدام الطّلبية في أي وقت ممكن. بينما في حالة المراجعة الدّورية يكون الإشراف على المخزون محدّدا بأوقات معيّنة يتمّ عندها فقط اتّخاذ قرارات استقدام الطّلبية. فعلى سبيل المثال عمليّة تمويل بقالة تتمّ غالبا بشكل دوري (يومياً أو أسبوعياً... الخ). أي أن المموّلين يقومون بتوزيع البضاعة في أوقات محدّدة مسبقا إلا في الحالات الطّارئة أو الاستعجالية. وبالتالي عملية الإشراف على المخزون تكون دورية هي الأخرى. لاحظ أن مراجعة المخزون في هذا المثال ليست متّصلة لانّ البائع لا يقوم بالجرد الآني لبضاعته.

من السّهل علينا ملاحظة أن المراجعة المتّصلة للمخزون هي عمليّة صعبة جدّاً وخاصّة بالنّسبة للمؤسّسات الضّخمة ذات منتجات متعدّدة الأنواع في حين يظهر للملاحظ أن عمليّة المراجعة الدّورية هي أكثر سهولة وأقرب للواقع من النّوع الأول.

لكن لكل نوع من المراجعة ميزة تجعله احسن من النّوع الآخر من وجهة نظر التّكاليف الإجمالية.

فالمراجعة المتّصلة للمخزون تكون افضل وتعطينا نتائج احسن بكثير من المراجعة الدّورية في حالة ما إذا كان عدد أنواع البضاعة صغيرا. في حين إذا كان عدد أنواع البضاعة كبيرا جدّا (آلاف ومئات الآلاف) المراجعة المتّصلة شبه مستحيلة. وبالتالي نلجأ إلى عمليّة المراجعة الدّورية التي هي الأفضل في مثل هذه الحالات.

بضاعة واحدة مقابل بضاعة متعدّدة:

إن دراسة أنظمة المخزون أحادية البضاعة تكون فيها الحسابات سهلة نسبياً وخاصّة عمليّة بناء النّموذج.

في هذا الكتاب سوف نتطرّق بكثرة إلى نماذج من هذا النّوع. لكن معظم المؤسّسات الموجودة على أرض الواقع تتعامل (بيع، شراء، توزيع... الخ) مع بضائع متنوعة. ولدراسة أنظمة المخزون لهذه المؤسّسات توجد نماذج مناسبة تسمّى نماذج متعدّدة البضاعة وسوف نتناول في الفصل الثاني أحد أنواع هذه النّماذج.

(٤,١) تكاليف التّخزين

من الطّبيعي أن يترتب عن عملية تخزين البضائع تكاليف متنوعة. تهدف نماذج المخزون التي سوف نتناولها في هذا الكتاب إلى جعل التّكاليف الإجمالية لنظام المخزون أقلّ ما يمكن. فيما يلي نستعرض بصفة موجزة أنواع التّكاليف اللاّزمة لبناء النّموذج.

(١) تكلفة شراء أو إنتاج وحدة بضاعة: (Purchasing or Production Costs)

يقصد بتكلفة شراء وحدة بضاعة السّعر المفروض من طرف المموّل لكلّ وحدة بضاعة.
عادة ما تكون تكلفة الشّراء غير ثابتة وتتغيّر نسبيا مع الكمّية المشتراة.
يقصد بتكلفة الإنتاج لوحدة بضاعة تكاليف للمواد الأولية وتكاليف اليد العاملة للوحدة المنتجة.

(٢) تكلفة الطّلبية أو التّحضير: (Ordering or Setup Costs):

يقصد بتكلفة الطّلبية التّكاليف النّاتجة عن تقديم طلب استقدام البضاعة وتكون مستقلّة عن كمّية البضاعة المطلوبة. كلّما زاد عدد الطّلبيات في وحدة الزّمن كلّما زادت تكلفة الطّلبية في وحدة الزّمن. عند تقدير تكلفة الطّلبية يجب أخذ التّكاليف التّالية بعين الاعتبار:

* رواتب الموظّفين في قسمي المشتريات والمحاسبة.
* تكاليف الحصول على الموافقة لإصدار الطّلبية.
* تكاليف الاتّصالات (البريد، الهاتف، الفاكس).
* تكاليف استقبال البضاعة (تفريغ البضاعة من وسائل النّقل واختبار صلاحيتها).
* تكاليف الإشراف.
* تكاليف الوسائل المستخدمة (الآلات).

وعادة ما تضاف التّكاليف التّالية: مراقبة الجودة، النّقل، التّوزيع، الفرز.

ملاحظة (٣,١)

عند حساب التّكلفة الإجمالية للطّلبية نبحث عن التّكلفة التّزايدية (Incremental) للطّلبية الواحدة. وللقيام بذلك نحتاج إلى تقديرات للتّكاليف الجزئية من قسم المشتريات، قسم المحاسبة وقسم المستودعات الموافقة لعددين مختلفين من الطّلبيات في وحدة الزّمن مثلما يوضّحه المثال التالي:

مثال (١,١)

أعطت تقديرات التّكاليف الجزئية الواردة من أقسام المشتريات، المحاسبة والمستودعات الجدول التالي:

جدول (١,١): التكلفة الإجمالية للطّلبية

القسم	نوع المصاريف	الراتب السنوي	حالة ٣٠٠٠ طلبية في السنة		حلة ٥٠٠٠ طلبية في السنة	
			العدد	التكلفة السنوية	العدد	التكلفة السنوية
قسم المشتريات	مدير قسم للمشتريات	٤٠٠٠٠	١	٤٠٠٠٠	١	٤٠٠٠٠
	مندوب المشتريات	٣٠٠٠٠	٣	٩٠٠٠٠	٥	١٥٠٠٠٠
	مساعد المدير	٢٠٠٠٠	٢	٤٠٠٠٠	٣	٦٠٠٠٠
	سكرتير المدير	١٥٠٠٠	١	١٥٠٠٠	٢	٣٠٠٠٠
	متطلبات مكتبية	١١٠٠٠	–	١١٠٠٠	–	١١٠٠٠
قسم المستودعات	مسؤول الجرد	١١٠٠٠	٢	٢٢٠٠٠	٣	٣٣٠٠٠
	متطلبات المستودع	١٢٠٠٠	–	١٢٠٠٠	–	١٢٠٠٠
قسم المحاسبة	المحاسب	١٢٠٠٠	٢	٢٤٠٠٠	٤	٤٨٠٠٠
	متطلبات مكتبية	١٣٠٠٠	–	١٣٠٠٠	–	١٣٠٠٠
	المصاريف الإجمالية			٢٦٧٠٠٠		٣٩٧٠٠٠

من الجدول أعلاه لنا التّكلفة الإجمالية للطّلبية لعدد ٣٠٠٠ طلبية في السّنة يساوى ٣٩٧٠٠٠ − ٢٦٧٠٠٠ = ١٣٠٠٠٠ ريال. وبالتالي التّكلفة التّزايدية للطّلبية الواحدة يساوى ٢٠٠٠/١٣٠٠٠٠ = ٦٥ ريال.

إذا كانت البضاعة تنتج داخل المؤسّسة فإننا نتحدّث عن تكاليف التّحضير النّاتجة كل مرّة يتمّ فيها تحضير آلات الإنتاج وهي الأخرى مستقلّة تماما عن الكمّية المنتجة.

عند تقدير تكلفة التّحضير يجب اخذ التّكاليف التّالية بعين الاعتبار:

* رواتب العمّال في قسم الإنتاج.
* تكاليف إعادة تشغيل الآلات عند الضّرورة.
* تكاليف اختبار صلاحية الآلات عند بداية التّشغيل.
* التّكاليف النّاتجة عن عدم خبرة العمّال.

وعادة ما تضاف تكاليف تحضير أخرى كاستدعاء التّقنيين والفنّيين المتخصّصين لعمليات ضبط وتصليح الآلات وما إلى ذلك من التّكاليف المتنوّعة.

ملاحظة (٤,١)

عند حساب التّكلفة الإجمالية للتّحضير نبحث عن التّكلفة التّزايدية للتّحضير الواحد ويتم بطريقة مشابهة لحساب التّكلفة التّزايدية للطّلبية الواحدة (أنظر مثال (١,١)).

(٣) تكلفة التّخزين: (Holding Cost)

يقصد بتكلفة التّخزين التّكاليف النّاجمة عن تخزين وحدة بضاعة في وحدة الزّمن.

تزداد قيمة تكلفة التّخزين بزيادة كمّية البضاعة المخزنة. تتطلّب عملية تقدير تكلفة التّخزين أخذ العناصر التّالية بعين الاعتبار:

* تجميد رؤوس الأموال: وينتج ذلك عن تكديس كمّيات ضخمة من البضاعة في المخازن في حين كان الأنسب للمؤسّسة تجنّب ذلك بتخزين كمّيات اقل والاستفادة من الأموال الإضافية في استثمارات أخرى.
* تكاليف محلاّت التّخزين النّاتجة عن استئجار المستودعات وما يلزمها من خدمات كالكهرباء، تدفئة المحلاّت، الحارس، ...الخ.
* تكاليف التّلف: سرقة أو فساد البضاعة أو عدم صلاحيتها (كظهور أنواع جديدة أكثر تطوّرا تفقد قيمة هذه البضاعة فمثلاً ظهور برنامج Windows XP يفقد كلّياً قيمة برنامج Windows 2000).
* تكاليف توزيع وترتيب البضاعة داخل المخازن.
* تكاليف إدارة المخازن كالتي تنتج عن عمليّة المراجعة المتّصلة أو المراجعة الدّورية للمخزون.
* تكاليف التّأمين.

(٤) تكلفة العجز: (Shortage Cost)

تعريف (٢,١)

نقول أن المؤسّسة في حالة عجز إذا لم تستطع تلبية طلبات الزّبائن لنفاذ المستودعات والمخازن من البضاعة.

للعجز آثار سلبية على التّكاليف الإجمالية للنّظام ومنها:

* ضياع الأرباح التّي كان يمكن الحصول عليها لو توفّرت البضاعة عند الطّلب.
* ضياع بعض الزّبائن وعدم عودتهم مرّات أخرى لاقتناء البضاعة.
* تشويه السّمعة التّجارية للمؤسّسة وينتج عن هذا آثارا سلبية كثيرة.

تعريف (١ ,٣)

يقصد بتكلفة العجز التكاليف النّاجمة عن وقوع المؤسّسة في حالة عجز.

تعتبر تكلفة العجز من أصعب التّكاليف من ناحية القياس والتّقدير وذلك يرجع لاختلاف طرق تعامل المؤسّسات مع الزّبائن في حالات العجز.

عند وقوع المؤسّسة في حالة العجز يمكن للإدارة استخدام أحد النّماذج المناسبة لذلك ويتمّ اختيار النّموذج حسب حالة العجز.

من هذه النّماذج ما يلي:

* **نماذج فقدان كل الزّبائن**: وتستخدمها المؤسّسات في حالة الفقدان والضّياع الكلّي للزّبائن وعدم عودتهم مرة أخرى لاقتناء البضائع من هذه المؤسّسات وتحوّلهم إلى مؤسّسات منافسة.

* **نماذج الاحتفاظ بكل الزّبائن**: وتستخدمها المؤسّسات في الحالة التّي يتمّ فيها الاحتفاظ بكلّ الزّبائن الذّين لم تتمكّن من تلبية طلباتهم ويتمّ ذلك باستدعائهم وقت حضور البضاعة وتلبية طلباتهم.

* **نماذج فقدان بعض الزّبائن**: وتستخدم في الحالات التّي يمكن فيها الاحتفاظ ببعض الزّبائن كتسجيلهم واستدعائهم لحظة حضور البضاعة. وفقدان البعض الآخر من الزّبائن لعدم التّمكّن من تسجيل أسمائهم أو لعدم التّمكّن من إقناعهم بالعودة حين حضور البضاعة.

إن عملية تقدير تكاليف العجز الإجمالية تعتمد على معرفة التّكاليف الجزئية التّالية:
تكاليف الاستقدام الاستعجالي للبضاعة للتّغطية اللّحظية لطلبات الزّبائن.
تكاليف التّوزيع الاستعجالي للبضاعة للتّغطية اللّحظية لطلبات الزّبائن.
تكاليف التّعامل مع مموّلين جدد بأسعار باهضة جدّا مقارنة مع أسعار الممولين المعتاد التعامل معهم.
تكاليف متنوعة ناجمة عن الإجراءات المتخذة من طرف المؤسّسة لمعالجة حالة العجز.

(٥,١) مردود نظام المخزون

(Stock Turnover)

إنّ دراسة فعّالية نظام المخزون تعتبر إحدى الطّرق الفعّالة لإعطاء معلومات مهمّة عن نظام المخزون. وهذه الدّراسة تتمّ بقياس ما يسمّى بمردود نظام المخزون الذّي يحسب بالعلاقة التّالية:

مردود نظام المخزون = قيمة متوسّط مستوى المخزون ف.و.ز / تكاليف المبيعات ف.و.ز (١, ١)

ملاحظة (١ ,٥)

* يقصد بالترميز ف.و.ز : في وحدة الزمن.
* تزداد فعالية نظام المخزون بزيادة قيمة مردود نظام المخزون (ST).
* تتغيّر قيمة مردود نظام المخزون (ST) بتغيّر نوعية المنتجات فمثلا مردود مصانع تركيب السّيارات ومعامل تكرير البترول يتراوح في حدود ٥٠ بينما المحلاّت التّجارية وما شابهها من المؤسّسات الصّغيرة يتراوح مردودها في حدود ٥.

مثال (٢,١)

يشترى بائع جملة مجموعة بطّانيات بتكلفة قدرها ١٠٠ ريال للوحدة ويبيعها بسعر ١٥٠ ريال للوحدة. إذا علمنا أن عدد البطّانيات التّي تباع سنوياً يساوي ١٠٠٠ بطّانية بمتوسط سنوي

للمخزون يساوي ١٥٠ بطّانية وانّ التّكلفة السّنوية لتخزين البطّانية الواحدة يقدّر بحوالي ٢٥%
من تكلفة شراء البطّانية فالمطلوب هو:

١ - حساب ما يلي:

أ) مردود نظام المخزون (ST).

ب) الرّبح الغير الصّافي السّنوي للبائع.

ج) المتوسّط السّنوي للأموال المستثمرة في المخزون.

د) المتوسط السّنوي لتكلفة التّخزين.

٢ - أجب على كل الأسئلة (أ) - (د) في السّؤال ١) في حالة تمكّن البائع من تخفيض متوسّط مستوى المخزون (متوسّط عدد البطانيات المخزّنة) من ١٥٠ بطّانية إلى ١٠٠ بطّانية.

ثمّ قارن بين النّتائج المتحصّل عليها في كلتا الحالتين.

الحل:

١)

أ) حساب مردود نظام المخزون (ST):

مردود نظام المخزون = قيمة متوسّط مستوى المخزون ف.و.ز/تكاليف المبيعات ف.و.ز

= (١٠٠ × ١٥٠) ÷ (١٠٠ × ١٠٠٠)

= ٦,٦٧

ب) حساب الرّبح غير الصّافي السّنوي للبائع:

الرّبح الغير الصّافي السّنوي = عدد المبيعات × (ثمن البيع - تكلفة الشّراء)

= ١٠٠٠ × (١٥٠ - ١٠٠)

= ٥٠٠٠٠ ريال سنوياً.

ج) حساب المتوسّط السّنوي للأموال المستثمرة في المخزون:

المتوسّط السّنوي للأموال المستثمرة = عدد الوحدات المخزّنة × تكلفة شراء الوحدة

= ١٥٠ × ١٠٠ = ١٥٠٠٠ريال سنوياً.

د) حساب المتوسّط السّنوي لتكلفة التّخزين:

المتوسّط السّنوي = المتوسّط السّنوي لعدد الوحدات المخزّنة × التّكلفة السّنوية لتخزين الوحدة
= ١٥٠ × ٠,٢٥ × ١٠٠ = ٣٧٥٠ ريال سنوياً.

٢)

أ) مردود نظام المخزون = (١٠٠ × ١٠٠) ÷ (١٠٠٠ × ١٠٠) =١٠.

ب) الرّبح غير الصّافي السّنوي للبائع لا يتغير أي يساوي ٥٠٠٠٠ ريال سنوياً.

ج) المتوسّط السّنوي للأموال المستثمرة في المخزون = ١٠٠ × ١٠٠ = ١٠٠٠٠ ريال سنوياً.

المتوسّط السّنوي لتكلفة التّخزين = ١٠٠ × ٠,٢٥ × ١٠٠ = ٢٥٠٠ ريال سنوياً.

بمقارنة النّتائج المتحصّل عليها في كلتا الحالتين لنا الملاحظات التّالية:

* يتغيّر كل من المردود، المتوسّط السّنوي للأموال المستثمرة في المخزون والمتوسّط السّنوي لتكلفة التّخزين بتغيّر المتوسّط السّنوي لعدد الوحدات المخزّنة في حين يبقى الرّبح الغير الصّافي السّنوي للبائع ثابتا لا يتغير ولا يتأثّر بذلك.

* تحسّنت فعّالية نظام المخزون اثر هذا التّغير في المتوسّط السّنوي لعدد الوحدات المخزّنة حيث ارتفع مردود نظام المخزون من ٦,٦٧ إلى ١٠.

(٦,١) تحليل ا.ب.ج

(ABC Analysis)

إن تعدّد أو اختلاف أنواع البضاعة في المخزون والتّي تكون تكاليفها متفاوتة القيم تستوجب استعمال تقنيات وطرق مختلفة لدراسة أنظمة المخزون لكل بضاعة فمثلا مخازن المستشفيات تحوي أنواع متعدّدة من البضائع ذات قيم تتراوح من ١ ريال كحقنة التّطعيم إلى ٢٠٠٠ ريال أو أكثر كالأسرّة.

في مثل هذه الحالات تلجأ المؤسّسات إلى استخدام ما يسمى بتحليل ا.ب.ج (ABC – Analysis)فتقوم بتصنيف أنواع البضاعة إلى ثلاثة أصناف أساسية (أ) (ب) (ج). أثبتت التّجارب أنّ عمليّة التّصنيف المثلى تتمّ بالنّسب التّقريبية التّالية: ١٥% من أنواع البضاعة في

الصّنف (أ). ٣٥% من أنواع البضاعة في الصّنف (ب) و٥٠% من أنواع البضاعة في الصّنف (ج). عادة ما تصنّف البضاعة حسب القيمة الإجمالية لها في وحدة الزّمن. فنضع في الصّنف (أ) الأنواع ذات القيمة الإجمالية الأعلى ثمّ في الصّنف (ب) الأنواع ذات القيمة الإجمالية الأقل من أنواع الصّنف (أ) والأنواع المتبقّية توضع في الصّنف (ج).

عملية التّصنيف هذه تسهل على المؤسّسة دراسة أنظمة المخزون لكل صنف على حدا وبالطّريقة المناسبة وذلك وفقا لأهمّية الصّنف وقيمة البضاعة الموجودة فيه.

المثال التّالي يوضّح كيفية إجراء هذا التّصنيف:

مثال (٣,١)

يحتوي مخزون مؤسّسة على ١٢ نوع مختلف من البضاعة كما هو موضّح في الجدول (٢,١).

جدول (٢,١) بيانات المثال (٣,١)

رقم البضاعة	الاستهلاك السّنوي	تكلفة الشّراء	القيمة الإجمالية السنوية
٢٢٢١٣	١٠٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠٠
٢٢١٥٧	٢٠٠٠	٥٠٠	١٠٠٠٠٠٠
٢٢٥٤٥	٢٠٠	١٥٠٠	٣٠٠٠٠٠
٢٢٤٣٢	٤٠٠	٥٠٠	٢٠٠٠٠٠
٢٢٥١١	١٥٠	٧٠٠	١٠٥٠٠٠
٢٢٤٥٧	٢٤٠	١٠٠	٢٤٠٠٠
٢٢١١١	٣٠٠	٥٠	١٥٠٠٠
٢٢٣٣١	١٠	١٠٠	١٠٠٠
٢٢٤٧١	١٠	١٠٠	١٠٠٠
٢٢٥١٢	٢٥	٢٥	٦٢٥
٢٥٥٣١	٣٠	٢٠	٦٠٠
٢٢١٢٢	٥٠	١٠	٥٠٠

من الجدول (٣,١) لنا ما يلي: أقرب نسبة إلى ١٥% من مجموع أنواع البضاعة تساوي ١٦,٦٧% وهي النّسبة الموافقة للعدد ٢ وعليه نضع نوعين من البضاعة في الصّنف (ا) وهذين النّوعين يتمّ اختيارهما بأخذ الأنواع ذات القيمة الإجمالية السّنوية الأكبر وهما ٢٢٢١٣ و٢٢١٥٧.

جدول (٣,١) نتائج المثال (٣,١)

عدد أنواع البضاعة	١	٢	٣	٤	٥	٦
النسبة الموافقة لها	١٢/١ = %٨,٣٣	١٢/٢ = %١٦,٦٧	١٢/٣ = %٢٥	١٢/٤ = %٣٣,٣	١٢/٥ = %٤١,٦٧	١٢/٦ = %٥٠

أقرب نسبة إلى ٣٥% من مجموع أنواع البضاعة تساوي ٣٣,٣٣% وهي النّسبة الموافقة للعدد ٤ وعليه نضع ٤ أنواع من البضاعة في الصّنف (ب) ويتمّ اختيارهم بأخذ الأنواع ذات القيمة الإجمالية السّنوية الأكبر من الأنواع المتبقية وهذه الأنواع هي: ٢٢٠٤٥، ٢٢٤٣٢، ٢٢٥١١، ٢٢٤٥٧.

باقي الأنواع توضع في الصّنف (ج).

جدول (٤,١) نتائج التصنيف لمثال (٣,١)

الصنف	القيمة الإجماليّة السنوية	النسبة من مجموع القيمة الإجمالية السنوية
(أ)	٢٠٠٠٠٠٠	%٧٥,٥
(ب)	٦٢٩٠٠٠	%٢٣,٨
(ج)	١٨٧٢٥	%٠,٧

الجدول (٤,١) يبيّن أنّ مراقبة نظام المخزون للصّنف (أ) لوحده والذّي يحوي على نوعين فقط من أنواع البضاعة هي مراقبة ٧٥,٥% من قيمة رؤوس الأموال المستثمرة في هذا النّظام. وعليه فانّ من البديهي أن تبدي المؤسّسة أكثر عناية واهتمام ببضاعة الصّنف (أ) وأن تنفق أموالا أكثر لإجراء مراقبة ذات أكثر دقّة من مراقبة الصّنفين الآخرين.

تمارين

١) يقوم وكيل معتمد لشركة الاتّصالات السّعودية بتوزيع هواتف محمولة من نوع T39m. قدّرت تكلفة شراء الجهاز الواحد ب ٧٥٠ ريال بينما يبيع الوكيل المعتمد الجهاز الواحد بسعر ١٠٠٠ ريال.

إذا علمت أنّ عدد الأجهزة الّتي يبيعها شهرياً يساوي ٥٠ جهازاً بمتوسط شهري للمخزون يساوي ٢٥ جهازاً . وأنّ تكلفة التّخزين للجهاز الواحد تساوي ٧٥ ريال سنويا فالمطلوب هو حساب القيم التّالية:

أ) مردود النّظام.

ب) الرّبح الغير الصّافي للوكيل شهريا.

ج) المتوسّط السّنوي للأموال المستثمرة من طرف الوكيل المعتمد.

د) متوسط تكلفة تخزين لفصل الخريف.

هـ) إذا ارتفع متوسط مستوى المخزون من ٢٥ جهاز إلى ٣٠ جهاز فأجب على نفس الأسئلة السّابقة ثمّ قارن بين النّتائج المتحصّل عليها في كلتا الحالتين.

و) نفس السّؤال السّابق إذا انخفض متوسّط مستوى المخزون من ٢٥ جهاز إلى ٢٠ جهاز.

ز) ماذا تلاحظ وماذا تستنتج عند انخفاض أو ارتفاع مستوى المخزون وما هو تأثير ذلك على الرّبح الغير الصّافي للوكيل المعتمد؟

٢) لتركيب جهاز جوّال (هاتف محمول) يحتاج المصنع إلى عدّة أنواع من المواد الأوّلية المتفاوتة القيمة. الجدول (١ ,٥) يوضّح لنا بالتّفصيل القيمة الإجمالية ومعلومات إضافية لهذه المواد. طبّق طريقة تحليل أ.ب.ج على نظام المخزون لهذا المصنع.

جدول (٥,١) بيانات التمرين (٢)

رقم البضاعة	الاستهلاك السّنوي	تكلفة الشّراء	القيمة الإجمالية السنوية
١	٢٦٠٠٠	١,١٥	٢٩٩٠٠
٢	٢٠٠٠٠	٠,١٥	٣٦٠٠
٣	١٤٠٠٠	١,٧٠	٢٣٨٠٠
٤	٤٨٠٠٠	٢,٥٠	١٢٠٠٠٠
٥	١٨٠٠٠	٠,١٢	٢١٦٠
٦	٦٥٠٠٠	٠,٠٥	٣٢٥٠
٧	٧٠٠٠٠	٠,٠٩	٦٣٠٠
٨	٣٤٠٠٠	٠,١٦	٥٤٤٠

الفصل الثاني

نماذج المخزون السّاكنة

(٢, ١) مقدمة

نتناول في هذا الفصل بعض النّماذج الكمية التي تستخدم لمراقبة وضبط أنظمة المخزون لسلعة واحدة وذلك في الحالة التي يكون فيها معدّل استهلاك البضاعة معلوماً وثابتاً. ومع أن هذا الافتراض لا ينطبق تماماً على حالات الواقع العملي إلا أنه ينطبق بشكل تقريبي على بعض الحالات كبعض أنواع الأطعمة مثل الخبز والحليب وبعض الأجهزة والأدوات الكهربائية أو معدات الصيانة وغيرها من الأمثلة التي تتميز بثبات معدل الاستهلاك خلال فترة زمنية معينة وعدم خضوع هذا المعدل لما يسمى بالتغيرات الموسمية أو غيرها.

نقوم أولاً بعرض بعض المفاهيم والنتائج من طرق الأمثلية (Optimization Methods) التي قد نحتاج لبعض منها في هذا الفصل وما يليه من بقية فصول الكتاب.

تعريف (٢, ١):

لتكن ($f: S \to R\,(S \subseteq R^n)$ دالة حقيقية معرفة على مجموعة جزئية S من R^n ولتكن x_0 نقطة من S.

١ . نقول أن f لها قيمة صغرى مطلقة (Global Minimum) على S عند النقطة x_0 إذا تحقق ما يلي:

$$f(x_0) \le f(x)\ ;\ \forall x \in S$$

نسمّي x_0 نقطة صغرى مطلقة لـ f على S ونسمّي $f(x_0)$ القيمة الصّغرى المطلقة لـ f على S عند x_0.

٢ . نقول أن f لها قيمة عظمى مطلقة (Global Maximum) على S عند النقطة $x0$ إذا تحقق ما يلي:

$$f(x_0) \ge f(x)\ ;\ \forall x \in S$$

نسمّي x_0 نقطة عظمى مطلقة لـ f على S ونسمّي $f(x_0)$ القيمة العظمى المطلقة لـ f على S عند x_0.

تعريف (٢, ٢):

لتكن $f: S \subseteq R^n \to R$

١ . نقول أن f دالة محدبة (Convex) على S إذا حققت الشرط التالي:

$$\forall x, y \in S, \forall t \in [0,1]: \begin{cases} ty+(1-t)x \in S & \text{(a)} \\ \text{و} & \\ f(ty+(1-t)x) \le tf(y)+(1-t)f(x) & \text{(b)} \end{cases}$$

ونعبر عن تحقق الشرط (a) بقولنا إن المجموعة S هي مجموعة محدبة (Convex set).

٢ . نقول أنّ f دالة مقعرة (Concave) على S إذا كانت الدالة (-f) محدبة على S.

٣ . إذا كانت $f : S \to R \ (S \subseteq R^n)$ قابلة للإشتقاق مرتين على الأقل فإن المصفوفة الهسية لـ f عند $\mathbf{x} \in S$ (Hessian Matrix) والتي سنرمز لها بالرمز $H(\mathbf{x})$ تعطى بما يلي:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

ويكون $(i \neq j)$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ إذا كانت $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ دالة متصلة وعندها تكون $H(\mathbf{x})$ مصفوفة متناظرة.

٤ . نقول عن مصفوفة $A=[a_{ij}]$ $(i = ١، ٢، .... n)$ و $(j = ١، ٢، ... n)$ شبه موجبة تحديداً (Positive Semidefinite) إذا كان:

(١) جميع عناصرها القطرية غير سالبة.

(٢) جميع محدداتها الرئيسة غير سالبة.

ويقال إن A موجبة تحديداً (Positive Definite) إذا تحقق الشرطان (١) و (٢) بعد استبدال «موجبة» بـ «غير سالبة».

ونقول عن $A=[a_{ij}]$ إنها شبه سالبة تحديداً (سالبة تحديداً) Negative Semi-Definite (Negative Definite) إذا كانت $-A=[-a_{ij}]$ هي شبه موجبة تحديداً (موجبة تحديداً).

ونقول عن $A=[a_{ij}]$ إنها غير محددة (Indefinite) إذا لم تكن من أي الفئات الأربع أعلاه.

٥ . إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق فإن الشرط الضروري لكي تكون x_0 نقطة حدية (عظمى . صغرى . أو سرجية) هو $\nabla f(x_0)=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ فإذا كانت x_0 نقطة حدية للدالة فإن x_0 تكون صغرى-عظمى أو سرجية حسبما تكون $H(x_0)$ شبه موجبة تحديداً-شبه سالبة تحديداً أو غير محددة على الترتيب.

يمكن استخدام المشتقات الثانية لـ f لمعرفة تحدب أو تقعر الدالة f مثلما تبينه النظرية التالية:

نظرية (٢, ١):

إذا كانت المصفوفة الهسية $H(x)=\nabla^2 f(x)$ شبه (سالبة) موجبة تحديداً لكل x في S فإن الدالة f تكون محدبة (مقعرة) على S وإذا كانت $H(x)$ موجبة (سالبة) تحديداً على S فإن f تكون محدبة (مقعرة) تماماً على S.

والأمثلة التالية توضح هذه النظرية.

مثال (٢, ١):

تحقق فيما إذا كانت الدّوال التّالية محدّبة أو مقعرة:

١- $f(x)=2x^2+1$

٢- $g(x) = \ln(x)$

٣- $h(x) = x^3$

٤- $f(x, y) = x^2 + y^2$

٥- $g(x, y) = \ln(x) - e^y - 5$

٦- $h(x, y, z) = \ln(x)\frac{z^2}{2} + \frac{y^2}{2} +$

الحل:

١- بما أن $f''(x)=4$ موجبة لكل x في R فإن f محدبة على R.

٢- بما أن $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$ سالبة لكل x في $R\setminus\{0\}$ فإن f مقعرة على $R\setminus\{0\}$.

٣- بما أن $h''(X) = 6X$ موجبة على $[0,\infty)$ وسالبة على $(-\infty,0]$ فإنّ محدبة على $[0,\infty)$ ومقعرة على $(-\infty,0]$.

٤- بما أن المصفوفة $\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ موجبة تحديداً لكل (x,y) في R^2 لأن محدداتها الرئيسية هي $h_{11}=2 > 0$, $h_{22} = 4 > 0$ فإن f محدّبة تماماً على R^2.

٥- بما أن المصفوفة $\nabla^2 g(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -e^y \end{bmatrix}$ سالبة تحديداً لكل (x, y) في R^2 لأن $h_{11} = -\frac{1}{x^2} < 0$, $h_{22} = \frac{1}{x^2} e^y > 0$ فإن g مقعرة تماماً على R^2.

٦- بما أن المصفوفة

$$\nabla^2 h(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فإنّـه يمكـن التحقـق مـن أن $\nabla^2 h(x,y,z)$ موجبـة تحديـداً خـارج السـطح الأسـطواني $C = \{(x,y.z) \in R^3: y^2+z^2=1\}$ وسالبة تحديداً داخله وبالتالي فإن الدالة h محدبة تماماً خارج السطح C ومقعرة تماماً داخله.

نظرية (٢ ,٢):

إذا كانت الدالة f(x) محدبة (مقعرة) عندئذٍ تبلغ الدالة قيمة صغرى (عظمى) مطلقة عند نقطتها الحدية.

(٢ ,٢) النموذج الأساسي للكمية الاقتصادية للطّلب
The Basic Economic Order Quantity (EOQ) Model

الهدف الرئيس في هذا النموذج هو إيجاد حجم الطلبية الأمثل الذي **يجعل مجموع التكاليف ذات الصلة أقل ما يمكن** ونسمّي هذا الحجم «الكمية الاقتصادية للطلب (EOQ)». يستخدم هذا الحجم للإجابة على كثير من الأسئلة المتعلقة بالنظام، فعلى سبيل المثال نستخدمه لمعرفة متى نقوم بطلب الكمية، أو لمعرفة المستوى الأمثل للمخزون، إلخ وسوف نتناول هذه النقطة بتفصيل أكثر لاحقاً. ويعود تاريخ وضع ودراسة هذا النموذج إلى سنة ١٩١٥م عن طريق الباحث هاريس (Harris) لكن الباحثين ينسبون هذا النموذج إلى ولسن (Wilson) الذي قام بنشره وتوزيعه في ١٩٣٠م بطريقة مستقلة ودون أن يكون على علم بنتائج أبحاث هاريس.

فرضيات النموذج: يقوم هذا النموذج على مجموعة من الفرضيات التي تجعل العمليات الحسابية أكثر وضوحاً وسهولة. وتتلخص هذه الفرضيات فيما يلي:

١- معدل الاستهلاك (الطلب) ساكن (أي ثابت ومعلوم)، ونقصد بمعدل الاستهلاك عدد الوحدات المطلوبة في وحدة الزمن.

٢- يوجد صنف واحد من البضاعة في المخزون.

٣- يوجد استقدام لحظي للطلبات عندما تنفذ البضاعة من المخزون وعليه لا وجود لحالة العجز أي أن (الوقت المتقدم) «Lead Time» يساوي الصفر.

٤- كل التكاليف التالية تكون ثابتة ومستقلة عن حجم الكمية المطلوبة:

h: تكلفة التخزين لكل وحدة بضاعة في وحدة الزمن.

k: تكلفة الطلبية الواحدة.

P: تكلفة شراء وحدة بضاعة.

لحساب تكلفة التخزين الإجمالية في وحدة الزمن نحتاج إلى مفهومي الدورة التخزينية ومتوسط المخزون.

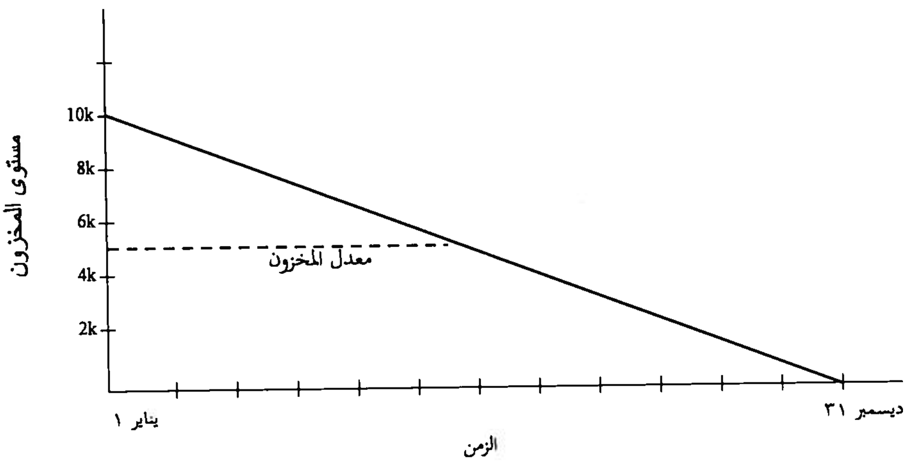
تعريف (٣, ٢):

مفهوم الدورة التخزينية: يقصد بالدورة (Cycle) الفترة الزمنية التي تبدأ لحظة وصول الطلبية وتنتهي لحظة وصول الطلبية التالية.

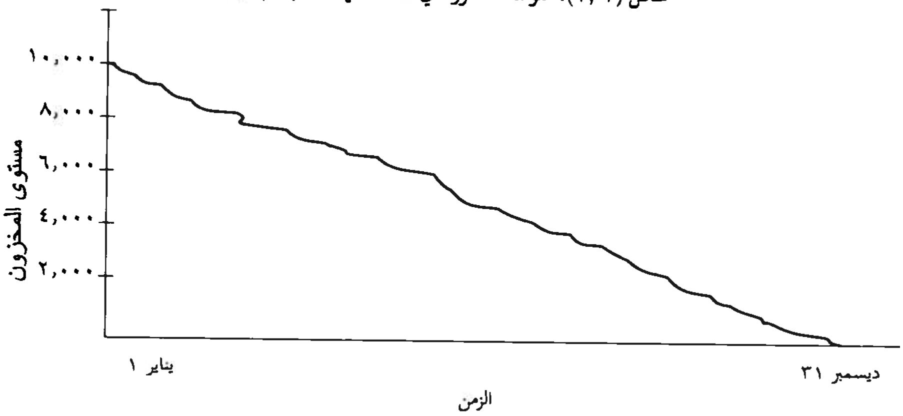
مفهوم متوسط المخزون: يعرف متوسط المخزون خلال دورة تخزينية بأنه يساوي $\frac{1}{2}\times$(مقدار المخزون في بداية الدورة التخزينية + مقدار المخزون في نهاية الدورة التخزينية).

وكأحد نماذج المخزون الساكنة فإن نموذج الكمية الاقتصادية للطلب يفترض ان معدل الاستهلاك ثابتاً أو شبه ثابت ويبين الشكل (٢, ١) حالة لنظام مخزون يكون فيه معدل الاستهلاك ثابتاً تماماً في حين يوضح الشكل (٢, ٢) حالة لنظام مخزون يكون فيه معدل الاستهلاك شبه ثابت وهذا النوع من الحالات هو الأكثر حدوثاً في الواقع كما أشرنا أعلاه.

شكل (٢, ١): متوسط المخزون في حالة استهلاك ثابت



شكل (٢, ٢): متوسط المخزون في حالة استهلاك شبه ثابت.



ومن الطبيعي أن معدل استهلاك البضاعة قلّما يكون ثابتاً مع الزمن ولكن إذا كان تغيره مع الزمن صغيراً لدرجة كافية فيمكن اعتباره ثابتاً وفي مثل هذه الحالات توجد طرق مختلفة لحساب متوسط مستوى المخزون والذي سنرمز له بالرمز $\bar{I}$. والطريقة الأكثر استخداماً تتمثل في قياس مستوى المخزون في فترات مختلفة ثم حساب متوسط هذه القياسات مثلما هو موضح بالمثال التالي:

مثال (٢, ٢):

أحسب متوسط مستوى المخزون $\bar{I}$ للنظام الموافق للقياسات الموضحة بالجدول (٢, ١).

جدول (٢, ١) بيانات المثال (٢, ٢)

تاريخ أخذ القياسات	مستوى المخزون	تاريخ أخذ القياسات	مستوى المخزون
١ محرم	١٠٠٠٠	١ رجب	٥٠٠٠
١ صفر	٩١٦٧	١ شعبان	٤١٦٧
١ ربيع الأول	٨٣٣٣	١ رمضان	٣٣٣٣
١ ربيع الثاني	٧٥٠٠	١ شوال	٢٥٠٠
١ جمادى الأولى	٦٦٦٧	١ ذو القعدة	١٦٦٧

١ جمادى الآخرة	٥٨٣٣	١ ذو الحجة ٣٠ ذو الحجة	٨٣٣ ٠

الحل:

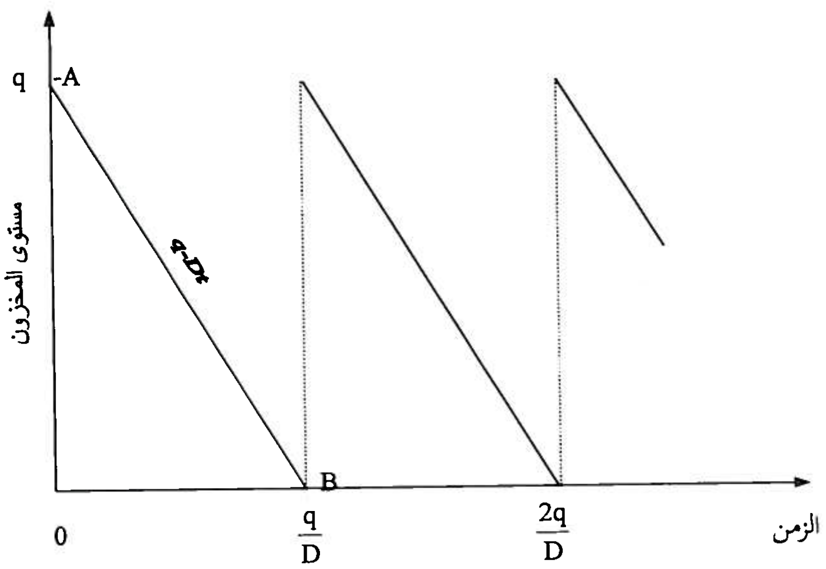
$$\text{متوسط مستوى المخزون } \bar{I} = \frac{\text{مجموع القياسات}}{\text{عدد القياسات}} = \frac{٦٥٠٠٠}{١٣} = ٥٠٠٠$$

= نصف المستوى الابتدائي للمخزون

بناء النموذج:

نفرض أولا أن البضاعة متوفرة دائما عند الطلب. ليكن q حجم الطلبية عند الزمن $t = 0$ وليكن D معدل الاستهلاك . بما أن D ساكن أي ثابت مع الزمن ومعلوم فإنه في كل فترة زمن طولها t وحدة زمنية تستهلك كمية قدرها Dt من البضاعة كما ينتج أيضاً أن حجم الطلبية q يتناقص خطيا مع الزمن وبذلك فإن مقدار المخزون في لحظة ما t يساوي q-Dt.

شكل (٢ ,٣): تغيرات مستوى المخزون في نموذج (EOQ).



وعند نفاذ البضاعة في المخزون فإن الفرضية (٣) تقتضي وصول كمية q من البضاعة لحظة انعدام مستوى المخزون. وعليه يرتفع مستوى المخزون من جديد إلى القيمة q (انظر الشكل (٢, ٣)).

وبذلك فإن طول الدورة (T) يعطى بالعلاقة التالية:

$$\text{طول الدورة } (T) = \frac{\text{حجم الطلبية } (q)}{\text{معدل الاستهلاك } (D)} \qquad (٢,١)$$

(على سبيل المثال إذا كان حجم الطلبية (q) يساوي ٦٠ سيارة ومعدل الاستهلاك (D) يساوي ٣ سيارات في اليوم فإن طول الدورة (T) يساوي ٢٠ يوماً).

عدد الطلبيات أو عدد الدورات (N) في وحدة الزمن يعطى بالعلاقة التالية:

$$N = \frac{\text{معدل الاستهلاك } (D)}{\text{حجم الطلبية } (q)} = \frac{1}{T} \qquad (٢,٢)$$

(فمثلاً إذا كان حجم الطلبية (q) يساوي ١٠٠ سيارة ومعدل الاستهلاك (D) يساوي ١٠٠٠ سيارة في السنة فإن عدد الطلبيات (N) يساوي ١٠ طلبيات في السنة).

نذكّر أن الهدف الأساسي لهذا النموذج هو إيجاد الحجم الأمثل للطلبية والذي سنرمز له بالرمز q^* أي عدد وحدات البضاعة التي يجب استقدامها والتي تصغّر التكلفة الإجمالية للمخزون في وحدة الزمن.

فإذا رمزنا بـ TCU (q) للتكلفة الإجمالية للمخزون في وحدة الزمن كدالة في (q) فإن:

$$TCU(q) = HCU(q) + OCU(q) + PCU(q) \qquad (٢,٣)$$

حيث HCU (q) يرمز لتكلفة التخزين في وحدة الزمن.

OCU (q) يرمز لتكلفة الطلبية في وحدة الزمن.

PCU (q) يرمز لتكلفة الشراء في وحدة الزمن.

سوف نقوم الآن بحساب كل من هذه التكاليف.

١ ـ تكلفة التخزين في وحدة الزمن = تكلفة التخزين في الدورة × عدد الدورات في وحدة الزمن.

وتكلفة التخزين في الدورة = [تكلفة تخزين وحدة بضاعة في وحدة الزمن] × [متوسط مستوى المخزون في الدورة] × [طول الدورة].

بما أنّ متوسط مستوى المخزون= $\frac{q+0}{2}$ وطول الدورة = $\frac{q}{D}$ فإن تكلفة التخزين في الدورة = $h \times \frac{q}{2} \times \frac{q}{D} = \frac{hq^2}{2D}$.

وبالتالي تكلفة التخزين في وحدة الزمن (ف.و.ز): $HCU(q) = \frac{hq^2}{2D} \div T = \frac{hq}{2}$.

٢ ـ تكلفة الطلبية (ف.و.ز) = تكلفة الطلبية في الدورة × عدد الدورات (ف.و.ز). وبما أن تكلفة الطلبية في الدورة = K لأن عدد الطلبيات في الدورة الواحدة =1 فإن تكلفة الطلبية (ف.و.ز): $OCU(q) = K \times N = \frac{KD}{q}$. (نذكر بأن $N = \frac{D}{q} = \frac{1}{T}$).

٣ ـ تكلفة الشراء (ف.و.ز)= تكلفة الشراء في الدورة × عدد الدورات (ف.و.ز).

وتكلفة الشراء في الدورة = تكلفة شراء وحدة بضاعة × عدد الوحدات المشتراة في الدورة $= p \times q = pq$.

ومنه تكلفة الشراء (ف.و.ز) $PCU(q) = pq \times N = pD$.

بالتعويض عن قيم التكاليف $HCU(q)$, $OCU(q)$, $PCU(q)$ في القانون (٢, ٣) نجد:

$$TCU(q) = \frac{hq}{2} + \frac{KD}{q} + pD \qquad (٢, ٤)$$

نظرية (٢, ٣):

الحجم الأمثل q^* يعطى بالعلاقة.

$$q^* = \sqrt{\frac{2kD}{h}} \qquad (٢, ٥)$$

البرهان:

باستخدام النظرية (٢ ,١) يمكننا التحقق من أن الدالة $TCU\ (q)$ هي دالة محدبة على $(0,\infty)$. من جهة أخرى تعطينا النظرية (٢ ,٢) الشرط الضروري والكافي لـ q^* حتى تكون نقطة صغرى لدالة التكلفة الإجمالية $TCU\ (q)$ وهو:

$$\frac{d}{dq}TCU(q)=0$$

بحساب المشتقة $\frac{d}{dq}TCU(q)$ ومساواتها بالصفر نحصل على:

$$\frac{h}{2}-\frac{KD}{q^2}=0$$

ومنه $(q^*)^2=\frac{2KD}{h}$ وبما أن الحجم الأمثل للطلبية q^* هو مقدار موجب فإن المساواة الأخيرة تعطينا العلاقة (٢ ,٥) المطلوب إثباتها.

إنّ القيمة q^* التي حصلنا عليها في النظرية (٢ ,٣) تجيب على الأسئلة الرئيسة التالية:

- ما هو الحجم الأمثل للطلبية «كم نطلب؟».

الجواب q^*.

- متى نقدم لطلبية؟ الجواب بعد T وحدة زمنية.

الجواب: لحساب الطول الأمثل للدورة T^* لدينا $T=\frac{q}{D}$ لذا فإن $T^*=\frac{q^*}{D}$ ومنه :

$$T^*=\sqrt{\frac{2KD}{h}}\times\frac{1}{D}=\sqrt{\frac{2K}{hD}}$$

– ما هو العدد الأمثل للطلبيات (ف.و.ز)؟ الجواب هو: N^* وتحسب كما يلي:

$$N^*=\frac{1}{T^*}=\sqrt{\frac{hD}{2K}}$$

كذلك فإن حساب q^* يمكننا من إيجاد التكلفة الإجمالية المثلى وهي أقل تكلفة إجمالية (ف.و.ز) فنجد من (٢ ,٣).

$$TCU(q^*)=\frac{hq^*}{2}+\frac{KD}{q^*}+p.D=\frac{h}{2}\sqrt{\frac{2KD}{h}}+KD\times\sqrt{\frac{h}{2KD}}+p.D \qquad (٢ ,٦)$$

$$= \sqrt{\frac{KDh}{2}} + \sqrt{\frac{KDh}{2}} + p.D = \sqrt{2KDh} + pD.$$

ملاحظة (٢ ,١):

١– لاحظ أن التكلفة الإجمالية (ف.و.ز) تساوي مجموع تكلفة متغيرة (ف.و.ز) نرمز لها بـ VCU(q) وتساوي:

$$VCU(q) = \frac{hq}{2} + \frac{KD}{q} \qquad (٢ ,٧)$$

وتكلفة ثابتة وهي تكلفة الشراء (ف.و.ز) ونرمز لها بـ FCU(q) وتعطى بـ FCU(q) = p.D.

٢ . لاحظ أيضاً أن تكلفة شراء وحدة بضاعة (p) لا تؤثر على قيمة الحجم الأمثل للطلبية q^* ولهذا السبب قد لا تدخل قيمة p في بعض التمارين والمسائل وفي مثل هذه الحالات نحسب التكلفة المتغيرة (ف.و.ز) VCU(q) بدلاً من حساب التكلفة الإجمالية (ف.و.ز) TCU(q) كما هو موضح في المثال التالي:

مثال (٢ ,٣):

تستهلك مؤسسة الحرية للطباعة والنشر ١٢٠٠ علبة ورق طباعة سنوياً. إذا علمنا أن تكلفة الطلبية تساوي ٢٠ ريال وتكلفة تخزين العلبة ٤,٨ ريال في السنة فأوجد ما يلي:

١) الكمية الاقتصادية للطلب والتكلفة الإجمالية المثلى سنوياً.

٢) العدد الأمثل للطلبيات سنوياً والطول الأمثل للدورة.

الحل:

من معطيات المثال لدينا ما يلي:

D = ١٢٠٠ علبة/سنة ، h = ٤,٨ ريال للعلبة/سنة ، K = ٢٠ ريال

نختار وحدة الزمن تساوي 1 سنة.

١) الكمية الاقتصادية للطلب:

علبة $100 = \sqrt{\frac{(2)(20)(1200)}{4.8}} = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = q^*$. لاحظ أن تكلفة شراء وحدة بضاعة (علبة) غير معطاة في نص المثال ولذلك نحسب التكلفة المتغيرة (ف.و.ز) $VCU(q^*)$ بدلاً من التكلفة الإجمالية (ف.و.ز) $TCU(q^*)$.

ريال في السنة $480 = \sqrt{2(20)(1200)(4.8)} = \sqrt{2KDh} = VCU(q^*)$.

٢) العدد الأمثل للطلبيات سنوياً:

طلبية في السنة $N^* = \frac{D}{q^*} = \frac{1200}{100} = 12$

والطول الأمثل للدورة:

شهر ١ = سنة $T^* = \frac{1}{N^*} = \frac{1}{12}$

ملاحظة (٢, ٢):

عند حساب تكلفة التخزين (ف.و.ز) استخدمنا فرضية أن «معدل الاستهلاك (D) ثابت» وذلك لاستنتاج أن متوسط مستوى المخزون $\bar{I}$ في الدورة والذي وجدنا أنه يساوي نصف الكمية المطلوبة: $\bar{I} = \frac{q}{2}$.

فلو كان معدل الاستهلاك (D) غير ثابت أي يتغير مع الزمن أو متغيراً عشوائياً عندئذٍ نستخدم الطريقة التالية لحساب $\bar{I}$:

$$\bar{I} = \frac{\text{كمية البضاعة المخزنة في الدورة}}{\text{طول الدورة}} \qquad (٨, ٢)$$

فلو رمزنا بـ $I(t)$ لمستوى المخزون عند اللحظة t فإن البسط في العلاقة (٢ ,٨) يساوي مساحة المنطقة المغلقة والمحدودة بالخط البياني للدالة $I(t)$ في الدورة. (انظر الشكل

(٢, ٣). فمثلاً كمية البضاعة المخزنة في الدورة الأولى تساوي: $\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}\frac{q^2}{D}$ وبما أن طول الدورة في هذه الحالة يساوي $\frac{q}{D}$ فإنَّ $\bar{I}$ في الدورة الأولى يعطى بـ:

$$\bar{I}=\frac{\frac{1}{2}\frac{q^2}{D}}{\frac{q}{D}}=\frac{q}{2}$$

وهذا يتوافق مع ما وصلنا إليه في بداية الفقرة (حالة D ثابت).

ويمكن حساب مساحة المنطقة AOB في الشكل (٢, ٣) بطريقة أخرى كما يلي:

بما أن مستوى المخزون I (t) في الدورة الأولى تعطى بـ: $I(t) = q-Dt$ فإن مساحة AOB هي حاصل تكامل الدالة I على الدورة الأولى أي على الفترة $\left[0,\frac{q}{D}\right]$ وتساوي:

$$\int_0^{\frac{q}{D}} I(t)dt=\int_0^{\frac{q}{D}}(q-Dt)dt=qt-\frac{Dt^2}{2}\Big|_0^{\frac{q}{D}}=\frac{q^2}{D}-\frac{q^2}{2D}=\frac{q^2}{2D}$$

وهذه النتيجة توافق النتيجة التي توصلنا إليها باستخدام قانون مساحة المثلث. لاحظ أن الطريقة الثانية صالحة لحساب مساحة أي منطقة سواءً كانت مثلثاً أو أي شكل آخر.

مما سبق ذكره يمكننا تبسيط قانون حساب تكلفة التخزين (ف.و.ز) كما يلي:

تكلفة التخزين (ف.و.ز) ((HCU(q)) = (تكلفة التخزين في الدورة) × (عدد الدورات (ف.و.ز)).

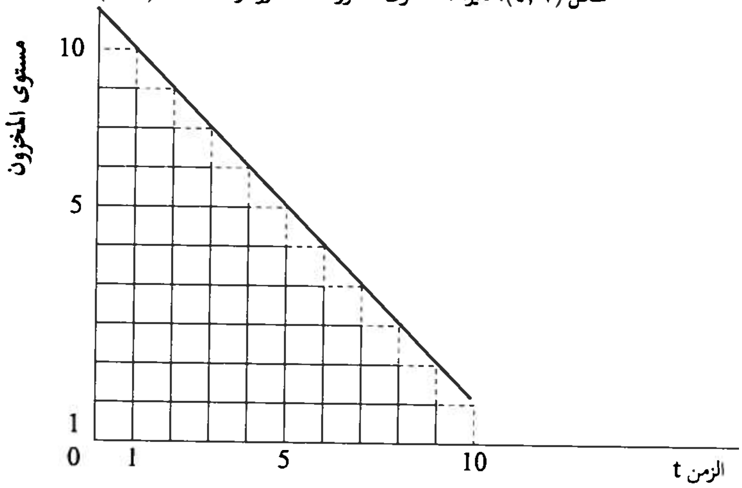
$$(N)\times(T\times\bar{I}\times h)=\ \bar{I}\times h=$$

والمساواة الأخيرة ناتجة من كون $N=\frac{1}{T}$ وللتوضيح نسوق المثالين التاليين.

مثال (٢, ٤):

لنفرض أنه في نظام المخزون لدينا: q = ١٠ وحدة و D = ١ وحدة في اليوم. عندئذ يمكن اعتبار أن الشكل (٢, ٤) يمثل تغيرات مستوى المخزون أثناء دورة واحدة.

شكل (٢, ٤): تغيرات مستوى المخزون أثناء دورة واحدة لمثال (٢, ٣).



ويمكن عندها حساب متوسط مستوى المخزون $\bar{I}$ بطريقة مباشرة كما يلي:

$$\bar{I} = \frac{\text{مجموع القياسات لمستوى المخزون}}{\text{عدد القياسات}} = \frac{١٠+٩+...+١+٠}{١١} = \frac{٥٥}{١١} = ٥ \text{وحدات}$$

ويساوي $\frac{q}{2}$.

مثال (٢, ٥):

نبين في هذا المثال كيفية حساب الكمية المخزنة في الدورة إذا كان معدل الاستهلاك (D) غير ثابت. لنفرض مثلاً أن مستوى المخزون يعطى بـ: $I(t) = \frac{1}{t+1}$ عندئذٍ تكون الكمية المخزنة بين اللحظة a واللحظة b تساوي:

$$\int_a^b I(t)dt = \int_a^b \frac{dt}{t+1} = \ln(t+1) \Big|_a^b = \ln(b+1) - \ln(a+1) = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

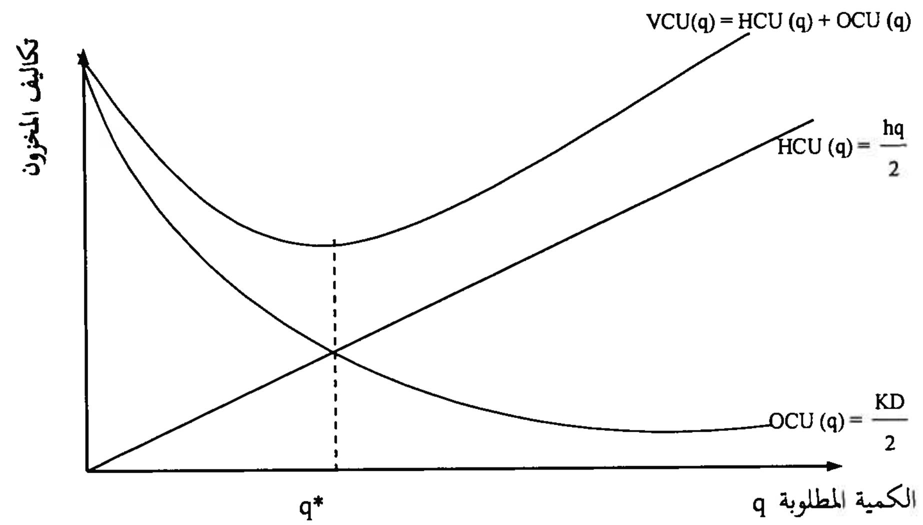
وبالتالي فمتوسط مستوى المخزون بين اللحظة a واللجظة b يساوي:

$$\bar{I} = \frac{\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)}{b-a}$$

(٢, ٣) حساسية واستقرار (EOQ)
(الابتعاد عن الكمية الاقتصادية للطلب (EOQ))

من نقاط القوة في نموذج EOQ أن تزايد التكلفة الإجمالية المتغيرة VCU(q) يكون صغيراً جداً عند النقاط q القريبة من الكمية الاقتصادية للطلب q^* وهو ما يعرف «باستقرار» دالة التكلفة الإجمالية المغيرة في جوار الـ EOQ. يوضح الشكل (٢, ٥) الخطوط البيانية للدوال VCU(q), OCU(q), HCU(q).

شكل (٢, ٥): تغيرات الدوال VCU(q), OCU(q), HCU(q)



وهذه الخطوط البيانية تؤكد العلاقات التي تطرقنا إليها سابقاً بين هذه الدوال وحجم الطلبية q: فتزايد حجم الطلبية q يوافق تناقص تكلفة الطلبية OCU(q) وتزايد تكلفة التخزين HCU(q)، والعكس صحيح أي أن تناقص حجم الطلبية q يوافق تزايد OCU(q) وتناقص HCU(q). بينما التكلفة الإجمالية المتغيرة VCU(q) تتناقص إلى أن تصل إلى أصغر قيمة لها وهي VCU (q^*) ثم تتزايد فهي إذن دالة محدبة.

لاحظ أيضاً أنه في جوار النقطة الصغرى q^* فالخط البياني للدالة $VCU(q)$ شبه مسطح. وهذا ما يسمح بوجود طلبيات q غير مثلى ولكنها قريبة من q^* دون التأثير الكبير على قيمة التكلفة الإجمالية المتغيرة. وهذه الملاحظة تؤكد أن الأخطاء الناجمة عن تقديرات غير دقيقة في قيم K,D,h لا تؤثر كثيراً على التكلفة الإجمالية المتغيرة. ولنوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٢, ٦):

بفرض أن في المثال (٢, ٣) يمكن طلب ٢٠% أكثر أو ٢٠% أقل من الكمية الاقتصادية للطلب والتي وجدناها $q^*=100$، فما هي الزيادة الناتجة عندئذٍ في قيمة التكلفة الإجمالية المتغيرة (ف.و.ز)؟

الحل:

لدينا: $VCU(q) = \frac{hq}{2} + \frac{kD}{q}$

فإذا كان $q=100+\frac{20}{100} \times 100 = 120$ علبة.

فإن $VCU(120) = \frac{(4.8)(120)}{2} + \frac{(20)(1200)}{120} = 488$ ريال سنوياً.

وإذا كان $q = 100 - \frac{20}{100} \times 100 = 80$ علبة.

فإنّ $VCU(80) = \frac{(4.8)(80)}{2} + \frac{(20)(1200)}{80} = 482$ ريال سنوياً

لاحظ أن دالة الـ $VCU(q)$ متغيرة في جوار $q^*=100$ ولكن هذا التغير طفيف حتى لو كان تغير q يصل إلى ٢٠% من قيمتها المثلى.

(٢, ٤) الطلبيات العددية
(Orders for Discrete Units)

كثيراً ما نحتاج إلى الحصول على أعداد صحيحة لقيم q^* فمثلاً طلبيات السيارات أو أجهزة الكمبيوتر ومثل ذلك الكثير لا يمكن أن تكون أعداد غير صحيحة. وفي مثل هذه الحالات

وإذا كان هناك تأثير كبير على التكلفة الإجمالية $TCU(q)$ عند التغير الطفيف على حجم الطلبية (q)، نضطر إلى أخذ أحد العددين الصحيحين الأقرب إلى q^* وهما $[q^*]$ و $[q^*]+1$، وذلك باستخدام الخوارزمية التالية: (يقصد بـ $[q^*]$ القيمة الصحيحة الأصغر أو المساوية لـ q^*).

خوارزمية (٢ ,١):

خطوة ١: حساب الكمية الاقتصادية للطلب q^*.

خطوة ٢: تحديد $[q^*]$ و $[q^*]+1$.

خطوة ٣: إذا كان $(q^*)^2 \geq [q^*]([q^*]+1)$ فإنّ العدد الصحيح الذي نختاره هو $[q^*]+1$.

إذا كان $(q^*)^2 < [q^*]([q^*]+1)$ فإننا نختار $[q^*]$.

البرهان:

نقوم بطلب $[q^*]$ بدلاً من $[q^*]+1$ إذا كانت المتباينة التالية محققة

$$VCU([q^*])<VCU([q^*]+1).$$

بالتعويض عن قيم $VCU([q^*])$ و $VCU([q^*]+1)$ نجد أن المتباينة الأخيرة تكافئ

$$\frac{h[q^*]}{2}+\frac{kD}{[q^*]}<\frac{h([q^*]+1)}{2}+\frac{kD}{[q^*]+1}$$

ثم بضرب طرفي المتباينة بـ $2.[q^*].([q^*]+1)$ نجد أن هذه الأخيرة، تكافئ

$$h.([q^*])^2.([q^*]+1) + 2kD([q^*]+1) < h[q^*].([q^*]+1)^2 + 2kD[q^*]$$

$$\Leftrightarrow h[q^*].([q^*]+1)([q^*]-[q^*]-1) < 2kD([q^*]-[q^*]-1)$$

$$\Leftrightarrow [q^*].([q^*]+1) > \frac{2kD}{h} = (q^*)^2$$

وبالتالي يتم طلب $[q^*]$ بدلاً من $[q^*]+1$ إذا كانت المتباينة الأخيرة محققة وهو المطلوب إثباته. بنفس الطريقة يمكننا البرهان على الجزء الباقي من الخوارزمية.

وللتوضيح نسوق المثال التالي:

مثال (٢ ,٧):

تقوم شركة البطريق لتركيب الثلاجات ببيع ٢٠ ثلاجة في الأسبوع. إذا علمنا أن تكلفة شراء ثلاجة واحدة تساوي ٢٥٠٠ ريال وتكلفة الطلبية والتخزين تساوي على الترتيب ٥٠ ريال و٦٦٠ ريال للثلاجة الواحدة في السنة، فما هي الكمية الاقتصادية للطلب (EOQ). احسب العدد الصحيح الأفضل لحجم الطلبية. بافتراض أن عدد أسابيع العمل في السنة لهذه الشركة هو ٥٠ أسبوع.

الحل:

نختار ١ سنة كوحدة للزمن في هذا المثال فيكون:

D = ٢٠ × ٥٠ = ١٠٠٠ ثلاجة في السنة

باستخدام القانون (٢ ,٥) لدينا.

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2(50)(20)(50)}{660}} = 12.31$$ ثلاجة

لاحظ أنه لا يمكن عملياً طلب طلبية حجمها ١٢,٣١ ثلاجة مما يلزم الشركة باختيار عدد صحيح لحجم الطلبية أي ١٢ أو ١٣ ثلاجة ولاختبار أحدهما نستخدم الخوارزمية (٢ ,١) كما يلي:

بما أن $[q^*].([q^*]+1)= 12\times13=156$ وهو أكبر من $(q^*)^2= (12.13)^2=151.54$ فإن الحجم الأفضل للطلبية هو $[q^*]=12$ ويمكننا التحقق من ذلك بحساب قيمة التكلفة الإجمالية المتغيرة VCU عند كل من $[q^*]=12$ و $[q^*]+1=13$ فنجد

$VCU(12)= 8125.77$ ريال سنوياً

$VCU(13)= 8136,15$ ريال سنوياً

(٢ ,٥) حالة الوقت المتقدم لا يساوي الصفر

(Nonzero Lead Time)

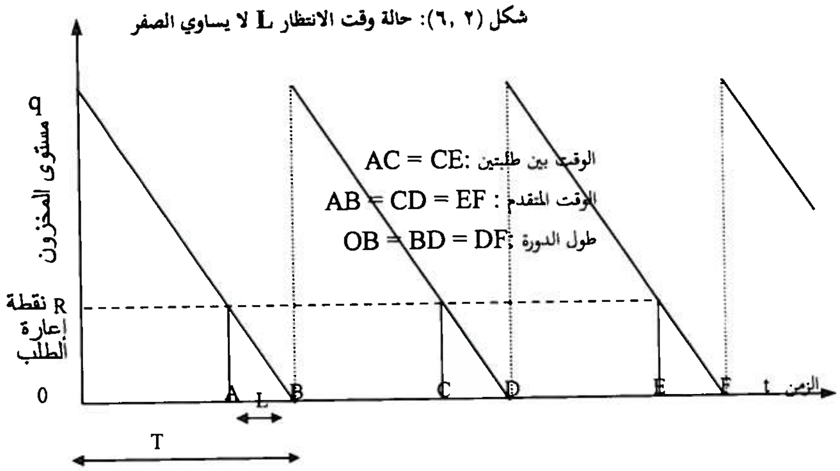
نفرض الآن أن الزمن بين لحظة طلب البضاعة ولحظة وصولها إلى المخازن لا يساوي الصفر أي أن فرضية الاستقدام اللحظي غير محققة.

لنرمز للوقت المتقدم بالرمز L عندئذٍ $L > 0$ وبالتدقيق في عبارة التكاليف المتغيرة نلاحظ أن كون $L > 0$ لا يغير البتة في تكاليف التخزين والطلبية وبالتالي قانون الـ EOQ يبقى صالحاً في هذه الحالة أيضاً. ولتفادي حالة العجز في نظام ما نقوم باستقدام الطلبية قبل نفاذ البضاعة من المخزون بوقت قدرة L (أنظر الشكل (٢, ٧)). حيث يكون مستوى المخزون مساوياً لنقطة إعادة الطلب والتي سنرمز لها بالرمز R. وتحسب هذه النقطة في نموذج الـ EOQ بالقانون التالي:

$$R = \begin{cases} LD, & L < T^* \\ (L - n^*.T^*)D, & L \geq T^* \end{cases}$$

حيث T^* هو الطول الأمثل للدورة وn^* هو الجزء الصحيح لـ $\frac{L}{T^*}$ أي $n^* = \left[\frac{L}{T^*}\right]$.

شكل (٢, ٦): حالة وقت الانتظار L لا يساوي الصفر



فإذا كان $L< T^*$ فإن البضاعة المستقدمة عند النقطة R تستخدم في الدورة التالية مباشرة للدورة الحالية. أما في حالة $L\geq T^*$ فإن البضاعة المستقدمة عند النقطة R تستخدم في الدورة رقم n^* بعد الدورة الحالية.

وللإيضاح نورد المثال التالي:

مثال (٢, ٨):

إذا فرضنا أن الوقت المتقدم L في المثال (٢, ٣) يساوي ١٥ يوم، فالمطلوب إيجاد:

أ – نقطة إعادة الطلب R.

ب – أجب على نفس السؤال إذا كان L يساوي ٦ أشهر.

ج – نفس السؤال إذا كان L يساوي شهر وربع الشهر.

الحل:

أ – لدينا:

L = ١٥ يوم =١/٢٤سنة = ٢/ ١ شهر وهو أصغر من T^* = ١٢/ ١ شهر وبالتالي

وبحسب قانون نقطة إعادة الطلب R نحصل على:

$$R=L.D=\left(\frac{1}{24}\right)1200=50 \text{ علبة}$$

أي أنه يستوجب على الشركة تقديم الطلبية عندما يكون عدد المتوفرة في المخزون يساوي ٥٠ علبة وأن هذه البضاعة تستخدم في الدورة التالية مباشرة للدورة الحالية.

ب – لدينا:

L = ٦ شهر = ١/٢ سنة وهو أكبر من T^* = ١٢/ ١ سنة وبالتالي العدد الصحيح n^* يساوي $\left[\frac{L}{T^*}\right]$ = ٦ ومنه حسب قانون نقطة إعادة الطلب R نجد

$$R= (L-n^*.T^*).D = \left(\frac{1}{2} - 6.\left(\frac{1}{12}\right)\right).\ 1200 = 0$$

أي أن يتوجب على الشركة تقديم الطلبية عند نفاذ المخزون من البضاعة وأن هذه البضاعة تستخدم في الدورة رقم ٦ بعد الدورة الحالية.

ج – لدينا:

L = ٥/٤ شهر = ٥/٤٨ سنة وهو أكبر من T^* = ١٢/١ سنة وبالتالي:

$$n^* = \left[\frac{L}{T^*}\right] = \left[\frac{\frac{5}{48}}{\frac{1}{12}}\right] = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$$

ومنه:

$$R=(L-n^* T^*).D = \left(\frac{5}{48} - 1\left(\frac{1}{12}\right)\right).1200 = 25 \text{ علبة}$$

أي أنَّ الشركة تقوم بتقديم الطلبية عندما يكون عدد وحدات البضاعة في المخزون مساوياً لـ ٢٥ علبة وتستخدم هذه البضاعة في الدورة التي تلي الدورة الحالية مباشرة.

تمارين

١- تستعمل روضة أطفال ٥٠٠ مصباح في السنة علماً أن كل طلبية للمصابيح تكلف ٥ ريال وأن تكلفة كل مصباح ٠,٤٠ ريال، وتكلفة تخزين المصباح الواحد ٠,٠٨ ريال في السنة بافتراض أن معدّل الاستهلاك ثابتاً احسب ما يلي:

آ - الكمية الاقتصادية للطلب.

ب - التكلفة الإجمالية للمخزون في السّنة.

ج - العدد الأمثل للطلبيات في السنة.

د - الزّمن الأمثل بين كل طلبيتين.

هـ - التكلفة الإجمالية للمخزون في السنة إذا كان طول الدورة يساوي:

* ١ شهر. * نصف شهر. *٩ أشهر. *١١ شهر.

٢- تقوم شركة بشراء ٦٠٠٠ وحدة بضاعة كل سنة بتكلفة قدرها ٣٠ ريال للوحدة مع العلم أن تكلفة التخزين وتكلفة الطلبية تساوي ٦ ريال للوحدة في السنة ١٢٥ ريال على الترتيب. ما هي الخطة المثلى لطلب البضاعة (أي أوجد $TCU(q^*), VCU(q^*), T^*, q^*$).

٣- تقوم شركة توريد الحديد والصّلب بشراء كمية من الحديد بتكلفة قدرها ٨ ريال للكيلو غرام الواحد وتقوم ببيع ٨ طن في الأسبوع. إذا علمنا أن كل طلبية تقدر تكاليفها بـ ٣٥ ريال كتكاليف إدارة و٥٥ ريال كتكاليف توصيل للشركة بينما تقدر تكاليف التخزين بـ ٢٥% من تكلفة الوحدة في السّنة كما أنّ الشركة تفتح أبوابها للزبائن ٥٠ أسبوعاً في السنة (باقي الأيام تعتبر إجازة) فما هي الخطة المثلى للطلّب والتكلفة المقابلة لها.

إذا افترضنا أن سعر بيع الكيلو غرام من الحديد يساوي S ريال ($S>8$) وإذا افترضنا أن الشركة تريد جعل ربحها أكبر ما يمكن بدلاً من جعل التكاليف أصغر ما يمكن فالمطلوب:

أ - اكتب الصّيغة العامة للرّبح الإجمالي ف.و.ز

ب - أوجد النقطة الكبرى لدالة الربح ولتكن $\bar{q}$.

ج – قارن بين $\bar{q}$ والكمية الاقتصادية للطلب q^*.

د – ما هو الربح الإجمالي إذا كان سعر بيع ١ كيلو غرام من الحديد هو ١٢ ريال.

٤ – قدّر موزّع لعجلات السيارات أنّ كمية استهلاك نوع معين من العجلات تكون ثابتة وبمعدل ٥٠٠ عجلة في الأسبوع. إذا علمان أنّ تكلفة شراء العجلة الواحدة تساوي ٥٠ ريال وأن تكلفة التخزين للعجلة الواحدة في السنة تساوي ٢٠% من تكلفة الشراء وأن تكلفة الطلبية قدّرت بـ ٥٠ ريال. (أفرض أن ١ سنة = ٥٢ أسبوعاً).

(١) أحسب التكلفة السنوية للتخزين $HCU(q)$ والتكلفة السنوية للطلبية $OCU(q)$ ثم التكلفة السنوية الإجمالية المتغيرة $VCU(q)$ الموافقة لحجم طلبية q كما يلي:

q = ٢٠٠ و ٣٠٠ و ٤٠٠ و ٥٠٠ و ٦٠٠ و ٧٠٠ و ٨٠٠ عجلة

(٢) أرسم التكاليف التي حصلت عليها في السؤال الأول في نفس الشكل وأوجد بيانياً الحجم الأمثل للطلبية q^*.

(٣) أحسب التكاليف التالية $HCU(q^*)$, $HCU(q^*+1)$, $OCU(q^*)$ ثم $OCU(q^*+1)$ ثم الفرق في قيم HCU وOCU الناتجة عن رفع حجم الطلبية بوحدة بضاعة عن الحجم الأمثل للطلبية، ما هو التغيير الناتج من هذه الزيادة في قيمة VCU؟

(٤) أحسب الفرق في قيم HCU وOCU الناتجة عن خفض حجم الطلبية بوحدة بضاعة عن الحجم الأمثل للطلبية وماذا ينتج عند هذا الخفض في قيمة VCU؟

(٥) ماذا تستخلص من النتائج التي حصلت عليها في السؤالين السابقين؟

٥ – (الغرض من هذا التمرين دراسة استقرار وحساسية الـ EOQ ونستخدم لذلك نظام المخزون لموزع العجلات المذكور في التمرين ٤ السابق).

ذُكر أنّ الموزع قد قدّر تكلفة التخزين بـ ٢٠% من تكلفة شراء العجلة الواحدة وأن تكلفة الطلبية قدّرها بـ ٥٠ ريال. ومن الواضح أن مثل هذه التقديرات لا يمكن أن تكون دقيقة مائة

بالمائة. لمعرفة مدى تأثير عدم الدقة في هذه التغيرات على الحجم الأمثل للطلبية q^*، نقوم بما يلي:

(١) حساب الحجم الأمثل للطلبية q^* الموافق لكل قيم تكاليف التخزين وقيم الطلبية q الموضحة بالجدول (٢, ٢).

جدول (٢, ٢) البيانات الخاصة بالتمرين (٥)

تكلفة التخزين (%)	تكلفة الطلبية	الكمية الاقتصادية للطلب	التكلفة الإجمالية للمخزون	
			$q = p^*$	$q = 5.0$
١٦	٤٠			
١٦	٤٥			
١٦	٥٠			
١٦	٥٥			
١٦	٦٠			
١٨	٤٠			
١٨	٤٥			
١٨	٥٠			
١٨	٥٥			
١٨	٦٠			
٢٠	٤٠			
٢٠	٤٥			
٢٠	٥٠			
٢٠	٥٥			
٢٠	٦٠			
٢٢	٤٠			
٢٢	٤٥			
٢٢	٥٠			
٢٢	٥٥			
٢٢	٦٠			
٢٤	٤٠			
٢٤	٤٥			
٢٤	٥٠			
٢٤	٥٥			
٢٤	٦٠			

(٢) حساب التكلفة الإجمالية السنوية المتغيرة المثلى $VCU\ (q^*)$ الموافقة لكل قيمة لـ q^* في السؤال السابق ثم حساب $VCU(q)$ عندما $q = ٥١٠$ والموافقة لكل قيم تكاليف التخزين وقيم الطلبية q المعطاة بالجدول (٢ ,٢).

(٣) ما هي ملاحظاتك واستنتاجاتك على تغيرات q^* وماذا تستخلص من ذلك فيما يخص استقرار وحساسية الـ EOQ.

٦ - أوجد الخطة المثلى لنظام مخزون موزّع العجلات المعطى بالتمرين ٤.

٧ - يستهلك مستوصف ٥٠٠ وحدة من نوع معين من الأدوية في السنة الواحدة. تقدر تكلفة طلبية واحدة بـ ٢٠ ريال وتكلفة التخزين للوحدة بـ ٢ ريال في السنة وتكلفة شراء الوحدة بـ ١٠٠ ريال.

(١) احسب كلاً من الكمية الاقتصادية للطلب والتكلفة الإجمالية السنوية المثلى والطول الأمثل للدورة.

(٢) إذا فرضنا أن هذا النوع من الأدوية تنتهي صلاحيته بعد ١ شهر من تخزينه فما هو طول الدورة T في هذه الحالة وما هو حجم الطلبية والتكلفة الإجمالية $TCU(q)$ الموافقة لذلك؟

٨ - ما هو التغيير الناتج عن التكلفة الإجمالية المتغيرة VCU عند تقديم طلبية تساوي ضعف الكمية الاقتصادية للطلب؟

٩ - بيّن أنّ تكلفة التخزين وتكلفة الطلبية في وحدة الزّمن تتساويان عند الكمية الاقتصادية للطلب أي أن $OCU(q^*) = HCU(q^*)$. ثم استنتج أنّ التكلفة الإجمالية المتغيرة المثلى يمكن حسابها بإحدى العلاقتين:

$$VCU(q^*) = hq^* \quad \text{أو} \quad VCU(q^*) = \frac{2KD}{q^*}\ .$$

١٠ - التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن لنموذج الـ EOQ يمكن كتابتها كدالة في المتغير T كما يلي:

$$TCU(T) = \frac{hDT}{2} + \frac{K}{T} + pD$$

وذلك من العلاقة $T = \frac{q}{D}$.

أوجد الطول الأمثل للدورة باستخدام العلاقة السابقة ثم استنتج الكمية الاقتصادية للطلب q^*.

١١ - يمكن كتابة التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن كدالة في المتغير N حيث N هو عدد صحيح ويمثل عدد الطلبيات في وحدة الزمن، كما يلي:

$$(N = \frac{D}{q})$$

$$TCU(N) = \frac{hD}{2N} + KN + PD$$

بما أن العدد الأمثل للطلبيات N^* هو أول عدد صحيح يحقق المتباينات التالية:

$$TCU(N^*) \leq TCU(N^*-1)$$

$$TCU(N^*) \leq TCU(N^*+1)$$

(١) بين أن المتباينتين السابقتين مكافئة لمايلي:

$$N^* (N^*-1) \leq \frac{hD}{K} \leq N^* (N^*+1)$$

(٢) إذا كان:

D = ١٢٠٠ وحدة، و K = ٢٠ ريال، و h = ٤٫٨ ريال في السنة.

أوجد باستخدام السؤال السابق ما يلي:

العدد الأمثل للطلبيات N^*، الكمية الاقتصادية للطلب q^*.

التكلفة الإجمالية المثلى والطول الأمثل للدورة.

١٢ - إذا علمنا أن كمية الاستهلاك لكتاب «حساب التكامل والتفاضل» تكون ثابتة وتساوي ١٠٠٠ وحدة في السنة وأنّ تكلفة الوحدة تساوي ٥٠ ريال وأنّ تكلفة الطلبية ١٠٠ ريال وأن تكلفة التخزين تساوي ٢٥% من تكلفة الكتاب فأوجد الخطة المثلى لهذا النظام (لاحظ أنّ حجم الطلبية يكون عدد صحيحاً).

١٣ - إذا علمنا أن كمية الاستهلاك لمنتوج معيّن ثابتة وتساوي ١٢٠٠ وحدة في السنة وأنّ تكلفة الطلبية تساوي ١٦ ريال وأن تكلفة التخزين تساوي ٠,٢٤ ريال للوحدة في السنة. أوجد الخطة المثلى للنظام إذا كان وقت الانتظار يساوي.

(١) الصفر. (٢) ٣ أشهر. (٣) ٩ أشهر. (٤) ١٨ أشهر.

١٤ - يقوم محل للأدوات الكهربائية المنزلية ببيع ١٠٠ تلفاز شهرياً. إذا علمنا أنّ تكلفة التخزين تساوي ٢٠ ريال للجهاز في الشهر وأنّ تكلفة الطلبية ١٠٠ ريال وتكلفة الجهاز ١٠٠٠ ريال فأوجد مايلي:

آ - الخطة المثلى لنظام مخزون هذا المحل.

ب - نقطة إعادة الطلب R إذا كان الوقت المتقدم L يساوي ١٥ يوم.

ج - إذا فرضنا أن هناك زيادة في قيم الـ h, K و D بالمقادير التالية على التوالي: $\Delta D = 5, \ \Delta h = 5 , \ \Delta K = 10$. أوجد الزيادة الناتجة عند ذلك في قيمة التكلفة الإجمالية المثلى.

(٢, ٦) نموذج الكمية الاقتصادية للطلب مع الانكسارات السّعرية
(EOQ with Quantity Discounts)

يقوم نموذج الكمية الاقتصادية للطلب على عدة فرضيات أحدها أن سعر شراء الوحدة لا يتعلق بحجم الكمية المشتراة وهذه الفرضية قد لا تكون واقعية في بعض الأحيان.

فعادة ما تكون هناك تخفيضات في الأسعار عند شراء كميات كبيرة من السّلع وهو ما يطلق عليه الانكسار السعري والذي سنعالجه في هذا النموذج. قبل البدء ببناء هذا النموذج نستعرض في الجدول التالي بعض إيجابيات وسلبيات شراء كميات كبيرة من البضاعة.

الإيجابيات	السّلبيات
الشراء بأسعار مخفّضة.	ارتفاع تكاليف التخزين.
انخفاض تكاليف الطلبية.	تجميد رؤوس أموال على شكل سلع في المخازن.
تفادي حالة العجز.	ارتفاع حجم البضاعة القابلة للتّلف.

ومع ذلك فإن الهدف الرئيس هو جعل التكاليف الإجمالية للمخزون أقل ما يمكن والذي يتحدد بموجبه القبول أو عدم القبول بعروض الأسعار المخفضة.

بناء النموذج: ليكن q حجم الطلبية يمكننا تلخيص نموذج الكمية الاقتصادية للطلب مع الانكسارات السعرية فيما يلي:

إذا كان $q < b_1$ فإن تكلفة شراء الوحدة تساوي p_1.

إذا كان $b_1 \le q < b_2$ فإن تكلفة شراء الوحدة تساوي p_2.

$\vdots$

$\vdots$

إذا كان $b_{k-2} \le q < b_{k-1}$ فإن تكلفة شراء الوحدة تساوي p_{k-1}.

إذا كان $b_{k-1} \le q < b_k = \infty$ فإن تكلفة شراء الوحدة تساوي p_k.

تسمى الكميات $b_{k-1} \ldots, , b_1, b_2$ نقاط انكسار الأسعار (price break points) بما أن السعر لا يتغير عند الكمية p_k فإن هذه الكمية لا تسمّى نقطة انكسار للسّعر وبما أنه من الطبيعي أنه كلما زاد حجم الطلبية نقص السعر فإن $p_k < p_{k-1} \ldots\ldots < p_2 < p_1$.

فيما يلي بعض الرموز التي سوف نحتاج إليها في إيجاد الكمية الاقتصادية للطلب q^* مع وجود الانكسارات السعرية:

١ – $TCU_i(q)$ التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن للكمية q من البضاعة عندما سعر الوحدة يساوي p_i.

٢ - $(EOQ)_i$ النقطة الصغرى للدالة TCU_i ونقول أنها نقطة مقبولة (Admissible) إذا تحقق $b_{i-1} \le (EOQ)_i < b_i$.

٣ - TCU (q) تسمى التكلفة الفعلية (Actual) وتعرف كما يلي:

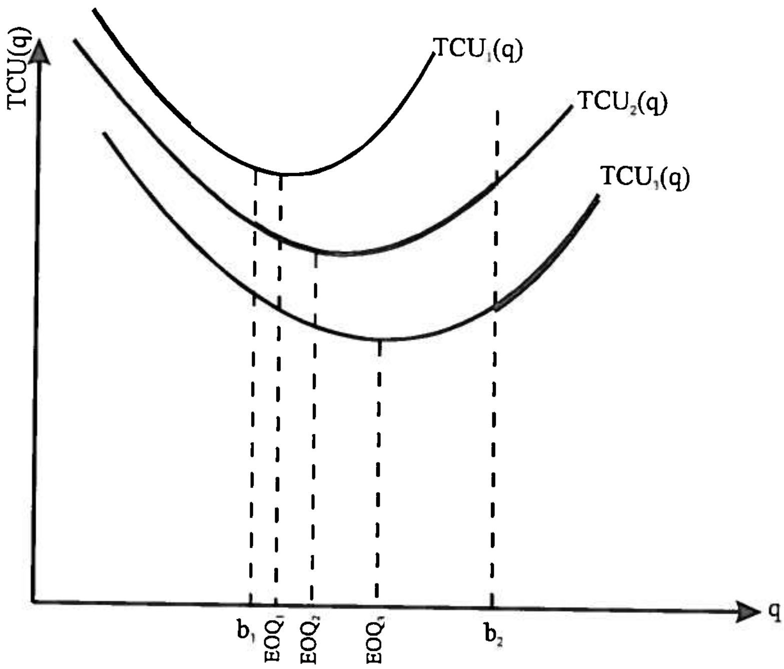
$$TCU(q) = TCU_i(q),\ b_{i-1} \le q < b_i$$

للبحث عن الكمية الاقتصادية للطلب مع الانكسارات السعرية نقوم بإيجاد النقطة الصغرى q^* للدالة TCU(q).

في الحالة العامة هذه النقطة الصغرى q^* هي إما نقطة إنكسار b_i أو نقطة صغرى لـ $TCU_i(q)$ (انظر الشكل (٢ ,٧)).

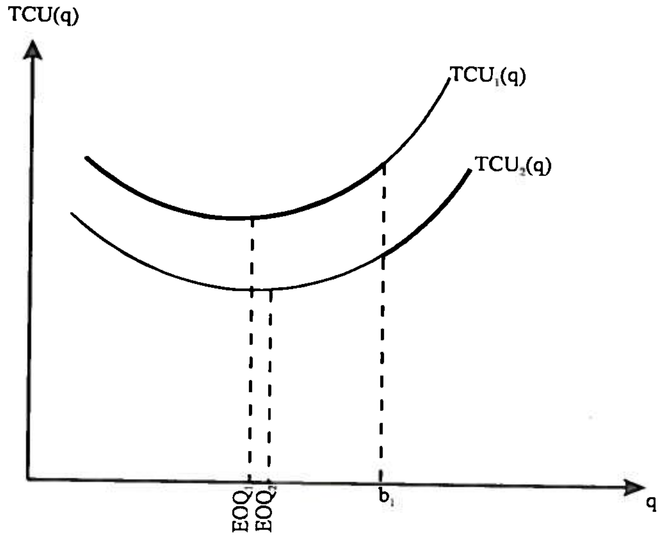
شكل (٢ ,٧) رسم توضيحي لمفهوم TCU_i و TCU لهذا النموذج.

(a)



EOQ_1, EOQ_3: غير مقبولة EOQ_2 مقبولة ; EOQ_2 minimizes TC

(b)



EOQ_1: مقبولة. EOQ_2: غير مقبولة b_1 minimizes TCU.

يتضح مما سبق النتائج التالية:

نتيجة (٢, ١):

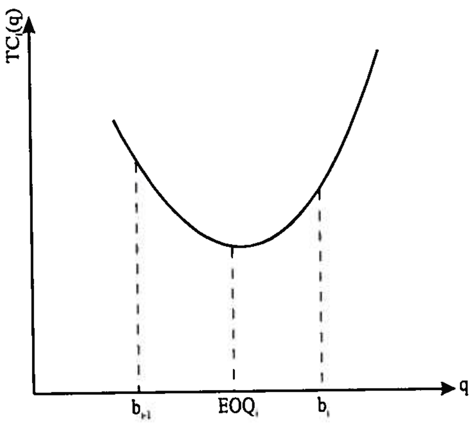
لكل حجم طلبية q لدينا المتباينات التالية:

$$TCU_k(q) < TCU_{k-1}(q) < \ldots < TCU_2 < TCU_1(q)$$

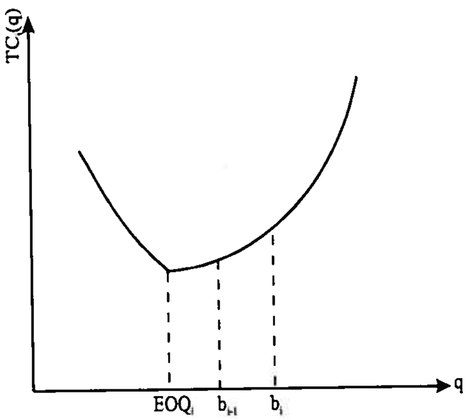
نتيجة (٢, ٢):

- إذا كانت النقطة $(EOQ)_i$ مقبولة فإنّ القيمة الصغرى لـ $TCU(q)$ على الفترة $[b_{i-1}, b_i)$ تكون عند $q = (EOQ)_i$ (انظر الشكل (٢, ١٠)).
- إذا كانت النقطة $(EOQ)_i < b_{i-1}$ فإنّ القيمة الصغرى لـ $TCU(q)$ على الفترة $[b_{i-1}- b_i)$ تكون عند $q = b_{i-1}$ (انظر الشكل (٢, ١٠)).

شكل (٢, ٨) النقطة الصغرى لـ $TCU(q)$ على الفترة $[b_{i-1}, b_i)$.



(a) EOQ_i minimizes $TC_i(q)$



(b) b_{i-1} minimizes $TC_i(q)$

نتيجة (٢ ,٣):

إذا كانت $(EOQ)_i$ نقطة مقبولة فإنه لا يمكن للدالة TCU (q) أن تأخذ قيمتها الصغرى عند حجم طلبية q ذو سعر أكبر من p_i وبالتالي فإن الدالة TCU (q) تأخذ قيمتها الصغرى في هذه الحالة عند حجم طلبية q ذو سعر يساوي p_i, p_{i+1}، أو p_k .

باستخدام هذه النتائج يمكننا وضع الخوارزمية التالية لتحديد الكمية الاقتصادية للطب في هذا النموذج:

خوارزمية (٢ ,٢):

١ – نبدأ بأقل سعر ثم نقوم بتحديد النقطة الصغرى للتكلفة الإجمالية في وحدة الزمن الموافقة لكل سعر p_i على الفترة $[b_{i-1}, b_i)$ ونسمّي هذه الكمية q_i^* .

٢ – نواصل تحدد q_k^*, q_{k-1}^* إلى غاية الحصول على نقطة مقبولة نرمز لها بـ q_{i0}^* (من النتيجة (٢ ,٢) لدينا: $q_{i0}^* = (EOQ)_{i0}$).

٣ – الكمية الاقتصادية للطلب q^* هي أحد عناصر المجموعة.

$$\{q_k^*, q_{k-1}^*, \ldots\ldots, q_{i0}^*\}$$

الذي يوافق أصغر قيمة للدالة TCU (q)

وسنوضح كيفية إيجاد q^* من خلال المثال التالي:

مثال (٢ ,٩): تقوم مؤسسة تعليمية بشراء علب طباشير تحوي كل علبة ١٠ طباشير إذا علمنا أنّ ثمن العلبة الواحدة يرتبط بعدد العلب المشتراة مثلما هو موضح بالجدول التالي:

عدد العلب المشتراة	ثمن العلبة الواحدة
$0 \le q < 100$	٥ ريال
$100 \le q < 500$	٤,٩ ريال
$q \ge 500$	٤,٨٥ ريال

وأن المؤسسة تستهلك ١٠,٠٠٠ طبشور في السنة وأن تكاليف الطلبية والتخزين تساوي ١٠٠ ريال و٢٠% من سعر العلبة الواحدة في السنة على التوالي.

١ - ما هو العدد الأمثل للعلب التي يجب طلبها عند تقديم كل طلبية؟

٢ - ما هو العدد الأمثل للطلبيات في السنة؟

٣ - ما هي التكلفة الإجمالية السنوية المثلى للمؤسسة؟

الحل:

لدينا من معطيات المثال:

$D = 1000, K = 100\ p_3 = 4.85, p_2 = 4.9, p_1 = 5, b_2 = 500, b_1 = 100$.

١ - نبدأ أولاً بحساب النقطة الصّغرى للتكلفة الإجمالية في وحدة الزمن TCU_3 الموافقة للسعر $p_3 = 4.85$ على الفترة $q \geq 500$ فنجد:

$$EOQ_3 = \sqrt{\frac{2 \times K \times D}{h_3}} = \sqrt{\frac{2KD}{0.2P_3}} = \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 1000}{(0.2)(4.85)}} \cong 454 \text{ علبة}$$

وبما أن $EOQ_3 < 500$ أي أنها ليست مقبولة فإنّ النقطة الصغرى للدالة TCU على الفترة $q \geq 500$ هي $q_3^* = 500$.

نواصل بعد ذلك تحديد النقطة الصغرى للتكلفة الإجمالية (ف.و.ز) الموافقة للسعر الموافق لـ $p_2 = 4.9$ على الفترة $100 \leq q < 500$ فنجد:

$$EOQ_2 = \left(\frac{2 \times 100 \times 1000}{(0.2)(4.9)}\right)^{\frac{1}{2}} \cong 452 \text{ علبة}$$

بما أن $100 \leq EOQ_2 < 500$ فإنّ EOQ_2 هي نقطة مقبولة وفي هذه الحالة: $q_2^* = EOQ_2 = 452$.

بما أن q_2^* هي نقطة مقبولة فإنه حسب الخوارزمية (٢, ٢) لا يمكن للدالة TCU (q) أن تأخذ أصغر قيمة لها على الفترة $0 \leq q \leq 100$ وبالتالي لا داعي للبحث عن EOQ_1 و q_1^*. وهكذا إما q_2^* أو q_3^* هي النقطة الصغرى للدالة TCU ولتحديد أيهما النقطة المطلوبة نحسب قيمة TCU عند كل منهما فنجد $TCU(500) \approx 5292$ و $TCU(452) \approx 5343$.

ومنه $q_3^* = 500$ هي النقطة الصغرى لـ TCU.

نستخلص مما سبق أن العدد الأمثل للعلب التي يجب على المؤسسة طلبها عند تقديم طلبية هو ٥٠٠ علبة.

٢ – العدد الأمثل للطلبيات في السنة يساوي:

$$N^* = \frac{D}{q^*} = \frac{1000}{500} = 2$$ طلب سنوياً

أي أن المؤسسة تقوم بتقديم طلبيتين ذات حجم ٥٠٠ علبة في كل سنة.

٣ – مثلما رأينا آنفاً فإن التكلفة الإجمالية السنوية المثلى للمؤسسة:

$$TCU(q^*) = 5292$$ ريال سنوياً

تمارين

١ – تحتاج مؤسسة ٨٠٠٠ وحدة في السنة من منتوج معين في حين يقترح الممول التخفيضات التالية:

(•) سعر الواحدة ١٠ ريال إذا كان حجم الطلبية أقل من ٤٩٩ وحدة.

(•) سعر الواحدة ٩ ريال إذا كان حجم الطلبية بين ٥٠٠ و ٩٩٩ وحدة.

(•) سعر الواحدة ٨ ريال إذا كان حجم الطلبية أكثر من ألف وحدة.

إذا علمنا أن تكلفة الطلبية تساوي ٣٠ ريال وأن تكلفة التخزين في السنة تساوي ٣٠% من سعر الوحدة.

أوجد الحجم الأمثل للطلبية والتكلفة المقابلة لها.

٢ – الاستهلاك السنوي لمؤسسة ما من منتج معين تساوي ٢٠٠٠ وحدة وتكلفة كل طلبية تساوي ٢٠ ريال بينما تساوي تكلفة التخزين السنوية ٤٠% من تكلفة شراء الوحدة. ترتبط تكلفة الوحدة بعدد الوحدات المطلوبة كما يلي:

(•) ١ ريال للوحدة إذا كان عدد الوحدات المطلوبة أقل من ٩٩ وحدة.

(•) ٠,٨٠ ريال للوحدة إذا كان عدد الوحدات المطلوبة بين ١٠٠ وحدة و٣٩٩ وحدة.

(•) ٠,٦٠ ريال للوحدة إذا كان عدد الوحدات المطلوبة أكثر من ٤٠٠ وحدة.

حدّد الخطة المثلى لهذا النظام وتكلفتها.

٣ – تطلب مؤسسة ما بضاعة من منتج معين بمعدّل ثابت يساوي ٤٠٠ وحدة في الشهر وتقدر تكلفة الطلبية بـ ١٢٤٠ ريال وتكلفة التخزين السنوية تساوي ٣٠% من سعر الوحدة.

يقترح مموّل هذه البضاعة الأسعار الموضحة في الجدول التالي:

جدول (٢ ,٣) تخفيضات عل المشتريات للتمرين رقم ٠٣.

الكمية المطلوبة	$0 \le q < 1500$	$1500 \le q < 2000$	$2000 \le q < 2500$	$q \ge 2500$
تكلفة الوحدة	12.60	12.20	11.80	11.20

بينما يقترح مموّل ثان لنفس المنتوج سعر ١٢ ريال للوحدة مع تخفيضات تصل إلى ١١,٤٠ ريال إذا كانت الكمية المطلوبة أكثر من ١٥٠٠ وحدة.

من أي المموّلين يستحسن للمؤسسة طلب هذه البضاعة؟

(٢, ٧) نموذج الكمية الاقتصادية للإنتاج

(Economic Production Quantity (EPQ) Model)

في كثير من الأحيان بعض الأنظمة المنتجة تستهلك من نفس البضاعة التي تنتجها، فمن الطبيعي عندئذ أن لا تقوم هذه الأنظمة باستيراد بضاعة تنتجها من مموّل خارجي أي أنها تستهلك ممّا تنتج، كما أن إنتاجها قد يستخدم لتمويل أنظمة أخرى.

وفي مثل هذه الحالات فإن النموذج السابق (EOQ) لا يصلح لتحديد الكمية الاقتصادية المثلى. بل لابد من تحديد ما يسمى الكمية الاقتصادية للإنتاج Economic Production Quantity اختصاراً (EPQ).

الفرضيات المطلوبة لبناء نموذج (EPQ):

١ – معدّل الاستهلاك D ثابت ومعلوم.

٢ - يتم إنتاج وتخزين صنف واحد من البضاعة.

٣ - لتفادي حالة العجز للنظام نفرض أن مرحلة الإنتاج تبدأ عندما يكون مستوى المخزون يساوي الصفر ويتم ذلك بمعدّل ثابت في وحدة الزمن نرمز له بـ r ونشترط أن يكون أكبر من معدّل الاستهلاك D (أي $r > D$) وإلا فلا معنى لنظام المخزون. نرمز بـ q للوحدات المنتجة في كل فترة إنتاج.

٤ - كل التكاليف التالية تكون ثابتة ومستقلة عن حجم الكميات المنتجة:

h: تكلفة التخزين لكل وحدة بضاعة في وحدة الزمن.

K: تكلفة التحضير للإنتاج.

P: تكلفة الإنتاج لوحدة بضاعة.

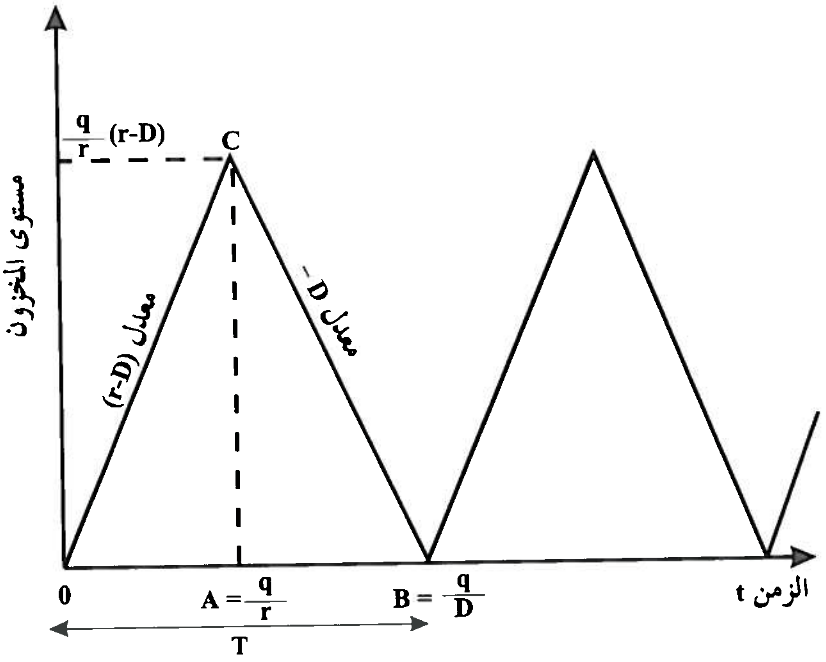
لاحظ أن الفرضيتين ١ و ٢ هما نفس الفرضيات ١ و ٢ في نموذج الـ (EOQ) الفرضية ٣ في هذا النموذج والفرضية ٣ في نموذج الـ (EOQ) تستخدمان لتفادي حالة العجز للمؤسسة. بينما في الفرضية ٤ تكلفة التحضير K تلعب نفس دور تكلفة الطلبية في النموذج السابق.

والتفسير التطبيقي لـ K في هذا النموذج أن أي آلة إنتاج بحاجة إلى تحضير وتجهيز قبل البدء في الإنتاج ويتطلب ذلك تكاليف معينة والتي نسميها هنا بتكاليف تحضير الإنتاج.

بناء النموذج (EPQ):

نفرض أن فترة الإنتاج تبدأ عند الزمن $t = 0$. يبيّن الشكل (٢ ,٩) تغيرات مستوى المخزون مع الزمن، وهو كما يلي:

شكل (٢ ,٩): تغيرات مستوى المخزون في نموذج الـ (EPQ)



عند بداية كل فترة إنتاج تبدأ المؤسسة عملية الإنتاج بمعدل r وحدة في وحدة الزمن وتستهلك بمعدل D في وحدة الزمن وبالتالي يتزايد مستوى المخزون بمعدل r-D. حين يواصل النظام إنتاجه إلى أن تصل الكمية المنتجة إلى q وحدة والتي توافق الزمن $\frac{q}{r}$.

وابتداءً من هذه اللحظة يتناقص مستوى المخزون بمعدل D وحدة في وحدة الزمن إلى أن ينفذ المخزون ويتوافق ذلك مع اللحظة $\frac{q}{D}$. حيث تنتهي دورة واحدة وتبدأ الدورة التالية بفترة إنتاج ثانية وهكذا دواليك. نشير إلى أن كل دورة تبدأ بفترة إنتاج وتنتهي بفترة يكون فيها الإنتاج متوقفاً.

نذكر أن الهدف من بناء النموذج هو البحث عن كمية الإنتاج المثلى q^* (Optimal Production Quantity) أي عدد الوحدات الواجب إنتاجها من طرف النظام والتي تصغّر التكلفة الإجمالية للمخزون في وحدة الزمن.

نسمّي هذه الكمية q^* بـ الكمية الاقتصادية للإنتاج (Economic Production Quantity) (EPQ).

النظرية التالية تعطينا قانون حساب الـ (EPQ).

نظرية (٢ ,٤):

إذا تحققت فرضيات نموذج الـ (EPQ) فإن:

$$q^* = \sqrt{\frac{2KDr}{h(r-D)}}$$

البرهان:

مثلما رأينا في نموذج الـ EOQ فإن التكلفة الإجمالية (ف.و.ز) للمخزون TCU(q) يمكن فصلها إلى تكلفة إجمالية متغيرة (ف. و. ز) VCU(q) وتكلفة إجمالية ثابتة (ف.و.ز) FCU(q) حيث:

$$VCU(q) = HCU(q) + SCU(q),$$
$$FCU(q) = p.\ D$$

و HCU(q) ترمز لتكلفة التخزين (ف.و.ز).

SCU(q) ترمز لتكلفة التحضير (ف.و.ز).

نحسب الآن هاتين التكلفتين:

بما أنّ معدّل الاستهلاك ثابت فإن متوسط مستوى المخزون في الدورة يساوي نصف القيمة القصوى لمستوى المخزون. من الشكل (٢ ,١١) نجد أن القيمة القصوى لمستوى المخزون توافق اللحظة $\frac{q}{r}$ وبما أنّ معادلة المستقيم OC هي y = (r-D)x فإنّ مستوى المخزون عند اللحظة $\frac{q}{r}$ يساوي $(r-D)\frac{q}{r}$ وبالتالي متوسط مستوى المخزون في الدورة يساوي $\frac{q(r-D)}{2r}$.

لدينا إذاً:

$h = HCU(q)$ (متوسط مستوى المخزون في الدورة).

$$= \frac{hq(r-D)}{2r} = \frac{q(r-D)}{2r} \times h$$

(•) نحسب قيمة SUC(q) بالقانون التالي:

$K = SCU(q)$ (عدد مرات الإنتاج (ف. و. ز)).

$$= \frac{KD}{q} = \frac{D}{q} \times K$$

في النهاية نحصل على القانون التالي لحساب التكلفة الإجمالية المتغيرة (ف.و.ز):

$$VCU(q)=\frac{hq(r-D)}{2r}+\frac{KD}{q}$$

باستخدام النظرية (٢ , ١) يمكننا التحقق من أن الدّالة $VCU(q)$ هي دالة محدبة على $[0,\infty)$ من جهة أخرى تعطينا النظرية (٢ , ٢) الشرط الضروري والكافي لـ q^* حتى يكون نقطة صغرى لهذه الدالة وهو:

$$\frac{d}{dq}VCU(q^*)=0$$

بحساب المشتقة ومساواتها بالصفر نحصل على:

$$\frac{h(r-D)}{2r}-\frac{KD}{(q^*)^2}=0\Leftrightarrow(q^*)^2=\frac{2KD}{h}\times\frac{r}{r-D}$$

وبما أن الحجم الأمثل للإنتاج q^* هو عدد موجب فإنَّ:

$$q^*=\sqrt{\frac{2KD}{h}\cdot\frac{r}{r-D}}$$

ملاحظات (٢ , ٣):

١ - بما أن عدد الطلبيات N يحسب بالقانون $N=\frac{D}{q}$ فإن العدد الأمثل للطلبيات N^* هو:

$$N^*=\frac{D}{q^*}=\sqrt{\frac{Dh}{2K}\frac{(r-D)}{r}}$$

٢ - من العلاقة $T=\frac{q}{D}$ نجد أنّ الطول الأمثل للدورة T^* يحسب بالقانون:

$$T^*=\sqrt{\frac{2K}{Dh}\frac{r}{(r-D)}}$$

٣ - التكلفة الإجمالية المتغيرة المثلى في وحدة الزمن تحسب بالقانون:

$$VCU(q^*)=\sqrt{2KDh\left(\frac{r-D}{r}\right)}$$

بينما التكلفة الإجمالية المثلى في وحدة الزمن تحسب بالقانون:

$$TCU(q^*)=VCU(q^*)+PD$$

٤ - يمكن حساب متوسط المخزون في الدورة بطريقة ثانية أكثر عموماً من التي تطرقنا إليها في برهان النظرية (٢ , ٤) وهي الطريقة التي تستخدم المساحات والتي سبق وأن شرحناها بشكل مفصل في النموذج الأساسي لـ EOQ في الملاحظة (٢ , ٢). باستخدام هذه الطريقة

نحصل على متوسط مستوى المخزون لهذا النموذج يساوي عدد الوحدات المخزونة في الدورة (وتوافق في الشكل (٢ ,١١) مساحة المثلث OBC) مقسوماً على طول الدورة.

٥ - لاحظ أنّ $EPQ = EOQ.\sqrt{\left(\frac{r}{r-D}\right)}$.

بما أن الزيادة في معدل الإنتاج r ينتج عنها زيادة في سرعة الإنتاج فإنّ حالة $r = \infty$ توافق حالة الاستقدام اللحظي للبضاعة. وبالتالي كلما كان r كبيراً كفاية فإنّ نموذج الـ EPQ يتقارب إلى نموذج الـ EOQ. ويمكننا رؤية ذلك بعد أخذ النهاية في العلاقة السابقة.

٦ - يتميز نموذج الـ EPQ بخاصية الاستقرار التي يتميز بها نموذج الـ EOQ (انظر التمرين ٥ من التمارين (٢ ,٣)).

٧ - إذا اقتضت الحاجة لحساب قيم صحيحة للـ EPQ فإنه يمكن استخدام الخوارزمية (٢ ,١). (انظر التمرين رقم ٨ من التمارين (٢ ,٣)).

٨ - إذا كان الوقت المتقدم لبداية الإنتاج والذي نرمز له في هذا النموذج بـ L لا يساوي الصفر فإنّ قانون الـ EPQ والـ TCU(q) لا يتغيران ويمكننا في هذه الحالة حساب نقطة إعادة الإنتاج (reorder point) كما في نموذج الـ EOQ. (انظر التمرين ٣ من التمارين (٢ ,٣)).

لنوضح الآن كيفية تطبيق النتائج أعلاه بالمثال التالي:

مثال (٢ ,١٠):

تقوم مؤسسة "آفاق للكمبيوتر" بتسويق ٥٠٠٠ جهاز حاسوب في السنة بتكلفة قدرها ٢٥٠٠ ريال للجهاز في حين أن الكمية التي بإمكان المؤسسة تركيبها في السنة تساوي ٧٥٠٠ جهاز. إذا علمنا أن تكاليف تحضير ورشات التركيب تساوي ١٧٠ ريال وأن تكاليف التخزين قدرت بـ ٢٠% من تكلفة الجهاز الواحد في السنة.

١ - أوجد العدد الأمثل للوحدات المنتخبة في كل فترة إنتاج.

٢ - ما هو العدد الأمثل لفترات الإنتاج في السنة.

٣ - ما هو طول كل من فترتي الإنتاج والاستهلاك.

الحل:

لدينا:

D = ٥٠٠٠ جهاز/السنة. r = ٧٥٠٠ جهاز/سنة. p = ٢٥٠٠ريال للوحدة.

K = ١٢٠ريال. h = (٠,٢) (٢٥٠٠) = ٥٠٠ ريال للجهاز/سنة.

١ - العدد الأمثل للوحدات المنتجة في كل فترة إنتاج يساوي:

$$EPQ = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{r}{r-D}} = \sqrt{7200} \approx 84.85$$ جهاز

٢ - العدد الأمثل لفترات الإنتاج في السنة يساوي:

$$N^* = \frac{D}{EPQ} = \frac{5000}{84.85} = 59$$ مرة في السنة

طول فترة الإنتاج $= \frac{q^*}{r} = \frac{٨٤,٨٥}{٧٥٠٠} =$ ٠,٠١١٣ سنة

طول فترة الاستهلاك $= T^* - \frac{q^*}{r} = \frac{1}{N^*} - \frac{q^*}{r} =$ ٠,٠٠٥٦٥سنة.

تمارين

١ - تنتج شركة كهرباء ١٢٠٠٠ مكيف في الشهر وتبيع ٤٠٠٠ وحدة في الشهر وتخزّن الباقي. إذا علمنا أن تكاليف تحضير الإنتاج قد قدّرت بـ ٢٠٠٠ ريال لكل فترة إنتاج وأن تكاليف التخزين قد قدرت بـ ١ ريال للوحدة في الشهر:

(١) أوجد الـ EPQ والتكلفة الموافقة لها TCU(EPQ).

(٢) أوجد الطول الأمثل لفترة الإنتاج T_1^*.

(٣) أوجد أعلى مستوى للمخزون I_{max}^*.

(٤) أوجد الطول الأمثل للدورة T^*.

(٥) أوجد العدد الأمثل لفترات الإنتاج في وحدة الزمن.

٢ - تستهلك شركة مقاولات ٢٥ طن من الحديد في الشهر ويقدر سعر ١ كلغ من الحديد بـ ١٢ ريال. قُدّرت تكلفة الطلبية للعام الماضي بـ ١٠٠٠٠ ريال لكل ٤٠٠٠ طلبية. إذا علمنا أن تكاليف التخزين قدرت بالنسبة التالية من سعر الوحدة: ٢٠% كتكاليف لرأس المال و٥%

كتكاليف تأجير المستودع و٣% كتكاليف للبضاعة التالفة و٢% كتكاليف للتأمين إضافة إلى ذلك تم تقدير تكاليف متنوعة أخرى بحوالي ٣٠٠٠ ريال في السنة.

احسب ما يلي:

(١) الكمية الاقتصادية للطلب EOQ.

(٢) الزمن الأمثل بين طلبيتين T^*.

إذا فرضنا أن الشركة قد قررت إنتاج هذه البضاعة وذلك تفادياً للتكاليف الإضافية المتنوعة ٣٠٠٠ ريال/السنة وبفرض أن معدّل الإنتاج يساوي ٥٠ وحدة في الشهر وأن تكلفة الوحدة تساوي ٦ ريال وأن تكلفة التحضير للإنتاج تساوي ١٠٠٠ ريال. هل من صالح الشركة أن تقوم بإنتاج البضاعة أو باستيرادها من عند المموّلين؟

٣ – يستهلك منتوج معين بمعدل ثابت يساوي ٢٠٠٠ وحدة في السنة في حين يتم إنتاجه بمعدل ٣٩٠٠ وحدة في السنة. إذا علمنا أن تكلفة الوحدة هي ٥٠ ريال وتكلفة التحضير للإنتاج تساوي ٦٥٠ ريال وتكلفة التخزين في السنة تساوي ٣٠% من تكلفة الوحدة.

أوجد مايلي:

(١) الحجم الأمثل للإنتاج.

(٢) إذا كان الوقت المتقدم للتحضير للإنتاج هو أسبوعين فمتى يجب البدء في الإنتاج.

٤ – قدر منتج لعجلات السيارات أن كمية الوحدات المنتجة تساوي ٢٠٠ عجلة في اليوم وأنّ الكمية التي بيعت في السنوات الماضية هي بمعدل ١٠٠ عجلة في اليوم. إذا علمنا أن تكلفة التخزين السنوية تساوي ٢٠% من سعر العجلة وأن تكلفة التحضير للإنتاج تساوي ٥٠ ريال وأن سعر العجلة يساوي ٣٧ ريال. بفرض أن السنة الواحدة تساوي ٣٦٥ يوم أجب على ما يلي:

(١) احسب التكلفة السنوية للتخزين HCU(q)، التكلفة السنوية للتحضير للإنتاج SCU(q)، ثم التكلفة السنوية الإجمالية المتغيرة VCU(q) الموافقة لكل كمية منتجة q حسب القيمة التالية:

q = ٤٠٠، ٦٠٠، ٨٠٠، ١٠٠٠، ١٢٠٠، ١٤٠٠، ١٦٠٠

(٢) ارسم التكاليف التي حصلت عليها في السؤال الأول في نفس الشكل وأوجد بيانياً الحجم الأمثل للإنتاج EPQ.

(٣) أوجد الخطة المثلى لهذا النظام.

٥ – الغرض من هذا التمرين دراسة استقرار وحساسية الـ EPQ ونستخدم لذلك نظام المخزون لمنتج العجلات المذكور في التمرين السابق.

ذكرنا أن منتج العجلات قد قدّر تكلفة التخزين بـ ٢٠% من تكلفة إنتاج العجلة الواحدة وأن تكلفة الطلبية قدرها بـ ٥٠ ريال. وبما أن مثل هذه التغيرات لا يمكن أن تكون دقيقة مائة بالمائة ولمعرفة مدى تأثير عدم الدقة في هذه التقديرات على الـ EPQ نقوم بما يلي:

(١) حساب الـ EPQ الموافق لكل قيم تكاليف التخزين والتحضير للإنتاج الموضحة بالجدول (٢ ,٢).

(٢) حساب التكلفة الإجمالية السنوية المتغيرة المثلى VCU(EPQ) في السنة والموافقة لكل قيمة EPQ ناتجة في السؤال السابق.

(٣) حساب VCU(q) عند q = ٩٩٣ الموافقة لكل قيم تكاليف التخزين والتحضير للإنتاج الموضحة بالجدول (٢ ,٤) التالي.

(٤) ما هي ملاحظاتك واستنتاجاتك على تغيرات الـ EPQ وماذا تستخلص من ذلك في فيما يخص استقرار وحساسية الـ EPQ.

جدول (٢ ,٤) بيانات التمرين (٥)

[illegible]	[illegible]	[illegible]	التكلفة الإجمالية للمخزون

$q =$ ٩٩٣	$q = q^*$			
			٤٠	١٦
			٤٥	١٦
			٥٠	١٦
			٥٥	١٦
			٦٠	١٦
			٤٠	١٨
			٤٥	١٨
			٥٠	١٨
			٥٥	١٨
			٦٠	١٨
			٤٠	٢٠
			٤٥	٢٠
			٥٠	٢٠
			٥٥	٢٠
			٦٠	٢٠
			٤٠	٢٢
			٤٥	٢٢
			٥٠	٢٢
			٥٥	٢٢
			٦٠	٢٢
			٤٠	٢٤
			٤٥	٢٤
			٥٠	٢٤
			٥٥	٢٤
			٦٠	٢٤

٦ - تقوم شركة "العربي للأدوية" بإنتاج دواء مدة صلاحيته هي أسبوعين. إذا علمنا أن استهلاك هذا الدواء يتم بمعدل ٥٢٠٠٠ وحدة في السنة وأن تكلفة تحضير المخابر لإنتاج هذا النوع من الأدوية تساوي ٤٠٠ ريال وأن تكلفة تخزين الوحدة تساوي ٢٠% من سعر الوحدة الذي يساوي ١٠٠ ريال. أوجد الخطة المثلى لنظام مخزون هذه الشركة.

٧ - أثبت صحة القوانين الموجودة في الملاحظات من ١ إلى ٤ من الملاحظات (٢, ٣).

٨ - أثبت صحة الملاحظة ٧ من الملاحظات (٢ ,٣).

٩ - تنتج شركة "العربي" لتركيب السيارات ٣٠٠٠٠ سيارة في السنة وتبيع ٢٠٠٠٠ سيارة في السنة. إذا علمنا أن تكلفة التحضير للورشات تساوي ١٠٠٠ ريال وأن تكلفة تخزين السيارة الواحدة ٥٠ ريال في السنة أوجد الخطة المثلى لشركة "العربي" استخدم التمرين السابق لإيجاد EPQ عدداً صحيحاً.

١٠ - بيّن أن تكلفة التخزين وتكلفة الطلبية في وحدة الزمن متساويتان عند الكمية الاقتصادية للإنتاج EPQ أي أن:

$$HCU(EPQ) = SCU(EPQ)$$

ثم استنتج أن التكلفة الإجمالية المتغيرة المثلى في وحدة الزمن يمكن حسابها بإحدى العلاقتين:

$$VCU(EPQ) = h.EPQ\left(\frac{r-D}{r}\right) \quad \text{أو} \quad VCU(EPQ) = \frac{2KD}{EPQ}$$

١١ - يمكن كتابة التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن لنموذج الـ EPQ كدالة في المتغير T كما يلي:

$$TCU(T) = \frac{h(r-D)DT}{2r} + \frac{K}{T} + P.D$$

أوجد الطول الأمثل للدورة باستخدام العلاقة السابقة ثم استنتج الكمية الاقتصادية للإنتاج EPQ.

١٢ - يمكن أيضاً كتابة التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن لنموذج الـ EPQ كدالة للمتغير N كما يلي:

$$TCU(N) = \frac{hD(r-D)}{2rN} + KN + PD$$

آ) بيّن أن العدد الأمثل للطلبيات N^* يحقق:

$$N^*(N^*-1) \le \frac{Dh}{2K}\frac{(r-D)}{r} \le N^*(N^*+1)$$

٢ – إذا كان:

r = ٨٠٠٠ وحدة/سنة و D = ٤٠٠٠ وحدة/سنة،

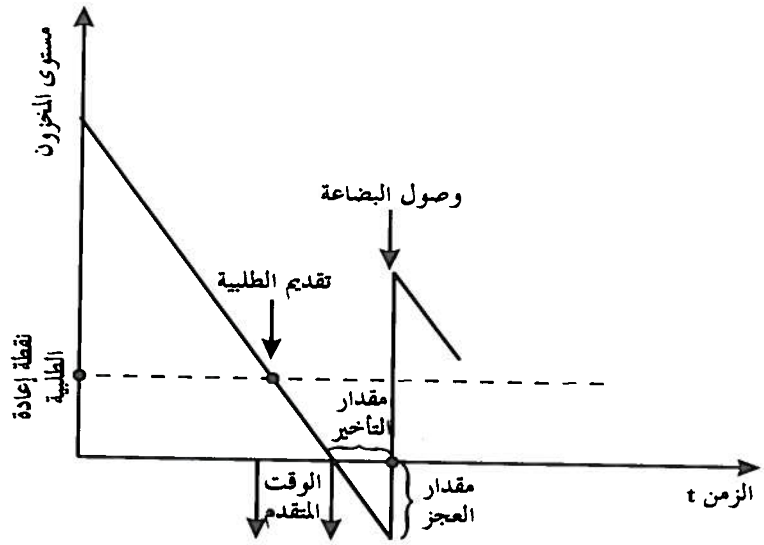
h = ٠,١٩٦ ريال للوحدة/سنة ، K = ٨٠ريال.

فأوجد باستخدام السؤال السابق ما يلي:

العدد الأمثل للطلبيات N^*، الكمية الاقتصادية للإنتاج EPQ، التكلفة الإجمالية المثلى TCU(EPQ).

(٢ ,٨) نموذج الكمية الاقتصادية للطلب مع العجز
(The EOQ Model with Shortages)

في كثير من الأحيان تتعرض الأنظمة إلى مشكلة عدم توفر الكميات المطلوبة من طرف العملاء أو الزبائن عند لحظة الطلب وهذا ما يؤدي إلى حدوث حالة عجز للنظام. ومن أسباب

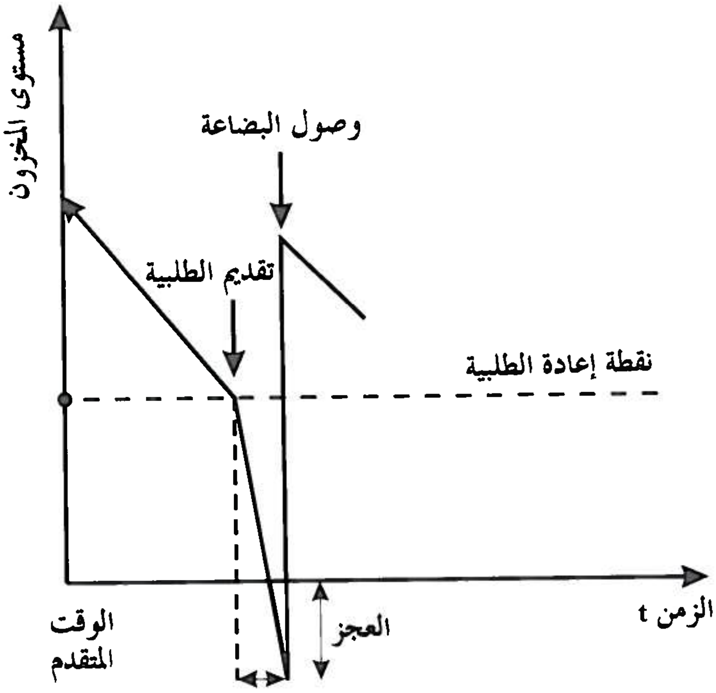


شكل (٢ ,١٠): حالة عجز عند حدوث تغيرات في الوقت المتقدم

عدم توفر الكميات المطلوبة من البضاعة تغيرات في الوقت المتقدم (Lead time) أو في معدل الاستهلاك.

الشكل (٢ ,١٠) يوضح حالة العجز عند حدوث تغيرات في الوقت المتقدم، حيث كان وصول البضاعة متأخراً عن موعد الحضور في حين لم تحدث أية تغيرات على معدل الاستهلاك.

الشكل (٢ ,١١) يوضح حالة العجز لنظام عند حدوث تغيرات على معدل الاستملاك حيث كان D أكبر من القيمة المتوقعة في حين أن وقت الانتظار لم يحدث عليه أي تغيير فقد وصلت البضاعة في الوقت المنتظر.



شكل (٢ ,١١): حالة عجز عند حدوث تغيرات على معدل الاستهلاك

تتسبب حالات العجز في فقدان عدد كبير من الزبائن وبعض التكاليف الإضافية للنظام هي في غنى عنها. فعلى سبيل المثال يضطر النظام في مثل هذه الحالات إلى التمويل من أماكن أقرب من الممولين المعتادين مما يرفع بطبيعة الحال في نسبة التكاليف.

وفي الواقع العملي لا يمكن دائماً تفادي حالات العجز مما يلزم النظام إلى وضع برامج ومخططات للتعامل مع مثل هذه الحالات فمثلاً عند شراء زبون سيارة من "مؤسسة لتوزيع السيارات" قد لا يجد المواصفات المرغوبة بين السيارات المعروضة أو الموجودة في المخزون وفي هذه الحالة يمكن للمؤسسة توفير السيارة ذات المواصفات المرغوب فيها إذا وافق الزبون على الانتظار مدة معينة لتوفير طلبه.

في هذه الفقرة سوف نجري تعديلات على نموذج EOQ ليصبح ملائماً لهذه الحالة من العجز.

السماح للطلبيات المسترجعة (Allowing backorders):

نتناول في هذا النموذج حالة العجز المعروفة باسم الطلبيات المسترجعة (backorders) عندما نقول أن منتوج معين هو طلبية مسترجعة نعني بذلك ما يلي:

١ - أن الزبون أو العميل قد قدم طلباً لهذا المنتوج.

٢ - أنّ المنتوج غير متوفر في المخزون عند لحظة الطلب.

٣ - أن الزبون لا يسحب أو لا يتراجع عند طلبه.

٤ - أن الزبون ينتظر إلى غاية وصول الطلبية التالية لهذا المنتوج.

٥ - أن الممول يلبي طلب الزبون أو العميل لحظة وصول طلبية جديدة.

ننبه أن هذا النموذج غير صالح في حالة سحب أو تراجع الزبون عن طلبه.

الفرضيات المطلوبة لبناء هذا النموذج:

١ - يكون معدل الاستهلاك (ثابتاً ومعلوماً).

٢ - يوجد صنف واحد من البضاعة في المخزون.

٣ - عند نفاذ المخزون يقوم النظام بتسجيل كل طلبيات الزبائن ويتم تقييم الطلبيات عند وصول عدد الطلبيات المسترجعة إلى حد معيّن.

٤ - كل التكاليف التالية تكون ثابتة ومستقلّة عن حجم الكمية المطلوبة:

h: تكلفة التخزين لكل وحدة بضاعة في كل وحدة زمن.

K: تكلفة الطلبية.

p: تكلفة شراء وحدة بضاعة.

g: تكلفة العجز لكل وحدة بضاعة في كل وحدة زمن.

بناء النموذج:

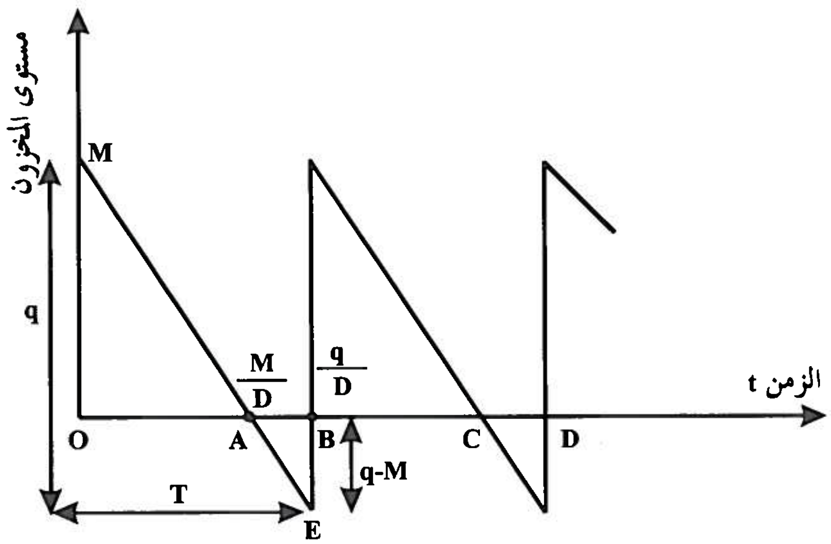
نرمز بـ q لحجم الطلبية وبـ M لأعلى مستوى للمخزون وفق خطة معينة بفرض أنّ الوقت المتقدم L يساوي الصّفر فإنّ النظام يقوم بتقديم الطلبية عندما يكون العجز يساوي

$S = M - q$ وحدة بضاعة. يبيّن الشكل (٢, ١٤) تغيرات مستوى المخزون مع الزّمن في حالة تقديم الطلبية عند الزمن صفر.

الهدف من بناء هذا النموذج هو البحث عن حجم الطلبية المثلى q^* وأعلى مستوى للمخزون M^* الموافق لذلك. أي إيجاد النقاط الصغرى لدالة التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن $TCU(q, M)$ كدالة في q و M.

النظرية التالية تعطينا قيم q^* وM^*.

شكل (٢, ١٢) تغيرات مستوى المخزون في نموذج الـ EOQ مع العجز.



نظرية (٢, ٥):

إذا تحقق فرضيات هذه النموذج فإن q^* وM^* تحسب بالقانونين:

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\left(\frac{h+g}{g}\right)} \quad \text{و} \quad M^* = \sqrt{\frac{2KD}{h} - \left(\frac{g}{h+g}\right)}$$

البرهان:

بما أنّ تكلفة شراء الوحدة p مستقل عند قيم q وM فإنّ النقطة الصغرى للدالة TCU هي نفس النقطة الصغرى للدالة VCU ومنه يكفي البحث عن q^* وM^* التي تصغر VCU.

يمكن كتابة VCU كدالة في المتغيرين q وM كما يلي:

$$VCU(q,M) = HCU(q,M) + OCU(q,M) + BCU(q,M)$$

حيث HCU(q,M) هي تكلفة التخزين في وحدة الزمن.

OCU(q,M) هي تكلفة الطلبية في وحدة الزمن.

BCU(q, M) هي تكلفة العجز (المسترجع) في وحدة الزمن.

تجدر الإشارة إلى أن تغيرات مستوى المخزون على الفترة OB (انظر الشكل ٢ ,١٢) تماثل تماماً نفس التغيرات على الفترة BD ولهذا نسمي الفترات OB وBD بالدورات.

لتحديد التكاليف BCU, OCU, HCU نقوم أولاً بتحديدها في دورة واحدة وهذا يتطلب منّا حساب طول الفترتين AB وOA لأنّ HCU وBCU تساويان الصفر على AB وOA على التوالي.

من جهة ثانية انعدام مستوى المخزون يكون عند استهلاك M وحدة وبالتالي طول الفترة OA يساوي $\frac{M}{D}$ ومن جهة أخرى فإن لحظة انتهاء الدورة توافق لحظة استهلاك q وحدة ومنه طول الفترة OB يساوي $\frac{q}{D}$ وبالتالي:

$$AB = OB - OA = \frac{q-M}{D}$$

كما نلاحظ أن عدد الوحدات المطلوبة في الدورة يساوي q وحدة وبالتالي عدد الدورات يكون مساوياً لـ $N = \frac{D}{q}$ دورة في وحدة الزّمن.

لدينا:

HCU(q,M) = (تكلفة التخزين في الدورة) × (عدد الدورات في وحدة الزمن)

تكلفة التخزين في الدورة = تكلفة التخزين من اللحظة O إلى اللحظة A.

= h × متوسط مستوى المخزون × طول الفترة OA.

بما أن معدل الاستهلاك ثابت فإن متوسط مستوى المخزون يساوي $\frac{M}{2}$ وعليه:

$$HCU(q,M) = h \times \frac{M}{2} \times \frac{M}{D} \times \frac{D}{q} = \frac{hM^2}{2q}$$

وبنفس الطريقة يمكننا الحصول على تكلفة العجز في وحدة الزمن وتساوي:

$$OCU(q,M) = \frac{g(q-M)^2}{2q}$$

أما تكلفة الطلبية OCU فتحسب بنفس القانون الذي سبق وأن رأيناه في النماذج الأخرى وهو:

$$OCU(q,M) = \frac{KD}{q}$$

في النهاية نحصل على قانون التكلفة الإجمالية المتغيرة في وحدة الزمن:

$$VCU(q,M) = \frac{hM^2}{2q} + \frac{g(q-M)^2}{2q} + \frac{KD}{q}$$

باستخدام النظرية (٢ , ١) يمكننا التحقق من أن الدالة VCU هي دالة محدبة بالنسبة للمتغيرين q وM على المجموعة $[0,\infty) \times [0,\infty)$ وبالتالي وحسب النظرية (٢ , ٢).

الشرط الضروري والكافي للنقطة (q^*, M^*) حتى تكون نقطة صغرى للدالة هو:

$$\frac{\partial VCU(q^*,M^*)}{\partial q} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial M} VCU(q^*,M^*) = 0$$

وبحساب المشتقات الجزئية $\frac{\partial VCU}{\partial M}$ و $\frac{\partial VCU}{\partial q}$ نجد:

$$\frac{\partial VCU}{\partial q}(q,M) = \frac{1}{2q^2}\left[-hM^2 + g(q-M)(q+M) - 2KD\right]$$

$$\text{و} \quad \frac{\partial VCU}{\partial M}(q,M) = \frac{1}{q}\left[hM - g(q-M)\right]$$

ثم بمساواتها بالصفر وحل المعادلتين نحصل على قيم q^* وM^* المعطاة في نص النظرية.

ملاحظة (٢ , ٤): لاحظ أن المعادلة $\frac{\partial VCU}{\partial M}(q^*,M^*) = 0$ تعطينا:

$$q^* = \frac{g+h}{g}.M^*$$

وبالتالي لدينا دائماً $q^* > M^*$.

ملاحظات (٢, ٥):

١ - بما أن $S = q - M$ فإن العدد الأمثل للطلبيات المسترجعة (العجز الأمثل) يعطى بـ:

$$S^* = \sqrt{\frac{2KD}{g} \times \frac{h}{h+g}}$$

٢ - بما أن عدد الطلبيات N يحسب بالقانون $N = \frac{D}{q}$ فإن عدد للطلبيات الأمثل N^* هو:

$$N^* = \sqrt{\frac{Dh}{2K} \times \frac{g}{h+g}} .$$

٣ — من العلاقة $T = \frac{q}{D}$ نجد أن الطول الأمثل للدورة T^* يحسب بالقانون:

$$T^* = \sqrt{\frac{2K}{Dh} \times \frac{h+g}{g}}$$

٤ - التكلفة الإجمالية المتغيرة المثلى في وحدة الزمن تحسب بالقانون:

$$VCU(q^*, M^*) = \sqrt{2KDh\left(\frac{g}{\hbar + g}\right)}$$

بينما التكلفة الإجمالية المثلى في وحدة الزمن تحسب بالقانون:

$$TCU(q^*, M^*) = VCU(q^*, M^*) + p\,D.$$

٥ - يمكن حساب متوسط مستوى المخزون عند طريق حساب عدد الوحدات المخزنة في الدورة (ويساوي في الشكل (٢, ١٢) مساحة المثلث OAM) ثم قسمته على طول الفترة OA.

كما يمكن حساب متوسط العجز عن طريق حساب عدد الطلبيات المسترجعة في الدورة (ويساوي مساحة المثلث ABE) ثم قسمته على طول الفترة AB.

٦ - لاحظ أن $M^* = EOQ\sqrt{\left(\frac{g}{h+g}\right)}$ و $q^* = EOQ\sqrt{\left(\frac{h+g}{g}\right)}$

عندما تقترب تكلفة العجز للوحدة g إلى اللانهاية فإن M^* وq^* تقتربان من قيمتها في نموذج الـ EOQ وأنّ العجز الأمثل S^* يقترب من الصّفر.

٧ — إذا اقتضت الحاجة لحساب قيم صحيحة لـ q^* فإنه يمكن استخدام الخوارزمية (٢, ١) (انظر التمرين ٥ من التمارين (٢, ٤)).

مثال (٢ , ١٠):

تبيع مؤسسة "العربي" للكمبيوتر ١٥٠٠٠ فأرة كمبيوتر في السنة في حين تقوم باستيراد نفس البضاعة من ممول في جمهورية الصين الشعبية بتكلفة قدرها ٥ ريال للفأرة الواحدة. وتكلفة الطلبية تساوي ٢٠٠ ريال. تعتقد هذه المؤسسة أن عدم توفر البضاعة عند الطلب قد يؤدي إلى فقدان بعض الزبائن. لذا فهي تنتهج خطة تسجيل أسماء الزبائن حين الطلب مع استدعائهم حين وصول البضاعة وتكلفها هذه الخطة ما يعادل ١٥ ريال سنوياً للفأرة الواحدة. إذا علمنا أن تكلفة التخزين تساوي ١٠% من قيمة الفأرة فأوجد ما يلي:

١ - الكمية الاقتصادية للطلب.

٢ - أعلى مستوى للمخزون.

٣ - أكبر قيمة ممكنة للعجز.

الحل:

من معطيات المثال:

D = ١٥٠٠٠فأرة/السنة، P = ٥ ريال لكل فأرة، g = ١٥ريال للفأرة/السنة،

K = ٢٠٠ ريال

h = ٠,٠٥ للفأرة/السنة.

وبالتالي حسب قوانين S^*, M^*, q^* نجد:

$$q^* = \left(\frac{2KD}{h} \cdot \frac{h+g}{g}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2(200)(15000)}{0.05} \cdot \frac{15.05}{15}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 10972.69 \text{ فأرة}$$

$$M^* = \left(\frac{2KD}{h} \cdot \frac{g}{h+g}\right)^{\frac{1}{2}} = 10936.24 \text{ فأرة}$$

$$S^* = q^* - M^* = \quad 10972.69 - 10936.24 = 36 \text{ فأرة}$$

تمارين

١ - نعتبر نفس معطيات مثال (٢, ٣) (مؤسسة الحرية للطباعة والنشر) حيث كان:

h = ٤,٨ ريال للعلبة/السنة، K = ٢٠ ريال ، D = ١٢٠٠علبة/السنة.

نفرض أن الشركة تقع في حالة عجز بتكلفة عجز قدرها ١٣ ريال في السنة احسب ما يلي:

(١) الكمية الاقتصادية للطلب.

(٢) أعلى مستوى للمخزون.

(٣) القيمة الصّغرى للتكلفة الإجمالية في وحدة الزمن.

(٤) طول الفترة الخالية من العجز.

(٥) طول فترة العجز.

(٦) العدد الأمثل للطلبيات.

٢ - تقوم مؤسسة تجارية بشراء منتج معين من ممولي الجملة وإعادة بيعه للزبائن وفقاً للمعطيات التالية:

- معدل الاستهلاك السنوي ١٠٠٠٠٠ وحدة.
- تكلفة الطلبية ٧٠ ريال.
- تكلفة شراء الوحدة ٧ ريال.
- تكلفة التخزين السنوية للوحدة. ١,٤ ريال.
- تكلفة العجز السنوية للوحدة. ٢ ريال.

(١) احسب الكمية الاقتصادية للطلب.

(٢) إذا كان الوقت المتقدم L يساوي شهر واحد فأوجد نقطة إعادة الطلب.

(٣) ما هو متوسط مستوى المخزون ؟ أعلى مستوى للمخزون؟ أكبر عدد للطلبيات المسترجعة؟ متوسط الطلبيات المسترجعة؟

٣ - يُستهلك منتج بمعدل ٤٠٠٠ وحدة في السنة وبتكاليف ٦٠ ريال للطلبية، و٤ ريال لشراء الوحدة، ٠,٦ ريال لتخزين الوحدة في السنة و١ ريال للعجز السنوي للوحدة.

أ- احسب الكمية الاقتصادية للطلب وأكبر عدد للطلبيات المسترجعة.

ب - إذا رأت المؤسسة التي تبيع هذا المنتج أن لا يتجاوز عدد الوحدات المسترجعة في قائمة الطلبيات المسترجعة ٥٠ وحدة، أوجد حجم الطلبية الذي يحقق ذلك.

٤ - أثبت صحة القوانين الموجودة في الملاحظات من ١ - ٥ من الملاحظات (٢ ,٥).

٥ - أثبت صحة الملاحظة ٧ من الملاحظات (٢ ,٥).

٦ - يمكن كتابة التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن لنموذج الـ EOQ مع العجز في المتغيرين M وT كما يلي:

$$TCU(M,T) = \frac{1}{T}\left[\frac{hM^2}{2D} + \frac{g(TD-M)^2}{2D}\right] + \frac{K}{T} + p.D$$

أوجد الطول الأمثل للدورة وأعلى مستوى للمخزون الموافق لذلك ثم استنتج الكمية الاقتصادية للطلب.

٧ - يمكن أيضاً كتابة التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن لنموذج الـ EOQ مع العجز في المتغيرين q وS كما يلي:

$$TCU(q,S) = \frac{h(q-S)^2}{2q} + \frac{gS^2}{q} + \frac{KD}{q} + p.D$$

أوجد الكمية الاقتصادية للطلب وأكبر عدد للطلبيات المسترجعة الموافق لها ثم استنتج أعلى مستوى للمخزون الموافق لذلك.

٨ - بفرض أن إمكانية تسجيل طلبيات الزبائن غير مسموحة أي أن عدم توفر البضاعة لحظة الطلب تؤدي إلى فقدان الزبائن (Lost sales model). استخدم خطوات بناء نموذج الـ EOQ مع العجز لبناء نموذج يناسب هذه الحالة.

٩ - بفرض أن عدم توفر البضاعة لحظة الطلب تؤدي إلى فقدان نسبة معينة من الزبائن أما النسبة الباقية فيمكن استرجاع طلبياتهم (Mixture of backorders and lost sales). أجب عن نفس سؤال التمرين السابق.

(٩, ٢) نموذج الكمية الاقتصادية للإنتاج مع العجز:
(EPQ Model with Shortage)

في كثير من الأحيان تتعرض الأنظمة الإنتاجية إلى عدم توفر البضاعة لتلبية طلبات العملاء والزبائن عند لحظة الطلب وهذا ما يؤدي إلى حدوث حالة عجز النظام.

في هذه الفقرة سوف نجري بعض التعديلات على نموذج الـ EPQ ليصبح ملائماً لهذه الحالة.

الفرضيات المطلوبة لبناء نموذج الـ EPQ مع العجز:

١ - معدل الاستهلاك ثابتاً ومعروفاً.

٢ - يوجد صنف واحد من البضاعة المنتجة في المخزون.

٣ - عند نفاذ المخزون يتم تسجيل كل طلبيات الزبائن وتبدأ مرحلة الإنتاج عند وصول عدد الطلبيات المسترجعة إلى حد معين.

٤ - كل التكاليف التالية تكون ثابتة ومستقلة عن حجم الكمية المنتجة:

h: تكلفة التخزين لكل وحدة بضاعة في كل وحدة زمن.

K: تكلفة التحضير للإنتاج.

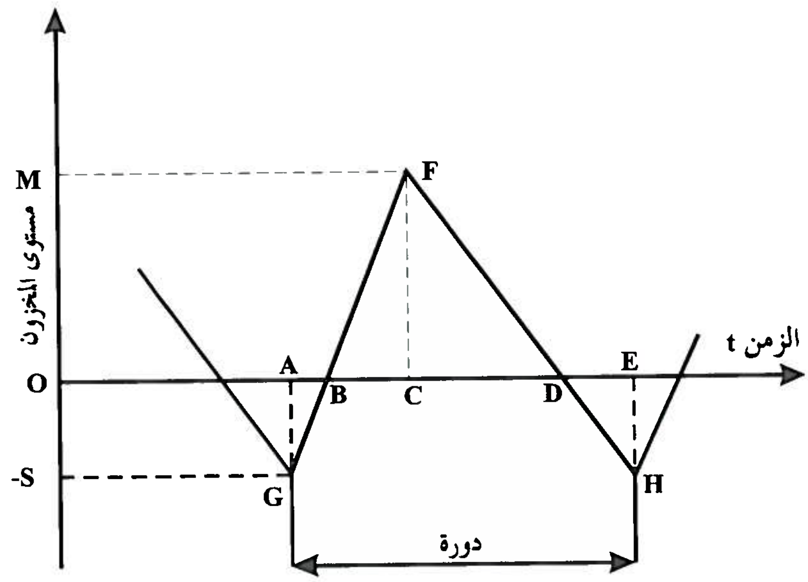
P: تكلفة الإنتاج لوحدة بضاعة.

g: تكلفة العجز لكل وحدة بضاعة في كل وحدة زمن.

بناء النموذج:

نرمز بـ q للكمية المنتجة وبـ M لأعلى مستوى للمخزون وفق خطة معينة وبـ S لعدد الطلبيات المسترجعة الذي تبدأ عنده مرحلة الإنتاج.

يبيّن الشكل (٢, ١٣) تغيرات مستوى المخزون مع الزمن في هذا النموذج.



شكل (٢, ١٣) تغيرات مستوى المخزون مع الزمن في نموذج الـ EPQ مع العجز.

يمكننا التحقق من صحة العلاقة التالية:

$$M=\frac{q}{r}(r-D)-S=q(1-\frac{D}{r})-S$$

نقوم الآن بالبحث عن القيم المثلى q^* وS^* التي تصغر التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن.

نظرية (٢, ٦):

إذا تحققت فرضيات هذا النموذج فإن q^* وS^* تعطى بالقوانين:

$$q^* = \left[\frac{2KD}{h(1-\frac{D}{r})}\frac{h+g}{g}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad S^* = \frac{h}{(h+g)}(1-\frac{D}{r})q^*$$

البرهان:

يمكن كتابة التكلفة الإجمالية في الدورة كما يلي:

$$TCU(q, S) = hT\bar{I} + gT\bar{B} + K + p.q$$

حيث $\bar{I}$ متوسط مستوى المخزون و $\bar{B}$ متوسط عدد الطلبيات المسترجعة في الدورة (متوسط العجز).

بما أن $\bar{I}$ يساوي مساحة المثلث BDF (انظر الشكل (٢، ١٣)) مقسوماً على T فإنّ:

$$\bar{I} = \frac{1}{T}\left[\frac{\left[q(1-\frac{D}{r})-S\right]^2}{2D(1-\frac{D}{r})}\right] = \frac{\left[q(1-\frac{D}{r})-S\right]^2}{2q(1-\frac{D}{r})}$$

من جهة أخرى لدينا $\bar{B}$ يساوي مساحة المثلثين ABG وDEH مقسوماً على T ومنه:

$$\bar{B} = \frac{1}{T}\left[\frac{S^2}{2D(1-\frac{D}{r})}\right] = \frac{S^2}{2q(1-\frac{D}{r})}$$

ولحساب التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن $TCU(q, S)$ نضرب $TCU(q, S)$ بعدد الدورات في وحدة الزمن $\frac{D}{q}$ فنجد:

$$TCU(q,S) = \frac{h\left[q(1-\frac{D}{r})-S\right]^2}{2q(1-\frac{D}{r})} + \frac{gS^2}{2q(1-\frac{D}{r})} + \frac{KD}{q} + p.D$$

بعد التحقق من أن هذه الدالة TCU هي دالة محدبة بالنسبة للمتغيرين S, q وذلك باستخدام النظرية (٢، ١) نستخدم النظرية (٢، ٢) للحصول على الشرط الضروري والكافي للثنائية (S^*, q^*) حتى تكون نقطة صغرى للدالة TCU فنجد العلاقات المطلوب اثباتها.

ملاحظة (٢, ٦):

من النظرية يمكننا ملاحظة أنّ: $S^* < q^*$.

ملاحظات (٢, ٧):

١ – بالتعويض عن قيمة q^* في قانون الـ S^* وM^* نجد:

$$M^* = \sqrt{\frac{2KD(1-\frac{D}{r})g}{h(h+g)}} \quad \text{و} \quad S^* = \sqrt{\frac{2KD(1-\frac{D}{r})h}{g(h+g)}}$$

٢ – العدد الأمثل للدورات في وحدة الزمن يساوي:

$$N^* = \sqrt{\frac{D(1-\frac{D}{r})h}{2K}\frac{g}{g+h}}$$

٣ – الطول الأمثل للدورة T^* يساوي:

$$T^* = \sqrt{\frac{2K}{D(1-\frac{D}{r})h}\frac{g+h}{g}}$$

٤ – التكلفة الإجمالية المثلى في وحدة الزمن تساوي:

$$TCU(q^*, S^*) = \sqrt{\frac{2KDh(1-\frac{D}{r})g}{h+g}} + p.D$$

٥ – نتحقق فيما يلي أنّ نماذج الـ EOQ، الـ EPQ مع العجز هي حالات خاصة من نموذج الـ EPQ مع العجز.

آ – بفرض أنّ تكلفة العجز g تساوي اللانهاية. في هذه الحالة يستحسن للنظام استرجاع أي طلبية أي أنّ:

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h(1-\frac{D}{r})}} \quad \text{و} \quad S = 0$$

وهو ما يوافق نموذج الـ EPQ.

ب – بفرض أنّ معدّل الإنتاج r يساوي اللانهاية في هذه الحالة لدينا:

$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\frac{h+g}{g}}$ و $S^* = \sqrt{\frac{2KD}{g}\frac{h}{h+g}}$ وهو ما يوافق نموذج الـ EOQ مع العجز.

ج – بفرض أن كل من g وr تساويان اللانهاية في هذه الحالة نجد:

$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$ وهو ما يوافق نموذج الـ EOQ.

٦ – يمكن استخدام الخوارزمية (٢ ,١) لإيجاد قيم صحيحة للكمية الاقتصادية للإنتاج.

مثال (٢ ,١١):

تقوم مؤسسة ENIE بإنتاج ١٠٠ تلفاز يومياً بتكلفة تحضير قدرها ١٠٠٠ ريال وبتكلفة تخزين قدرها ٣٠٠ ريال. إذا علمنا أنّ معدّل الطلب على هذه البضاعة تقدر بـ ٢٠٠٠ تلفاز شهرياً وبفرض أنّ المؤسسة تواجه عجزاً بتكلفة سنوية قدرها ٩٠٠ ريال لكل تلفاز أوجد ما يلي:

١ – الكمية الاقتصادية للإنتاج.

٢ – أكبر قيمة ممكنة للعجز وأعلى مستوى للمخزون.

نعتبر في هذا المثال أن ١ شهر = ٣٠ يوم و١ سنة = ٣٦٠ يوم.

الحل:

r = ٣٦٠٠٠ تلفاز/السنة، K = ١٠٠٠ريال، h = ٣٠٠ ريال لكل تلفاز/السنة.

g = ٩٠٠ ريال لكل تلفاز/السنة، D = ٢٤٠٠٠ تلفاز/السنة.

١ – الكمية الاقتصادية للإنتاج تساوي:

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h\left(1-\frac{D}{r}\right)}.\frac{h+g}{g}} = \sqrt{\frac{2(1000)(24000)}{(300)\left(1-\frac{24000}{36000}\right)}\frac{300+900}{900}} = 800 \quad \text{تلفاز}$$

٢ – أكبر قيمة ممكنة للعجز تساوي:

$$S^* = \frac{h}{h+g}\left(1-\frac{D}{r}\right)q^* = \frac{300}{300+900}\left(1-\frac{24000}{36000}\right)(800) = 66.67 \quad \text{تلفاز}$$

٣ – أعلى مستوى للمخزون هو:

$$M^* = q^* = \left(1-\frac{D}{r}\right) - S^* = (800)\left(1-\frac{24000}{36000}\right) - 66.67 = 200 \quad \text{تلفاز}$$

تمارين

١ - يتم إنتاج نوع معين من البضاعة بمعدل ٤٠٠٠ وحدة في السنة ويقدر معدل الطلب على هذه البضاعة بـ ١٦٠٠ وحدة في السنة. تبدأ مرحلة الإنتاج إذا وصل عدد الوحدات المسترجعة في قائمة الطلبيات المسترجعة إلى ٤٠ وحدة. إذا علمنا أن تكلفة التحضير للإنتاج تساوي ٤٠٠ ريال وأن تكلفة إنتاج الوحدة ٢٠ ريال وأن تكلفة تخزين الوحدة في السنة تساوي ٢٠% من سعر لوحدة وأن تكلفة العجز للوحدة في السنة تساوي ٥ ريال أوجد ما يلي:

أ) أعلى مستوى ممكن للمخزون.

ب) متوسط مستوى المخزون في السنة.

ج) تكلفة التخزين السنوية، تكلفة التحضير السنوية.

٢ - أثبت صحة القوانين الموجودة في الملاحظات ١ - ٤ من الملاحظات (٢ ,٧).

٣ - أثبت صحة الملاحظة من الملاحظات (٢ ,٧).

٤ - يمكن كتابة دالة التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن كما يلي:

$$TCU(T,M)=\frac{1}{2\alpha TD}\left[hM^2+g(\alpha TD-M)^2\right]+\frac{K}{T}+p.D$$

حيث $\alpha=1-\frac{D}{r}$. أوجد النقطة الصغرى لهذه الدالة ثم استنتج الكمية الاقتصادية للإنتاج.

٥ - يمكن كتابة الدالة TCU في المتغير N في وحدة الزمن كما يلي:

$$TCU(N)=\frac{hg\alpha}{2(h+g)}.\frac{D}{N}+KN+p.D\,,\ (\alpha=1-\frac{D}{r})$$

بيّن أنّ العدد الأمثل للدورات في وحدة الزمن N^* هو أول عدد صحيح يحقق المتباينة التالية:

$$N^*(N^*-1) \le \frac{\hbar D\alpha}{2K} \cdot \frac{g}{\hbar + g} \le N^*(N^*+1)$$

(٢ ,١٠) نموذج المخزون متعدد الأنواع من البضاعة مع محدودية المستودع أو رأس المال

Multi Item Model with Space or Capital Constraints

في كل النماذج السابقة كنّا نتعامل مع أنظمة ذات نوع واحد من البضاعة. تلك النماذج يمكن استخدامها أيضاً لدراسة أنظمة المخزون لأنظمة ذات أنواع متعددة من البضاعة على شرط أن تكون هذه الأنواع مستقلة تماماً عن بعضها البعض. ولكن إذا اشتركت هذه الأنواع فيما بينها في مكان التخزين أو رأس المال المخصص أو غير ذلك، وهي الحالة الأكثر حدوثاً، فإنّ النماذج السابقة تبطل صلاحيتها مما يؤدي إلى التفكير في وضع نموذج آخر أو جديد ملائم لمثل هذه الحالات.

الفرضيات المطلوبة لبناء النموذج:

١ – يوجد n نوع من البضاعة في المخزون تشترك في مساحة التخزين أو رأس المال.

٢ – معدّل الاستهلاك لكل نوع، من البضاعة يكون ثابتاً ومعروفاً.

٣ – لا وجود لحالة العجز.

٤ – لكل نوع من البضاعة التكاليف التالية ثابتة ومستقلة عند حجم الطلبة.

h_i : تكلفة التخزين للوحدة في كل وحدة زمن.

K_i: تكلفة الطلبية.

p_i: تكلفة الشراء للوحدة.

بناء النّموذج:

لنفرض أنه توجد n نوع من البضاعة تشترك في مساحة التخزين قدرها A وحدة مساحة ولتكن a_i المساحة اللازمة لتخزين وحدة بضاعة من النوع i وليكن q_i حجم الطلبية للنوع i عندئذٍ يكون لدينا القيد التالي:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i . q_i \leq A$$

لتكن D_i معدّل الاستهلاك في وحدة الزمن، للنوع i من البضاعة وبموجب نموذج الـ EOQ، يمكن كتابة دالة التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن للنّوع i كما يلي:

$$TCU_i(q_i) = \frac{h_i q_i}{2} + \frac{K_i D_i}{q_i} + p_i . D_i$$

أما التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن لكل أنواع البضاعة فتعطى بالقانون:

$$TCU(q_1, q_2, ...q_n) = \sum_{i=1}^{n} TCU_i(q_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{h_i q_i}{2} + \frac{K_i D_i}{q_i} + p_i D_i \right]$$

ولتحديد الكمية الاقتصادية للطلب لكل أنواع البضاعة نقوم بحل المسألة التالية:

أوجد أصغر قيمة للدالة $TCU(q_1, q_2, ..., q_n)$

وفقاً للقيود:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i q_i \leq A \\ q_i \geq 0 \end{cases} \qquad (١)$$

باستخدام النّظرية (١ ، ٢) يمكننا التحقق أن الدوال TCU_i هي دوال محدّبة بالنسبة للمتغير q_i وعليه تكون الدالة TCU دالة محدبة في المتغير $q = (q_1, q_2, ... q_n)$، كمجموع دوال محدبة. من جهة ثانية القيد (١) خطي وبالتالي يمكن صياغة المسألة والتي سنرمز لها بـ ('P) على الشكل التالي:

$$(P) \begin{cases} TCU(q_1, q_2 .....q_n) & \text{صغر الدالة} \\ \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i q_i = A \\ q_i \geq 0 \end{cases} & \text{وفقاً للقيود} \end{cases}$$

لإيجاد الحل الأمثل للمسألة الجديدة ('P) نستخدم طريقة لاغرانج للمسائل غير الخطية بقيود على شكل مساواة.

نكتب دالة لاغرانج الموافقة للمسألة ('P).

$$L(q_i, q_2, \ldots\ldots q_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h_i q_i}{2} + \frac{K_i D_i}{q_i} + p_i D_i\right) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i q_i - A\right)$$

ثم نبحث عن النقاط الصغرى لهذه الحالة باستخدام نظرية كوهن – توكر (Kuhn-Tucker) فنجد الشرط الضروري والكافي التالي:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \text{ و } ، i = 1,2,\ldots, n \text{ و } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \text{ و } ، \lambda > 0$$

وبحل هذا النظام من المعادلات نجد:

$$q_i = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i + 2\lambda a_i}} \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, n \text{ و } \sum_{i=1}^{n} a_i q_i = A$$

لاحظ أنه إذا كان $\sum_{i=1}^{n} a_i . q_i > A$ فإن $\sum_{i=1}^{n} a_i . \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i + 2\lambda a_i}} > A$.

وبما أن الطرف الأيسر لهذه المتباينة هو دالة متناقصة في المتغير λ أي أنه كلما زادت قيمة λ كلما تناقص الطرف الأيسر متقارباً نحو القيمة A فيمكننا القول أنه يوجد قيمة وحيدة λ^* بحيث أن:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i + 2\lambda^* a_i}} = A$$

ثم بالتعويض عن هذه القيمة في قانون الـ q_i نجد القيمة المثلى q_i^* .

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i + 2\lambda^* a_i}}, \qquad i = 1, 2, \ldots.., n$$

باستخدام هذه النتائج يمكننا وضع الخوارزمية التالية للحصول على حلول تقريبية للمسألة (P).

خوارزمية (٢ ,٣):

خطوة ١: حساب q_i وهو حل المسألة P بدون قيد وتوافق حالة $\lambda = 0$.

خطوة ٢: إذا كان q_i يحقق $\sum_{i=1}^{n} a_i q_i \le A$ فإنه هو الحل المطلوب.

إذا كان q_i يحقق $\sum_{i=1}^{n} a_i q_i > A$ فإننا نقوم بإعطاء قيم مختلفة موجبة لـ λ إلى أن نحصل على القيمة λ^* التي تحقق القيد بشكل مساواة ثم نعوّض في قانون q_i^* فنحصل على الحل الأمثل المطلوب بشكل تقريبي.

مثال (٢, ١٢):

تستهلك مؤسسة ثلاث أنواع مختلفة من البضاعة وتقوم بتخزينها في مستودعات ذات مساحة إجمالية تساوي ٢٥ وحدة مساحة. الجدول (٢, ٥) يجمل قيم K_i, D_i, a_i, h_i لكل نوع من البضاعة:

جدول (٢, ٥) بيانات المثال (٢, ١٣)

a_i	D_i	h_i	K_i	نوع البضاعة i
١	٢	٠,٣	١٠	١
١	٤	٠,١	٥	٢
١	٤	٠,٢	١٥	٣

أوجد الكمية الاقتصادية للطلب لكل نوع من البضاعة ثم التكلفة الإجمالية المتغيرة لكل نوع.

الحل:

بوضع: $\lambda = 0$ نجد أوّلاً q_i دون قيد:

$$q_i = \sqrt{\frac{2K_iD_i}{h_i}} \quad , i = 1, 2, 3$$

ومنه: $q_1 = 11.54$، $q_2 = 20$، $q_3 = 24.49$.

بما أنّ: $\sum_{i=1}^{3} a_i q_i - A = 31.53 > 0$ فإن الحلول q_1, q_2, q_3 لا تحقق القيد المطلوب.

نعطي قيم متتالية موجبة لـ λ حتى نصل إلى قيمة لـ λ تجعل المقدار $\sum_{i=1}^{3} a_i q_i - A$ قريباً جداً من الصفر فنحصل على النتائج المجملة في الجدول (٢, ٦):

جدول (٢, ٦)

$\sum_{i=1}^{3} a_i q_i - A$	q_3	q_2	q_1	λ
١٢,٨٠	١٧,٣٢	١١,٥٤	٨,٩٤	٠,١
١,٤٥	١٢,٢١	٧,٥٥	٦,٦٦	٠,٣
−١,٣٦	١٠,٩٥	٦,٦٦	٦,٠٣	٠,٤

٠,٣٥	٦,٣٢	٧,٠٧	١١,٥٤	٠,٠٧- ≅ ٠

لاحظ أن إشارة المقدار $\sum_{i=1}^{3} a_i q_i - A$ قد تغيرت عندما انتقلنا من قيمة λ = ٠,٣ إلى قيمة λ = ٠,٤ ولذا فإن قيمة λ المطلوبة تقع بين ٠,٣ و ٠,٤ ولذا أخذنا القيمة ٠,٣٥ وهكذا نتابع اختيار قيم مناسبة بنفس الطريقة حتى نصل إلى قيمة لـ λ نجعل $\sum a_i q_i - A$ قريباً جداً من الصفر.

من الجدول لدينا $\lambda^* = 0.35$ فالحل الأمثل التقريبي لكل نوع هو:

$$q_3^* = 11.54\ ,\ q_2^* = 7.07\ ,\ q_1^* = 6.32$$

أما التكلفة الإجمالية المتغيرة لكل نوع من البضاعة تساوي:

$$VCU_1(q_1^*) = \frac{(0.3)(6.32)}{2} + \frac{(2)(10)}{6.32} = 4.11 \text{ ريال}$$

$$VCU_2(q_2^*) = \frac{(0.1)(7.07)}{2} + \frac{(4)(5)}{7.07} = 3.18 \text{ ريال}$$

$$VCU_3(q_3^*) = \frac{(0.2)(11.45)}{2} + \frac{(4)(15)}{11.54} = 6.35 \text{ ريال}$$

نلاحظ أنّ عملية إيجاد λ^* تتم بطريقة قد تكون متعبة وطويلة جداً وغير دقيقة أيضاً.

ولتفادي هذا الإشكال نستخدم الطريقة الجبرية كما يبيّن المثال التالي:

مثال (٢ ,١٣):

أجب على نفس سؤال المثال السابق وذلك باستخدام الطريقة الجبرية لإيجاد قيمة λ^*.

الحل:

نستخدم الطرق العددية لإيجاد الحل التقريبي للمعادلة التالية:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i q_i - A = 0$$

حيث:

$$q_i = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i + 2\lambda a_i}}\ , \qquad i = 1, 2, 3$$

لدينا إذاً: $q_1 = \sqrt{\frac{40}{(0.3)+2\lambda}}$ ، $q_3 = \sqrt{\frac{120}{(0.2)+2\lambda}}$ ، $q_2 = \sqrt{\frac{40}{(0.1)+2(\lambda)}}$ ،

فالقيد السابق يصبح:

$$\sqrt{\frac{40}{0.3+2\lambda}} + \sqrt{\frac{40}{0.1+2\lambda}} + \sqrt{\frac{120}{0.2+2\lambda}} - 25 = 0$$

باستخدام برامج كمبيوتر لحل المعادلات (كـ Matlab أو Maple أو أي برامج أخرى) نجد القيمة التقريبية التالية لـ λ^*:

$\lambda^* = 0.348$ ثم نعوض في قيم q_1 وq_2 وq_3 فنجد q_1^* و q_2^* و q_3^* كما يلي:

$q_1^* = 6.337$ و $q_2^* = 7.088$ و $q_3^* = 11.573$ ثم نعوض في قوانين التكاليف الإجمالية المتغيرة المثلى لكل نوع كما في المثال السابق.

تمارين

١ - يتم تخزين بضاعة في مستودع لمؤسسة تجارية. إذا علمنا أن عدد أنواع البضاعة هو ٣ وأنّ معدل الاستهلاك لكل نوع، وليكن D_i ثابت ومعلوم وأنّ المؤسسة لا تواجه أي عجز وأنّ التمويل بهذه البضاعة يكون لحظياً فأوجد الكمية الاقتصادية للطلب لكل نوع من البضاعة باستخدام المعطيات الموضحة في الجدول (٢, ٧):

جدول (٢, ٧) بيانات التمرين (١)

النوع	K_i	D_i	h_i	a_i
١	٥	٢	١	١
٢	٧	٣	١	٢
٣	٩	١	١	١

مع العلم أن A = ٣٠ وحدة مساحة. ثم احسب التكلفة الإجمالية في وحدة الزمن.

٢ - أجب على نفس التمرين السابق إذا كان A = ١٥ وحدة مساحة.

٣ - استخدم خطوات بناء نموذج الفقرة الحالية وقوانين الـ EOQ مع العجز لاستنتاج الكمية الاقتصادية للطلب في حالة نموذج متعدد الأنواع من البضاعة ومع العجز.

٤ - استخدم النتائج التي حصلت عليها في التمرين السابق لإيجاد الكمية الاقتصادية للطلب المخزون ذو البيانات المبينة في الجدول (٢, ٨):

جدول (٢, ٨)

نوع البضاعة	١	٢	٣
المعدل السنوي للطلب	١٠٠٠	٥٠٠٠	٤٠٠٠
تكلفة شراء الوحدة (ريال)	١,٥	٢,٥	٤
تكلفة تخزين الوحدة (ريال)	٠,٣	٠,٥	٠,٨
تكلفة الطلبية (ريال)	١٥	٢٥	٢٠
تكلفة العجز للوحدة (ريال)	١	١	١

مع العلم أن المبلغ المستثمر لا يتعدى الـ ٢٠٠٠ ريال.

(٢, ١١) بعض الملاحظات والنتائج حول نماذج الـ EOQ:

في هذه الفقرة سوف نستعرض بعض محاسن وعيوب نماذج الـ EOQ إضافة إلى شرح طريقة سهلة وبسيطة لمعرفة الحالات التي يمكن فيها تطبيق هذه النماذج.

محاسن نماذج الـ EOQ:

١ - نماذج الـ EOQ سهلة الشرح والاستخدام مقارنة بالنماذج الأخرى المعروفة.

٢ - أغلب نماذج الـ EOQ مستقرة ولا تتأثر بالتغيرات الصغيرة.

٣ - النتائج التي نحصل عليها باستخدام نماذج الـ EOQ في دراسة أنظمة المخزون لأنظمة لا تستعمل أي نماذج مخزون أخرى تكون دائماً أفضل بكثير من النتائج المعتادة.

عيوب نماذج الـ EOQ:

١ – لا يمكن استخدام نماذج الـ EOQ إذا كان معدل الاستهلاك D متغير (غير ساكن).

٢ – لا يمكن استخدام نماذج الـ EOQ في حالة عدم معرفة بعض المعطيات.

متى نستخدم نماذج الـ EOQ:

مثلما سبق وأن أشرنا فإن ثبات معدل الاستهلاك شرط ضروري لاستخدام نماذج الـ EOQ ولمعرفة ما إذا كان هذا الشرط محققاً أم لا نقوم في الاختبار التالي:

أولاً نأخذ معدلات الاستهلاك D_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ خلال n فترة زمنية، ثم نحسب متوسط معدلات الاستهلاك:

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$$

وتباين هذه المعدلات:

$$Var(D) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - \overline{D}^2$$

ثم نحسب بعد ذلك ما يسمى معامل الاختلاف (Coefficient of variation) والذي يعرف بالعلاقة:

$$CV = \frac{\sqrt{Var(D)}}{\overline{D}}$$

من الواضح أنّه إذا كان $CV = 0$ فإنّ D ثابت لكل فترة زمنية i.

وعادة ما نعتبر أن D ثابت إذا كان $CV < 0.2$ وللتوضيح نسوق المثال التالي:

مثال (٢ , ١٤):

تحقق في ما إذا كان معدل الاستهلاك ساكناً أم لا إذا علمنا أن معدّلات الاستهلاك D_i خلال ٩ فترات زمنية تساوي:

١٠٤، ١٠٢، ١١٠، ٨٩، ٩٥، ٩٩، ١٠٥، ١٠٢، ١٠٠

الحل:

$CV = 0.06$ ، $Var(D) = 36.5$ ، $\overline{D} = 100.667$

لدينا $CV < 0.2$ وبالتالي يمكن اعتبار معدل الاستهلاك في هذه الحالة ساكناً.

الفصل الثالث

نماذج المخزون الديناميكية

(٣ ,١) مقدمة

سنستعرض في هذا الفصل بعض نماذج المخزون التي يكون فيها معدل الاستهلاك (الطلب) معروف ومحدد ولكنه ليس ثابتاً بمرور الزمن وهو ما سبق وصنفناه في الفصل الأول «الطلب ديناميكي Dynamic Demand».

وسنقدم في الفقرة الأولى أنواع نماذج المخزون الديناميكية وهي التي يكون فيها الطلب ديناميكياً ولكنه ذو طبيعة منفصلة (القيم الممكنة هي أعداد صحيحة) وهذا النموذج هو واحد من نماذج المراجعة الدورية Periodic Review الذي سبقت الإشارة إليها في الفصل الأول. وفي نظام المخزون هذا ستتم تجزئة الفترة المعنية إلى عدة فترات جزئية يتسنى للنظام مراجعة مستوى المخزون عند بداية أو نهاية كل منها. ونظراً لأن حل مثل هذا النموذج سيكون باستخدام طريقة البرمجة الديناميكية (Dynamic Programming) فإننا سنقدم أولاً خلاصة لهذه الطريقة.

(٣ ,٢) طريقة الحل باستخدام البرمجة الديناميكية

تعتمد طريقة الحل بالبرمجة الديناميكية على مبدأ يسمى مبدأ الأمثلية (Principle of Optimality) وخلاصة هذه الطريقة هي تجزئة المسألة الأصلية إلى عدد من المسائل الجزئية ينظر إليها على أنها مراحل (Stages) وقد تكون هذه المراحل زمنية أو غير زمنية ولكن هذه المسائل الجزئية ليست مستقلة بعضها عن الأخرى بل هي مترابطة أو متشابكة ضمن شروط أو قيود المسألة الأصلية كما لو أنها سلسلة متصلة الحلقات. تقوم طريقة البرمجة الديناميكية بإيجاد الحل الأمثل لكل مرحلة (لكل مسألة جزئية) والتي تقود إلى الحل الأمثل للمسألة الأصلية ككل. وهناك طريقتان تتابعيتان لذلك:

الطريقة الأولى. الطريقة التقدمية (Forward Method): حيث تتابع الحلول من المرحلة الأولى (المسالة الجزئية الأولى) إلى المرحلة الأخيرة (المسالة الجزئية الأخيرة) والتي (أي المرحلة الأخيرة) تقود إلى الحل الأمثل للمسالة الأصلية ككل وذلك بالاستفادة من حلول المسائل (المراحل) الجزئية السابقة.

الطريقة الثانية. الطريقة التراجعية (Backward Method): وتتابع فيها الحلول من المرحلة الأخيرة (المسالة الجزئية الأخيرة) إلى المرحلة الأولى (المسألة الجزئية الأولى) والتي تقود (أي المرحلة الأولى) إلى الحل الأمثل للمسألة الأصلية ككل وذلك بالاستفادة من حلول المسائل (المراحل) الجزئية السابقة.

وسنوضح كيفية استخدام طريقة البرمجة الديناميكية في نموذج المخزون الثاني كواحدة من طريقتين يمكن استخدامهما في حل هذا النوع من نماذج المخزون.

(٣, ٣) نموذج مخزون ديناميكي لسلعة واحدة وعدة فترات
Single Item Multiperiod Dynamic Model

يقوم هذا النموذج على الفرضيات التالية:

١. فترة الدراسة محددة وتتقسم إلى عدد N من الفترات الجزئية (ليست بالضرورة متساوية) نرمز لها بالرموز 1، 2، ....، N.

٢. مقدار الاستهلاك (الطلب) لكل من الفترات الجزئية معروف ومحدد ولكن هذا المعدل يمكن أن يتغير من فترة لأخرى.

٣. عند الحاجة لإعادة تعبئة المخزون لأي فترة جزئية فإن هذه التعبئة تتم في بدايتها وعلى النظام صاحب الشأن أن يقرر عدد الوحدات المطلوبة (أو المنتجة) لكل من الفترات الجزئية.

٤. يمكن أن يتغير سعر الوحدة في كل فترة بتغير عدد الوحدات المطلوبة (أو المنتجة) في هذه الفترة.

٥. لا يسمح بوجود العجز في أي من الفترات الجزئية.

٦. من أجل فترة جزئية ما «i»؛ $(i = 1, 2, ..., N)$ نعرف ما يلي:

q_i: الكمية المطلوبة (أو المنتجة) في بداية الفترة (متغير قرار).

λ_i : كمية المخزون الداخلة في بداية الفترة وهي ما لم يتم استهلاكه في الفترة السابقة وبقيت مخزنة خلال الفترة (i - 1) لتتم الاستفادة منها في الفترة i.

d_i: مقدار الطلب (عدد الوحدات المطلوبة أو المستهلكة) في الفترة.

h_i: تكلفة تخزين الوحدة خلال الفترة i والتي سيستفاد منها في الفترة (i + 1).

k_i: تكلفة الطلبية (أو تحضيرها عندما يقوم النظام نفسه بعملية الإنتاج) الواحدة.

$p_i(q_i)$: الدالة التي تعبر عن سعر (أو تكلفة إنتاج) q_i من الوحدات (نذكّر بالفرضية ٤).

$B_i(\lambda_i, q_i)$: تمثل مجموع التكاليف خلال الفترة كدالة في كل من λ_i و q_i.

بناء النموذج: Model Building

وفقاً للتعاريف في ٦ أعلاه يمكننا بسهولة ملاحظة ما يلي:

إن عدد الوحدات λ_{i+1} الداخلة من الفترة i إلى الفترة i + 1 يعطى بـ:

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + q_i - d_i \qquad (١ ,٣)$$

وهو بالضبط عدد الوحدات الزائدة عن حاجة الفترة «i» وقد تم تخزينها خلال هذه الفترة لتتم الاستفادة منها خلال الفترة (i + 1). ولذا فإن تكلفة تخزين هذا العدد من الوحدات خلال الفترة i يساوي $h_i\lambda_{i+1}$ ونظراً لعدم السماح بالعجز بموجب الفرضية ٥ فإن:

$$B_i(\lambda_i, q_i) = \begin{cases} h_i(\lambda_i - d_i); & q_i = 0 \quad \text{عندما} \\ k_i + p_i(q_i) + h_i(\lambda_i + q_i - d_i); & q_i > 0 \quad \text{عندما} \end{cases} \qquad (٢ ,٣)$$

ومن جهة ثانية فإن λ_{i+1} و q_i تخضعان للقيود التالية:

$$0 \le \lambda_{i+1} \le d_{i+1} + \ldots.. + d_N \qquad (٣ ,٣)$$

ومن العلاقتين (٣ ,١) و (٣ ,٣) نجد:

$$d_i + \lambda_{i+1} \ge q_i \ge d_i - \lambda_i, q_i \ge 0 \qquad (٤ ,٣)$$

وتدل العلاقة (٣ ,٣) على أن كمية المخزون الداخلة في بداية الفترة (i+1) يمكن أن تكون كافية لتغطية الطلب من السلعة خلال هذه الفترة وجميع الفترات اللاحقة.

الآن لنعرف ما يلي:

$$C_i(\lambda_{i+1}) = \text{أقل تكلفة كلية للمخزون للفترات من } i \text{ إلى } N \qquad (٥ ,٣)$$

عندئذٍ

$C_N(\lambda_{N+1})$ = أقل تكلفة كلية للمخزون للفترة N (٦, ٣)

فإذا تمكنا من إيجاد $C_N(\lambda_{N+1})$ من العلاقة (٦, ٣) عندئذٍ يمكننا استخدام الصيغة التكرارية التالية:

$C_i(\lambda_{i+1})$ = أقل تكلفة كلية للمخزون من الفترة i إلى الفترة N-1 +

أقل تكلفة كلية للمخزون في الفترة N (٧, ٣)

عندئذٍ

$C_i(\lambda_2)$ = أقل تكلفة كلية لمخزون لجميع الفترات من 1 إلى N (٨, ٣)

وتمكننا العلاقات (٥, ٣)، (٦, ٣)، (٧, ٣) و (٨, ٣) من إيجاد أقل تكلفة كلية للمخزون من الفترة الأولى إلى الفترة N وذلك باستخدام الطريقة التراجعية لأسلوب البرمجة الديناميكية والمشار إليه أعلاه وسنوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (٣, ١):

أظهرت عملية مسح قام بها مصنع للتلفزيونات أن الطلب عليها ذو طبيعة موسمية (وليس منتظماً) ويقدر هذا الطلب بمقدار ٣٠٠٠٠ وحدة خلال فصل الخريف و ٢٠٠٠٠ وحدة خلال فصل الشتاء و ٣٠٠٠٠ وحدة خلال فصل الربيع و ٢٠٠٠٠ وحدة خلال فصل الصيف. ونظراً لتزايد الطلب على الموديلات الحديثة فقد اضطر المصنع لإعادة تصميم وإنتاج السماعات في هذه التلفزيونات الأمر الذي يضيف تكاليف للتحضير لإنتاج جديد. تقدر تكلفة إنتاج السماعة الواحدة بدولار واحد أما تكلفة تخزينها خلال كل فصل من الفصول الأربعة فتقدر بـ ٠٫٢ دولار. تتم عملية إنتاج السماعات على دفعات مقدارها ١٠٠٠٠ سماعة للدفعة في الفصل الذي يسبق فصل الاحتياج (مثلاً يتم إنتاج المطلوب في فصل الخريف خلال فصل الصيف) بتكلفة تحضير قدرها ٢٠٠٠٠ دولار لكل عملية إنتاج.

ونظراً لسهولة تركيب السماعة في أي جهاز تلفزيوني ونظراً لإمكانية إنتاج أعداد كبيرة من هذه السماعات في فترة زمنية قصيرة فإنه يمكن النظر إلى أن عملية إنتاج وتركيب هذه السماعات بأنها فورية (أي أنه لا يسمح بوجود العجز). ترغب إدارة المصنع في معرفة عدد الدفعات (من السماعات) التي ستنتجها في كل فصل من فصول السنة والتي تجعل التكلفة الكلية السنوية

للمخزون أقل ما يمكن مع افتراض أن مستوى المخزون يصل للصفر في نهاية الفترة الأخيرة ويبدأ بالصفر في بداية الفترة الأولى.

الحل:

وفقاً للبيانات المعطاة في المثال لدينا لنعتبر أن كل ١٠٠٠٠ هي وحدة واحدة عندئذٍ

k_i = ٢ دولار لكل عملية إنتاج في أي من فصول السنة (في أي من الفترات الأربع).

p_i = ١ دولار لكل دفعة منتجة و h_i ٠,٢ دولار للدفعة المنتجة (i = ١، ٢، ٣، ٤).

وكذلك فإن الطلب مقدراً بالدفعات (نذكّر بأن كل دفعة هي ١٠٠٠٠ سماعة) فهو كالتالي: d_1 = ٣ (بافتراض أن فصل الخريف هو الفترة الأولى)، d_2 = ٢، d_3 = ٣ و d_4 = ٢.

سنقوم الآن بإيجاد الحل الأمثل للمصنع بالطريقة التراجعية للبرمجة الديناميكية مستفيدين من اشتراط أن مستوى المخزون في نهاية الفترة الأخيرة هو الصفر.

المرحلة الرابعة. وتقابل الفترة الرابعة (فصل الصيف):

بما أن مستوى المخزون في نهاية هذه الفترة هو الصفر لذا فإن λ_5 = ٠ ومن العلاقة (٣, ٦) لدينا $C_4(\lambda_5)$ = أقل تكلفة للمخزون في الفترة ٤ = أقل قيمة للدالة

$$B_4(\lambda_4, q_4) = \begin{cases} h_4(\lambda_4 - d_4) & q_4=0 \text{ عندما} \\ h_4(\lambda_4 + q_4 - d_4) + p_4(q_4) + k_4 & q_4>0 \text{ عندما} \end{cases}$$

حيث $\lambda_5 = 0$ و $0 \le q_4$

بما أن $\lambda_5 = \lambda_4 + q_4 - d_4 = 0$، $d_4 = 2$ فإن $q_4 \ge 0$ تقتضي أن $q_4 = 2 - \lambda_4 \ge 0$ أو $\lambda_4 \le 2$ ومن (٣, ٣) $\lambda_4 \ge 0$ لذا فإن القيم الممكنة لـ λ_4 هي $\lambda_4 = 0,1,2$ وبما أن $\lambda_4 + q_4 - d_4 = \lambda_5 = 0$ فإن $q_4 = d_4 - \lambda_4$ ولذا فإن قيم q_4 المقابلة لقيم λ_4 هي $q_4 = 0, 1, 2$ على الترتيب.

جدول (٣, ١)

q_4^*	$C_4(\lambda_5)$	q_4	λ_4
	٤	٢	٠
	٣	١	١
٠	٠	٠	٢

وبإجراء الحسابات نجد النتائج الملخصة في الجدول (١، ٣) فمثلاً من أجل $0<q_4=2$، و $\lambda_4 = 0$ علينا تطبيق السطر الثاني من عبارة $B_4\,(\lambda_4, q_4)$ فنجد أن

$$B\,(\lambda_4= 0, q_4=2) = 0.2\,(0+2-2) + 1\,(2) + 2 = 4$$

وعمود q_4^* المبينة في الجدول (١، ٣) تعني أن أصفر قيمة لـ $C_4(\lambda_5)$ تقع عندما $q_4=0$ المقابلة لـ $\lambda_4=2$.

المرحلة الثالثة (فصل الربيع): حسب العلاقات (٣، ٥) إلى (٣، ٧) لدينا:

$C_3(\lambda_4)=$ أقل تكلفة للمخزون في الفترة ٣ + أقل تكلفة للمخزون في الفترة ٤.

= أقل قيمة للدالة $B_3(\lambda_3, q_3)$ + أقل قيمة للدالة $C_4(\lambda_5)$.

ولإيجاد فترات تغير كل من q_3, λ_3 لدينا العلاقة (٣، ٤).

$$3 + \lambda_4 \geq q_3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad d_3+\lambda_4 \geq q_3 \geq 0$$

ونظراً لأن أكبر قيمة لـ λ_4 هي ٢ فإن أكبر قيمة ممكنة لـ q_3 هي ٥ وبالتالي $q_3=$ ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥ أما القيم المقابلة لـ λ_4 فنجدها من

$$0 \leq \lambda_3 \leq 5 - q_3 \Leftrightarrow 0 \leq \lambda_3 \leq d_3 + 2 - q_3 \Leftrightarrow 0 \leq \lambda_4 = \lambda_3 + q_3 - d_3 \leq 2$$

ولما كانت أصغر قيمة لـ q_3 هي الصفر وأكبر قيمة لـ q_3 هي ٥ فإن $0\leq\lambda_3\leq5$ وبإجراء الحسابات والاستفادة من نتائج المرحلة الرابعة نحصل على النتائج الملخصة في الجدول (٣، ٢) التالي:

جدول (٣، ٢)

λ_3 \ q_3	٠	١	٢	٣	٤	٥	$C_3(\lambda_4)$	q_3^*
٠	-(*)	-	-	٤+٥	٣+٦,٢	٠+٧,٤	٧,٤	٥
١	-	-	٤+٤	٣+٥,٢	٠+٦,٤	-	٦,٤	٤
٢	-	٤+٣	٣+٤,٢	٠+٥,٤	-	-	٥,٤	٣
٣	٤+٠	٣+٣,٢	٠+٤,٤	-	-	-	٤,٠	٠
٤	٣+٠,٢	٠+٣,٤	-	-	-	-	٣,٢	٠
٥	٠+٠,٤	-	-	-	-	-	٠,٤	٠

(*) العلاقة (-) في هذا الحقل تعني أنه لا توجد قيمة لـ $C_3\,(\lambda_4)$ وذلك لأنه من أجل $\lambda_3=q_3=0$ تكون $\lambda_4=0+0-3=-3$ وهي قيمة غير ممكنة لـ λ_4 وهكذا تعطي العلامات (-) تفسيراً مماثلاً في جميع الجداول.

المرحلة الثانية (فصل الشتاء): هنا لدينا:

$C_2(\lambda_3)$ = أقل تكلفة للمخزون في الفترة ٢ + أقل تكلفة للمخزون في الفترة ٣ والفترة٤.

= أقل قيمة للدالة $B_2(\lambda_2, q_2)$ + أقل قيمة للدالة $C_3(\lambda_4)$.

ولإيجاد فترات تغير كل من λ_2, q_2 لدينا من العلاقة (٣ ,٤):

$$2+\lambda_3 \geq q_2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad d_2+\lambda_3 \geq q_2 \geq 0$$

ومـــن المرحلـــة الســـابقة؛ أكـــبر قيمـــة لــــ λ_3 هـــي ٥ لـــذا فـــإن $7 \geq q_2 \geq 0$ أي $q_2=0,1,2,3,4,5,6,7$ أما قيم λ_2 المقابلة فنجدها من العلاقة

$$0 \leq \lambda_2 \leq 7-q_2 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq \lambda_2 \leq d_2+5-q_2 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq \lambda_3 = \lambda_2+q_2-d_2 \leq 5$$

ونظراً لأن أصغر قيمة لـ q_2 هي الصفر فإن $0 \leq \lambda_2 \leq 7$ وبإجراء الحسابات والاستفادة من المرحلة الثالثة نحصل على النتائج الملخصة في الجدول (٣ ,٣) التالي:

جدول (٣ ,٣)

λ_2 \ q_2	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	$C_2(\lambda_3)$	q_2^*
٠	-	-	٦,٤+٤	٥,٤+٥,٢	٥,٤+٦,٤	٤+٧,٦	٣,٢+٨,٨	٠,٤+	١٠,٤	٧
١	-	٧,٤+٣	٦,٤+٤,٢	٥,٤+٥,٤	٤+٦,٦	٣,٢+٧,٨	٠,٤+٩	-	٩,٤	٦
٢	٧,٤+٠	٦,٤+٣,٢	٥,٤+٤,٤	٤+٥,٦	٣,٢+٦,٨	٠,٤+٨	-	-	٧,٤	٠
٣	٦,٤+٠,٢	٥,٤+٣,٤	٤+٤,٦	٣,٢+٥,٨	٠,٤+٧	-	-	-	٦,٦	٠
٤	٥,٤+٠,٤	٤+٣,٦	٣,٢+٤,٨	٠,٤+٦	-	-	-	-	٥,٨	٠
٥	٤+٠,٦	٣,٢+٣,٨	٠,٤+٥	-	-	-	-	-	٤,٦	٠
٦	٣,٢+٠,٦	٠,٤+٤	-	-	-	-	-	-	٤	٠
٧	٠,٤+١	-	-	-	-	-	-	-	١٤	٠

المرحلة الأولى (فصل الخريف): هنا لدينا

$C_1(\lambda_2)$= أقل تكلفة للمخزون في الفترة ١+ أقل تكلفة للمخزون من الفترة ٢ حتى الفترة ٤.

= أقل قيمة للدالة $B_1(\lambda_1, q_1)$ + أقل قيمة للدالة $C_2(\lambda_3)$.

ومن العلاقة (٣ ,٤) نجد أن:

$d_1+\lambda_2 \geq q_1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 3+\lambda_2 \geq q_1 \geq 0$ ولكن يجب أن يكون $q_1 \geq d_1=3$.

ومـن المرحلـة السـابقة نجـد أن أكـبر قيمـة لـ λ_2 هـي ٧ لـذا فـإن $10 \geq q_1 \geq 3$. ونظراً لأن مستوى المخزون في بداية الفترة الأولى يساوي الصفر فإن $\lambda_1=0$، وبإجراء الحسابات والاستفادة

مـــن نتـــائج الجـــدول (٣, ٣) نجـــد أن نتـــائج هـــذه المرحلـــة ملخصـــة كمـــا في الجـــدول (٣, ٤) التالي:

جدول (٣, ٤)

q_1 / λ_1	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	$C_1(\lambda_2)$	q_1^*
٠	١٠,٤+٥	٩,٤+٦,٢	٧,٤+٧,٤	٦,٦+٨,٦	٥,٨+٩,٨	٤,٦+١١	١,٤+١٢,٢	١,٤+١٣,٤	١٤,٨	٥ أو ١٠

ولإيجاد الحل الأمثل: نجد من الجدول (٣, ٤) وجود حلين أمثليين:

الحل الأول: $\lambda_1^* = 0, q_1^* = 5$ ومن العلاقة $\lambda_2^* = \lambda_1^* + q_1^* - d_1$ نجد $\lambda_2^* = 0 + 5 - 3 = 2$ بالرجوع إلى الجدول (٣, ٣) نجد من أجل $\lambda_2=2$ أن $q_2^* = 0$ ومن العلاقة $\lambda_3=\lambda_2+q_2-d_2$ نجد $\lambda_3^* = 2 + 0 - 2 = 0$ ومن الجدول (٣, ٢) نجد أنه من أجل $\lambda_3=0$ فإن $q_3^* = 5$ ومن العلاقة $\lambda_4= \lambda_3+q_3-d_3$ نجد أن $\lambda_4^* = 0 + 5 - 3 = 2$ وبالرجوع إلى الجدول (٣, ١) نجد أنه من أجل $\lambda_4=2$ فإن $q_4^* = 0$. فالحل الأمثل الأول هو:

$q_4^* = 0, q_3^* = 5, q_2^* = 0, q_1^* = 5$ ومـــن الجـــدول (٣, ٤) نجـــد أن أقـــل تكلفـــة كليـــة للمخـــزون في الفـــترات (الفصـــول) الأربعـــة تســـاوي 14.8×10000 $C_1(\lambda_2)=\$$ أو $C_1(\lambda_2)=\$148000$.

والحـل الأمثـل الثـاني هـو $q_1^* = 10$ و $\lambda_1^* = 0$: بطرق مماثلة يمكننا بسهولة أن نجد أن $\lambda_2^* = 0 + 10 - 3 = 7$ و $q_2^* = 0$، $\lambda_3^* = 7 + 0 - 2 = 5$ و $q_3^* = 0$، $\lambda_4^* = 5 + 0 - 3 = 2$ و $q_4^* = 0$، وكـذلك فـإن أقـل تكلفـة كليـة للمخـزون نجـدها مـن الجـدول (٣, ٤) معطـاة بـ $C_1(\lambda_2)$ = ١٤٨٠٠٠ دولار.

والحلـين أعـلاه يعنيـان أن أمـام المصـنع خيـارين، فإمـا أن ينـتج في بدايـة الفـترة الأولى ٥ دفعات من السماعات (كل دفعة ١٠٠٠٠ سماعة) وهذه تكفي للفترتين الأولى والثانية ثم ينتج ٥ دفعـات جديـدة في بدايـة الفـترة الثالثـة وهـذه تكفـي للفـترتين الثالثـة والرابعـة أو أن ينـتج ١٠ دفعات في بداية الفترة الأولى وهذه تكفي الاحتياج من السماعات في الفترات الأربع. وفي كلا الحالتين ستبلغ التكلفة الكلية للمخزون أقل قيمة لها وهي $C_1(\lambda_2)$ = ١٤٨٠٠٠ دولار.

ملاحظات (٣ ,١):

أ – يمكننا حل المثال أعلاه بالطريقة التقدمية (Forward Method) للبرمجة الديناميكية وفي هذه الحالة نحتاج إلى تعريف ما يلي:

$C_i\ (\lambda_{i+1})$ = أقل تكلفة كلية للمخزون للفترات من ١ إلى i. (٩, ٣)

$C_1(\lambda_2)$ = أقل تكلفة للمخزون في الفترة ١. (١٠, ٣)

وبالتالي يمكن استخدام الصيغة التكرارية التالية:

$C_i\ (\lambda_{i+1})$ = أقل تكلفة للمخزون في الفترة ١ +

أقل تكلفة للمخزون للفترات من ٢ إلى i. (١١, ٣)

$C_i\ (\lambda_{N+1})$ = أقل تكلفة للمخزون للفترات من ١ إلى N. (١٢, ٣)

وهنا نستفيد من الخاصية أن $\lambda_1=0$ للبدء بحساب $C_1(\lambda_2)$ ثم $C_2(\lambda_3)$ ثم $C_3(\lambda_4)$ ثم $C_4(\lambda_5)$ والتي توصلنا (أي $C_4(\lambda_5)$) إلى الحل الأمثل.

ب . بفحص النتائج الحسابية للمثال (٣ ,١) أعلاه نلاحظ أن حجم هذه الحسابات يعتمد بالدرجة الأولى على القيم الممكنة للطلب d_i في الفترة «i» ففي مثالنا أعلاه فبما أن إنتاج السماعات كان على دفعات قدرها ١٠٠٠٠ سماعة للدفعة فقد قلل ذلك من القيم الممكنة لكل من d_1, d_2, d_3, d_4 الأمر الذي أدى بدوره إلى جعل حجم الحسابات الكلي في المثال صغير نسبياً، ولكن لو أن القيم الممكنة لواحدة أو أكثر من d_i $(i=1,2,3,4)$ كان كبيراً فإن حجم الحسابات الناتجة سيكون كبيراً لدرجة يصعب معها عملياً استخدام أي من طريقتي البرمجة الديناميكية ولابد لنا عندها من إيجاد طريقة أخرى أكثر ملائمة وهذا ما سنوضحه من خلال الخوارزمية التالية.

(٣ ,٤) خوارزمية واجنر – وايتن

Wagner - Whitin Algrithm

تقوم هذه الخوارزمية بإيجاد الحل الأمثل لمسائل المخزون التي يكون فيها الطلب ديناميكياً ولكنه يأخذ قيماً صحيحة خلال فترة زمنية منتهية ومحددة مسبقاً. وتشترط هذه الخوارزمية ما يلي:

(١) تتألف الفترة الزمنية من عدد N من الفترات الزمنية الجزئية معروفة ومحددة مسبقاً سنرمز لها بـ $1, 2, ..., N$.

(٢) الاحتياج (الطلب) للفترة الجزئية «i» وليكن d_i معروف ومحدد وتجب تلبيته في الوقت المحدد.

(٣) يتم طلب أي طلبية بطريقة تسمح بوصولها في بداية إحدى الفترات الجزئية.

(٤) تهدف الخوارزمية إلى تحديد الكميات المطلوبة (أو المنتجة) للفترات N ,...,$1, 2$ والتي سنرمز لها بالرموز $q_1, q_2,...,q_N$ على الترتيب والتي تجعل التكلفة الكلية للمخزون أقل ما يمكن.

تعتمد خوارزمية **واجنر – وايتن** على العديد من النظريات التي تؤدي إلى تسهيل العمليات الحسابية والتي تقود بدورها إلى الحل الأمثل وتتلخص الإجراءات الرئيسة لهذه الخوارزمية بالخطوتين الرئيسيتين التاليتين:

خطوة (١): احسب التكلفة الكلية للمخزون لجميع الفترات N ,... ,$1, 2$ ولكافة البدائل المختلفة لإمكانيات الطلب (أو الإنتاج).

لنلاحظ هنا أنه يمكن إسقاط ثمن الشراء (أو تكلفة الإنتاج) من حساب التكلفة الكلية للمخزون. ذلك لأنه في أي سياسة تخزينية مثلى سيتم شراء (أو إنتاج) ما مقداره $d_1+d_2+....+d_N$. لنعرف C_{ij} بأنها التكلفة الكلية من الفترة «i» إلى الفترة «j» عندما يتم طلب طلبية في بداية الفترة «i» تكون كافية لتغطية الاحتياج من الفترة «i» إلى الفترة «j» ولنعرف كذلك K تكلفة الطلب (أو التحضير) لطلبية واحدة h تكلفة تخزين وحدة واحدة لفترة واحدة. عندئذٍ:

$$C_{ij} = K + h\sum_{l=i}^{l=j}\left[Q_{ij} - Q_{il}\right] \qquad (١٣, ٣)$$

حيث:

$$Q_{ij}= d_i+ d_{i+1}+... + d_j$$
$$Q_{il}= d_i+ d_{i+1}+... + d_l$$
$$l \le i \le j \le N$$

خطوة (٢): لنعرف f_j بما يلي:

f_j أقل تكلفة كلية ممكنة للفترات $1, 2, ..., j$. معتبرين أن مستوى المخزون في نهاية الفترة j يساوي الصفر. (١٤, ٣)

عندئذٍ نجد:

f_j = أقل قيمة للمقدار $(f_{j-1} + C_{ij})$ (٣ ,١٥)

ولذلك فإن السياسة التخزينية المثلى هي تلك السياسة المقابلة لـ f_N الذي يُعطى بموجب العلاقة (٣ ,١٤) بما يلي:

f_N = أقل تكلفة كلية للمخزون للفترات $1, 2, ...N$. معتبرين أن مستوى المخزون في نهاية الفترة N يساوي الصفر. (٣ ,١٦)

والترجمة العملية لطريقة تطبيق هذه الخوارزمية هي على النحو التالي:

لنفرض أن الفترة الزمنية المحددة هي ستة أشهر تبدأ من بداية الشهر الأول يناير (كانون الثاني) إلى نهاية الشهر السادس يونيو (حزيران) من العام عندئذ نحسب التكلفة الكلية كما يلي:

التكلفة الكلية للطلب الذي يغطي احتياج الشهر الأول معتبرين أن هذه كامل الطلبية التي تغطي احتياج هذا الشهر تصل في بدايته ثم نمدد الفترة شهراً بشهر فنحسب التكلفة الكلية للطلب الذي يغطي احتياج الشهرين الأول والثاني معتبرين أن كامل الطلبية التي تغطي هذا الاحتياج تصل في بداية الشهر الأول وهكذا حتى نحصل على جميع المقادير:

$C_{16}, C_{15}, C_{14}, C_{13}, C_{12}, C_{11}$.

ثم نحسب C_{22} وهي التكلفة الكلية للطلب الذي يغطي احتياج الشهر الثاني معتبرين أن كامل الطلبية التي تغطي احتياج هذا الشهر تصل في بدايته ثم نمدد الفترة شهراً بشهر فنحسب $C_{23}, ..., C_{26}$وهكذا نحسب C_{33} إلى C_{36} وC_{44} إلى C_{46} وC_{55} إلى C_{56} وأخيراً C_{66} ثم نطبق العلاقة (٣ ,١٥) لجميع البدائل الممكنة.

ولنوضح ذلك بالمثال التالي:

مثال (٣ ,٢):

لنفرض أن الطلب على نوع معين من الأجهزة الكهربائية كما في الجدول (٣ ,٥):

جدول (٣ ,٥)

الشهر	١	٢	٣	٤	٥	٦
مقدار الطلب بالوحدة	٧٥	٠	٣٣	٢٨	٠	١٠

إذا علمت أن تكلفة الطلب الواحد هي K= ١٠٠٠دولار وأن تكلفة تخزين الجهاز الواحد في الشهر هي h = ١٠ دولار.

باستخدام خوارزمية **واجنر – وايتن**، أوجد الكميات المثلى $q_1, q_2, \ldots, q_6$ التي تجعل التكلفة الكلية للمخزون أقل ما يمكن.

الحل:

من العلاقة (٣, ١٣) نجد أن (نذكر بتعريف $d_i + \ldots d_j = Q_{ij}$).

$$C_{11} = K + h\,[Q_{11} - Q_{11}] = 1000 + 10\,(75 - 75) = 1000$$

$$C_{12} = K + h\sum_{\ell=1}^{\ell=2}[Q_{12} - Q_{1\ell}] = 1000 + 10[(75 - 75) + (75 - 75)] = 1000$$

$$C_{13} = K + h\sum_{\ell=1}^{\ell=3}[Q_{13} - Q_{1\ell}] = 1000 + 10[(108 - 75) + (108 - 75) + (108 - 108] = 1660$$

وبطريقة مماثلة نجد $C_{14} = 2500$ و$C_{15} = 2500$ و $C_{16} = 3000$.

وتعطى قيم C_{11} إلى C_{16} في السطر الأول من الجدول أدناه.

كذلك فإن:

$$C_{22} = K + h\sum_{\ell=2}^{\ell=2}[Q_{22} - Q_{22}] = 1000 + 10(0 - 0) = 1000$$

$$C_{23} = K + h\sum_{\ell=2}^{\ell=3}[Q_{23} - Q_{2\ell}] = 1000 + 10[(33 - 0) + (33 - 33)] = 1330$$

وبالمثل نجد: $C_{24} = 1890$ و$C_{25} = 1890$ و $C_{26} = 2290$.

وتعطى C_{22} إلى C_{26} في السطر الثاني من الجدول (٣, ٥) أدناه.

وكذلك فإن بقية C_{ij} $(i = 3, 4, 5, 6)$ يمكن أن تحسب من (٣, ١٣) ونتائجها معطاة في الأسطر ٣، ٤، ٥، ٦ من الجدول (٣, ٦) أدناه.

جدول (٣، ٦) (الأرقام بداخل الجدول تمثل قيم Cij حيث $1 \le i \le j \le 6$)

i \ j	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	١٠٠٠	١٠٠٠	١٦٦٠	٢٥٠٠	٢٥٠٠	٣٠٠٠
٢	—	١٠٠٠	١٣٣٠	١٨٩٠	١٨٩٠	٢٢٩٠
٣	—	—	١٠٠٠	١٢٨٠	١٢٨٠	١٥٨٠
٤	—	—	—	١٠٠٠	١٠٠٠	١٢٠٠
٥	—	—	—	—	١٠٠٠	١١٠٠
٦	—	—	—	—	—	١٠٠٠

ويمكن تجميع نتاج الجدول (٣، ٦) بحيث نحصل منها على التكاليف الدنيا فيما لو تمت الطلبية في فترة تالية. فمثلاً لو أضفنا أصغر رقم في العمود الأول وهو ١٠٠٠ إلى جميع عناصر السطر الثاني فإن النواتج تمثل التكاليف السابقة مضافاً إليها أقل تكلفة للفترة، حيث نجده:

١٠٠٠ + ١٠٠٠ = ٢٠٠٠ تمثل أقل تكلفة للفترة الأولى والثانية، ١٠٠٠+١٣٣٠= ٢٣٣٠ تمثل أقل تكلفة للفترة الأولى والثانية والثالثة ... و١٠٠٠ + ٢٢٩٠ = ٣٢٩٠ تمثل أقل تكلفة للفترات من ١ إلى ٦ وبذلك تصبح عناصر الأعمدة بعد الإضافات هي كما في الجدول (٣، ٧) التالي:

جدول (٣، ٧)

i \ j	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	١٠٠٠	١٠٠٠	١٦٦٠	٢٥٠٠	٢٥٠٠	٣٠٠٠
٢	—	٢٠٠٠	٢٣٣٠	٢٨٩٠	٢٨٩٠	٣٢٩٠
٣	—	—				

ثم نأخذ أصغر رقم (أقل تكلفة) في العمود ٢ من الجدول الأخير ونضيفه إلى عناصر السطر الثالث من الجدول (٣، ٦) فتصبح النواتج الجديدة لهذا السطر مقابل الأعمدة ٣، ٤ ،٥، ٦ هي ٢٠٠٠، ٢٢٨٠، ٢٢٨٠، ٢٥٨٠، على الترتيب وتصبح نواتج العمود الثالث الجديد مقابل الأسطر

١، ٢، ٣، هي ١٦٦٠، ٢٣٣٠، ٢٠٠٠ وأقلها (أقل التكاليف) هو ١٦٦٠. نقوم بإضافة ١٦٦٠ إلى عناصر السطر الرابع من الجدول (٣ ,٦) ثم نضيف أقل رقم من العمود الرابع الجديد إلى عناصر السطر الخامس من الجدول (٣ ,٦) وأخيراً نضيف أقل رقم من العمود الخامس الجديد إلى عناصر السطر السادس وبذلك نحصل على الجدول المتجمع التالي جدول (٣ ,٨):

جدول (٣ ,٨)

i \ j	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	١٠٠٠	١٠٠٠	١٦٦٠	٢٥٠٠	٢٥٠٠	٣٠٠٠
٢	—	٢٠٠٠	٢٣٣٠	٢٨٩٠	٢٨٩٠	٣٢٩٠
٣	—	—	٢٠٠٠	٢٢٨٠	٢٢٨٠	٢٥٨٠
٤	—	—	—	٢٦٦٠	٢٦٦٠	٢٨٦٠
٥	—	—	—	—	٣٢٨٠	٣٢٨٠
٦	—	—	—	—	—	٣٢٨٠
f_j	١٠٠٠	١٠٠٠	١٦٦٠	٢٢٨٠	٢٢٨٠	٢٥٨٠

إن قيمة f_j في السطر الأخير من الجدول (٣ ,٧) الأخير هي تلك المعرفة بالعلاقة (٣ ,١٤) وقد وصلنا إليها بتطبيق العلاقة (٣ ,١٥). ويمكننا إيجاد الحل الأمثل من الجدول (٣ ,٧) وذلك من خلال قيم f_j على النحو التالي:

نختار أقل رقم في العمود الأخير من الجدول (٣ ,٧) وهي f_j = ٢٥٨٠ فنجد أنه أتى من السطر الثالث لهذا الجدول. وبفحص نتائج السطر الثالث نجد التكلفة الأقل ٢٨٥٠ تعني أن الطلب يجب أن يتم في بداية الفترة الثالثة وبحيث يكفي احتياج هذه الفترة وجميع الفترات اللاحقة أي أنه يجب أن يتم طلب: ١٠ + ٠ + ٢٨ + ٣٣ = ٧١ وحدة في بداية الفترة الثالثة. ثم ننتقل إلى العمود الذي يسبق عمود الفترة الثالثة أي العمود الثاني فنجد أن أقل قيمة فيه هي f_j = ١٠٠٠ تقع في السطر الأول وهذا يعني أن علينا طلب الكمية اللازمة لتغطية احتياج الفترة الأولى والثانية والتي تساوي ٠+٧٥ = ٧٥ وحدة في بداية الفترة الأولى. والخلاصة فإن الحل الأمثل هو ما يلي:

نطلب ٧٥ وحدة في بداية الفترة الأولى لتغطية احتياج الفترتين الأولى والثانية ثم نطلب ٧١ وحدة في بداية الفترة الثالثة لتغطية احتياج هذه الفترة والفترات اللاحقة وتكون أقل تكلفة كلية لهذا الحل مساوية ٢٥٨٠ دولار.

ملاحظة (٣, ٢):

ومن الجدير هنا أن نلاحظ أنه يصعب من الناحية العملية أن نحل المثال أعلاه بأسلوب البرمجة الديناميكية وذلك لأن القيم لـ d_6, d_4, d_3, d_1 هي:

$d_1 = 0, 1, 2, \ldots, 75$ و $d_3 = 0, 1, 2, \ldots, 33$ و $d_4 = 0, 1, 2, \ldots, 28$ و $d_6 = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

ومع ذلك يمكننا القول بأن حجم الحسابات اللازم باستخدام خوارزمية **واجنر – وايتن** ليس بالقليل وخاصة إذا كان عدد فترات الدراسة كبيراً. وفي ما يلي سنقدم طريقة استكشافية يمكن أن توصل إلى الحل الأمثل بقدر أقل من الحسابات مقارنة مع أسلوب البرمجة الديناميكية أو خوارزمية **واجنر – وايتن** وتنسب هذه الطريقة إلى **سلفر وميل**.

(٣, ٥) استكشافية سلفر – ميل
Silver - Meal Heuristic

كما في خوارزمية **واجنر – وايتن** فإن نقسم فترة الدراسة إلى عدد n من الفترات الجزئية فلو اعتمدنا نفس التسميات الواردة في خوارزمية **واجنر – وايتن** ونفس الفرضيات فإن استكشافية **سلفر – ميل** تعتمد على التحليل التالي.

إذا افترضنا أنه تم طلب (أو إنتاج) طلبية في بداية الفترة الأولى بحيث تكون كافية لتغطية احتياج الفترات T ,....,1, 2 فإن معدل التكلفة الكلية Total Cost اختصاراً TC للفترة الواحدة من الفترات T ,... ,1, 2 يساوي:

$$\frac{\text{تكلفة الطلب (أو التحضير) + تكلفة التخزين من بداية الفترة ١ حتى نهاية الفترة } T}{\text{عدد الفترات } (= T)} \qquad (١٧, ٣)$$

ومن الواضح أن النتيجة في (٣, ١٧) تعتمد على T. وبالرموز لدينا:

$$\frac{TC(T)}{T} = \frac{K + h(d_2 + d_3 + \ldots + d_T)}{T} \qquad (١٨, ٣)$$

والهدف الرئيس هنا هو إيجاد قيمة T التي تجعل $\frac{TC(T)}{T}$ المعطاة في (٣, ١٨) أقل ما يمكن. ولذلك فإن هذه الاستكشافية تعمل كما يلي:

نبدأ بحساب $\frac{TC(T)}{T}$ للفترة الأولى ثم نمدد الحساب فترة بفترة حتى نصل إلى الفترة التي تبدأ فيها $\frac{TC(T)}{T}$ بالتزايد أي حتى نصل إلى الفترة T + 1 التي يكون من أجلها:

$$\frac{TC(T+1)}{T+1} > \frac{TC(T)}{T} \qquad (٣, ١٩)$$

عندها نطلب كمية مقدارها $(d_1 + d_2 + \dots\dots + d_T)$ في بداية الفترة الأولى لتغطية احتياج الفترات T .... 1, 2, ثم نكرر العمل ابتداءً من الفترة T + 1 حتى نصل إلى تغطية احتياج جميع الفترات المطلوبة.

وسنوضح طريقة عمل هذه الاستكشافية من خلال إعادة حل المثال (٣, ٢) وذلك لغرض المقارنة في حجم الحسابات بينها وبين خوارزمية **واجنر – وايتن**.

مثال (٣, ٣):

بالعودة إلى نفس البيانات في المثال (٣, ٢) أعلاه أوجد الحل الأمثل باستخدام استكشافية **سلفر – ميل**.

الحل:

باستخدام العلاقة (٣, ١٨) نجد أن النتائج كما في الجدول (٣, ٩) التالي:

جدول (٣, ٩)

الفترة T	الطلب d_T	التكلفة الكلية المتجمعة TC(T)	معدل التكلفة للفترة TC(T)/T	المؤشر
1	75	1000	1000/1 = 1000	
2	0	1000	1000/2 = 5000	
3	33	1660	1660/3 = 550.33	بداية التزايد
3	33	1000	1000/1 = 1000	
4	28	1280	1280/2 = 640	
5	0	1280	1280/3 = 426.7	
6	10	1580	1580/3 = 390	

نلاحظ من الجدول (٣, ٩) أن معدل التكلفة TC(T)/T بدأ بالتزايد ثانية عند الفترة الثالثة ولذا فإن استكشافية **سلفر – ميل** تعني أنه يجب طلب ما يكفي الفترة الأولى والثانية في بداية الفترة الأولى ومقداره $d_1 + d_2 =$ ٧٥ وحدة ثم البدء من جديد بتطبيق الاستكشافية اعتباراً من بداية الفترة الثالثة فنجد أن معدل التكلفة TC(T)/T استمر في التناقص حتى نهاية الفترة الأخيرة وهذا يعني وجوب طلب $d_3 + d_4 + d_5 + d_6 =$ ٧١ وحدة لتغطية احتياج الفترات من ٣ إلى ٦. والتكلفة الكلية الدنيا لذلك كما وجدناها في المثال السابق تساوي ٢٨٥٠ دولار.

وكما هو ملاحظ فإن حجم الحسابات باستخدام استكشافية **سلفر – ميل** هو أقل بكثير منه باستخدام خوارزمية **واجنر – وايتن**، إلا أن العيب الرئيس لهذه الاستكشافية أنها بشكل عام وبغض النظر عن النتائج أعلاه تعطي حلاً أمثلياً تقريبياً (قيمة صغرى محلية للتكلفة الكلية) ولا تضمن حلاً أمثلياً دقيقاً (قيمة صغرى مطلقة للتكلفة الكلية).

(٣, ٦) نموذج جدولة الإنتاج لسلعة واحدة خلال عدة فترات

يقدم هذا النموذج طريقة لجدولة الإنتاج لسلعة واحدة خلال عدة فترات جزئية عددها n. ومع الطلب (الاستهلاك) محدد لكل من هذه الفترات إلا أن هذا الطلب متذبذب لدرجة يمكن أن يؤدي إلى العجز في واحدة أو أكثر من هذه الفترات ولذا سوف ندرس حالتين.

الحالة الأولى: عدم السماح بالعجز في أي من الفترات.

الحالة الثانية: يمكن السماح بالعجز في واحدة أو أكثر من الفترات إلا أنه يشترط هنا أنه سيتم التعويض عن أي عجز حاصل بحلول نهاية الفترة الأخيرة على أبعد حد ونظراً لتذبذب الطلب فإن عدم السماح بالعجز (الحالة الأولى) أو اشتراط التعويض عن هذا العجز (الحالة الثانية) قد يضطر النظام صاحب الشأن إلى استخدام ما يسمى بالوقت الإضافي (Overtime) في عملية الإنتاج علاوة على الوقت النظامي (Regular time).

ولبناء النموذج سنستخدم الرموز التالية للحالتين من أجل الفترة الجزئية «i» $i = 1, 2, ...n$ نعرف ما يلي:

$d_i =$ الطلب خلال الفترة.

$P_i =$ الطاقة الإنتاجية خلال الوقت النظامي.

$t_i =$ الطاقة الإنتاجية خلال الوقت الإضافي.

$h_i =$ تكلفة تخزين الوحدة خلال الفترة «i» للاستفادة منها في الفترة «i + 1».

b_i = تكلفة إنتاج الوحدة خلال الوقت النظامي.

C_i = تكلفة إنتاج الوحدة خلال الوقت الإضافي.

وللحالة الثانية:

S_i = تكلفة العجز للوحدة في الفترة «i» والتي سيتم التعويض عنها في الفترة «$i + 1$».

ولتسهيل عملية بناء النموذج في الحالتين سوف نفترض أن تكلفة التحضير للإنتاج في أي من الفترات مدمجة في تكاليف إنتاج الوحدة أو أن هذه التكلفة قرية من الصفر (مقارنة مع غيرها من التكاليف) بحيث يمكن إهمالها.

أما الهدف الرئيس في الحالتين فهو جعل مجموع التكاليف ذات الصلة أقل ما يمكن.

الحالة الأولى (عدم السماح بالعجز):

نظراً لعدم السماح بالعجز في أي من الفترات فإن هذا يعني ضمناً أن مجموع ما ينتج في جميع الفترات خلال الوقتين النظامي والإضافي يساوي مجموع ما هو مطلوب في هذه الفترات أو يزيد عنها.

والتكاليف ذات الصلة تتكون من تكاليف الإنتاج وتكاليف التخزين ويهدف النموذج إلى إيجاد السياسة التخزينية (المثلى) التي تجعل مجموع مثل هذه التكاليف لكافة الفترات أقل ما يمكن. وبعبارة أخرى فإن إيجاد السياسة التخزينية المثلى تعني إيجاد عدد الوحدات المنتجة في كل فترة لكل من وقتيها النظامي والإضافي والتي تجعل مجموع التكاليف الكلية الناتجة لجميع الفترات أقل ما يمكن.

فلو رمزنا للفترة «i» بالرمز D_i ولوقتها النظامي بالرمز R_i ولوقتها الإضافي بالرمز O_i وبالرمزين q_{ij}^{R} و q_{ij}^{O} لعدد الوحدات المنتجة في الوقتين النظامي والإضافي للفترة للإستفادة منها في الفترة j حيث $i = 1, 2, \dots n$ و $j = 1, 2, \dots n$ ولو رمزنا بالرمز R_iD_j وO_iD_j للتكلفة العائدة لكل من الوقتين النظامي والإضافي في الفترة i والتي ستصرف في الفترة «j»، $i, j = 1, 2, \dots n$،

لكان لدينا:

$O_1D_1=C_1, R_1D_1=b_1$ ومن أجل $i \geq 2$ فإن $O_iD_1=R_iD_1=0$

$R_1D_2=b_1+h_1$ و $O_1D_2=C_1+h_1$ ،$R_1D_n=b_1+h_1+\dots+h_{n-1}$ ،$O_1D_n=C_1+h_1+\dots+h_{n-1}$

وبشـــكل عـــام فـــإن $R_iD_j=b_i$ و $O_iD_j=C_i$ إذا كـــان $i=j$ و $R_iD_j=b_i+h_1+\dots+h_{j-1}$ و $O_iD_j=C_i+h_1+\dots+h_{n-1}$ إذا كان $j > i$ و $O_iD_j = R_iD_i=0$ إذا $i > j$.

وبذلك يمكن تمثيل للمسألة بجدول (أشبه بجدول مسألة النقل) كالجدول (٣ ، ١٠) التالي:

جدول (٣ ، ١٠)

	الفترات	D_1	D_2	D_3	⋮	D_n	فترة إضافية D_{n+1}	الطاقة الإنتاجية
D_1	R_1	b_1 q^R_{11}	b_1+h_1 q^R_{12}	$b_1+h_1+h_2$ q^R_{13}	⋮	$b_1+h_1+...+h_{n-1}$ q^R_{1n}	0 $q^R_{1(n+1)}$	P_1
	O_1	C_1 q^0_{11}	C_1+h_1 q^O_{12}	$C_1+h_1+h_2$ q^O_{13}	⋮	$C_1+h_1+...+h_{n-1}$ q^O_{1n}	0 $q^O_{1(n+1)}$	t_1
D_2	R_2		b_2 q^R_{22}	b_2+h_2 q^R_{23}	⋮	$b_2+h_2+...+h_{n-1}$ q^R_{2n}	0 $q^R_{2(n+1)}$	P_2
	O_2		C_1+h_1 q^O_{22}	C_2+h_2 q^O_{22}	⋮	$C_2+h_2+...+h_{n-1}$ q^O_{2n}	0 $q^O_{2(n+1)}$	t_2
D_3	R_3			b_3	⋮	$b_3+h_3+...+h_{n-1}$ q^R_{3n}	0 $q^R_{3(n+1)}$	P_3
	O_3			C_3	⋮	$C_3+h_1+...+h_{n-1}$ q^O_{3n}	0 $q^O_{3(n+1)}$	t_3
...	...	...	...	...		...	...	...
D_n	R_n				⋮	b_n q^R_{nn}	0 $q^R_{n(n+1)}$	P_n
	O_n				⋮	C_n q^O_{nn}	0 $q^O_{n(n+1)}$	t_n
	المطلوب	d_1	d_2	d_3	⋮	d_n	d_{n+1}	مجموع الإنتاج= مجموع المطلوب

وقد تمت إضافة الفترة الإضافية D_{n+1} بحيث أن المطلوب فيها d_{n+1} = مجموع الإنتاج - مجموع المطلوب.

أما التكاليف المقابلة في هذه الفترة فقد جعلت أصفاراً بحيث أن التكلفة الكلية للمسألة الأصلية لا تتغير وقد أدرجت الفترة الإضافية كشرط لإمكانية حل المسألة باستخدام خوارزمية النقل المعروفة. ونظراً لعدم السماح بوجود عجز فقد تم تظليل الخلايا المقابلة فمثلاً لا يسمح بإنتاج أي كمية في الفترة الثانية لتغطية احتياج في الفترة الأولى.

خوارزمية لإيجاد الحل الأمثل:

إن إيجاد الحل الأمثل يعني إيجاد الكميات q_{ij}^{R} و q_{ij}^{O} المثلى والتي تجعل مجموعة التكاليف الناتجة أقل ما يمكن. ويمكن ذلك من خلال تطبيق واحدة من الخوارزميتين التاليتين:

أ – خوارزمية النقل المعروفة.

ب – خوارزمية خاصة.

والخوارزمية الخاصة في هذه الحالة أسهل من خوارزمية النقل وذلك لوجود الخلايا المظللة (الفارغة) وتتلخص بما يلي:

نقوم بسد احتياج الفترة الأولى وذلك بملئ الخلايا ذات التكلفة الصغرى بالتدرج (نختار أولاً الخلية ذات أقل تكلفة ثم التي تليها من حيث صغر التكلفة وهكذا) ثم نقوم بتحديث البيانات وهكذا حتى نقوم بسد احتياج كافة الفترات. وسنوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (٣ ,٤):

ترغب شركة بمعرفة الطريقة المثلى لجدولة الإنتاج لإحدى السلع خلال ثلاثة شهور وفقاً للبيانات المبينة في الجدول (٣ ,١١).

جدول (٣ ,١١)

الفترة (الشهر)	الطاقة الإنتاجية		عدد الوحدات المطلوبة
	في الوقت النظامي	في الوقت الإضافي	
١	٥٠	٢٥	٦٠
٢	٧٥	٤٠	١٠٠
٣	٥٠	٥٠	١٢٥

h_i = ٠,١ دولار و C_i =٢ دولار و b_i = ١ دولار (i=1,2,3) والعجز غير مسموح به فما هي الجدولة المثلى للإنتاج والتي تجعل مجموعة التكاليف الكلية للمخزون خلال الأشهر الثلاثة أقل ما يمكن؟

الحل:

وفقاً للبيانات أعلاه فإن الجدول الخاص بهذا المثال هو: جدول (٣ , ١٠) التالي.

جدول (٣ , ١٢)

الفترات		D_1	D_2	D_3	فترة إضافية D_4	الطاقة الإنتاجية	
D_1	R_1	1 / 50	1.1	1.2	0	50	0
	O_1	2 / 10	2.1	2.2 / 10	0 / 5	25	15
D_2	R_2		1 / 75	1.2	0	75	0
	O_2		2 / 25	2.2 / 15	0	40	150
D_3	R_3			1 / 50	0	50	0
	O_3			2 / 50	0	50	0
المطلوب		60	100	125	5		

فالحل الأمثل هو: $q_{11}^R = 50$ ، $q_{11}^o = 10$ ، $q_{22}^R = 75$ ، $q_{22}^o = 25$ ، $q_{23}^o = 15$ ، $q_{33}^R = 50$ ، $q_{33}^o = 50$ ، وبقية q_{ij}^R و q_{ij}^o هي أصفار. أما الكمية المنتجة $q_{14}^o = 5$ والخاصة بالفترة الإضافية فلا تؤثر في التكلفة الكلية ذات الصلة حيث أن تكلفة الإنتاج المقابلة لها هي الصفر. ويمكن حساب التكلفة الكلية الصغرى ذات الصلة من الجدول (٣ , ١٢) كما يلي:

$(5\times0) + 50\times2 + 50\times1 + 15\times2.2 + 25\times2 + 75\times1 + 10\times2.2 + 10\times2 + 50\times1 = 370$ دولار

الحالة الثانية: (السماح بالعجز):

لا تختلف هذه الحالة عن الحالة الأولى (عدم السماح بالعجز) إلا بإمكانية السماح بالعجز في فترة ما على أن يتم التعويض عن مثل هذا العجز في أي فترة لاحقة. فلو حصل العجز في الفترة الأولى لكانت تكلفة الوحدة منه كما يلي:

$b_2+S_1(C_2+S_1)$ إذا تم التعويض عنها في الوقت النظامي (الإضافي) للفترة الثانية و

$b_2+S_1+S_2(C_2+S_1+S_2)$ إذا تم التعويض عنها في الوقت النظامي (الإضافي) للفترة الثالثة وهكذا.. وبذلك يمكن تمثيل هذه الحالة بجدول مماثل للجدول (٣ , ١٠) على أن نملأ الخلايا المظللة بتكاليف العجز هذه كلاً في مكانه المناسب.

ولا تصلح الخوارزمية الخاصة (التي استخدمت للحل في الحالة الأولى) لحل المسألة في الحالة الثانية. ولكن المسألة يمكن أن تحل باستخدام خوارزمية النقل المعروفة أو أية خوارزمية أخرى مناسبة. وسنوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (٣, ٥) :

بالعودة إلى المثال (٣ , ٤) أعلاه ما هي السياسة الإنتاجية إذا سمح بالعجز بتكلفة S_i = ٠,٥ دولار مع بقاء بقية البيانات كما هي.

الحل:

إن جدول التكاليف المقابل لحالة السماح بالعجز هذه لا يختلف عن الجدول (٣, ١٢) أعلاه إلا بالتكاليف الخاصة بالخلايا المظللة حيث يصبح جدول التكاليف في هذه الحالة كما في الجدول (٣ , ١٣) التالي:

جدول (٣, ١٣)

	الطاقة الإنتاجية	فترة إضافية D_4	D_3	D_2	D_1	الفترات	
$u_1=0$	50	0 0.9	1.2 -0.1	1.1 0	1 50	R_1	D_1
$u_2=1$	~~25~~ 15	0 -0.1	2.2 + -0.1	2.1 15 -	2 10	O_1	D_1
$u_3=-0.1$	~~75~~ 0	0 1	1.2 0	1 75	1.5 0.6	R_2	D_2
$u_4=0.9$	~~40~~ 25	0 5 0.1	2.2 - 25	2 + 10	2.5 0.6	O_2	D_2
$u_5=-0.3$	50	0 1.2	1 50	1.5 0.7	2 1.3	R_3	D_3
$u_6=0.7$	50	0 0.2	2 50	2.5 0.7	3 1.3	O_3	D_3
	290 290	5	~~125~~ ~~100~~ 50	~~100~~ ~~90~~ 10	60	المطلوب	
		$v_4=-0.9$	$v_3=1.3$	$v_2=1.1$	$v_1=1$		

سنحاول الآن تقديم الحل باستخدام خوارزمية النقل المعروفة بشيء من التفصيل.

خطوة (١): إيجاد حل ابتدائي ممكن بطريقة الركن الشمالي الغربي. حيث نقوم بسد حاجة كل فترة بالتدريج ابتداءً من الخلية الأولى في الركن الشمالي الغربي وبتحديث البيانات حتى تتحقق جميع الشروط الهامشية والتي نقصد بها أن مجموع ما ملئ به عمود (أو سطر) يساوي المطلوب (الطاقة الإنتاجية) في ذلك العمود (السطر) وبذلك نحصل على البيانات الموضحة في الجدول (٣, ١٣) أعلاه كحل ابتدائي ممكن وتكلفته $Z_0=\$\ 411.5$.

خطوة (٢): اختبار أمثلية الحل. وتتم هذه الخطوة على المراحل التالية:

أ – حساب المتغيرات الثنوية u_i (المتعلقة بالأسطر) وv_j (المتعلقة بالأعمدة) من العلاقة التالية والتي تطبق فقط على الخلايا المشغولة.

(u_i+v_j) لخلية مشغولة = التكلفة المقابلة لهذه الخلية (٣, ٢٠)

مع افتراض أن أحد المتغيرات u_i ,v_j المقابلة لإحدى الخلايا المشغولة يساوي الصفر.
وسنضع هنا $u_1=0$ (لأن خلية الركن الشمالي الغربي هي خلية مشغولة) وقد وضعت نتائج حساب u_i, v_j على هوامش الجدول (٣, ١٣) أعلاه.

ب - نحسب مؤشرات تقويم الخلايا الفارغة: مؤشر خلية فارغة مقابل السطر i والعمود j ولنرمز له بـ δ_{ij} يعطي بالعلاقة.

δ_{ij} لخلية فارغة = تكلفة الخلية الفارغة − [(u_i+v_j) للخلية] (٣, ٢١)

وقد وضعت نتائج الحسابات في الزاوية المقابلة لزاوية التكاليف.

جـ. يمثل الجدول الحالي حلاً أمثلياً إذا كان $\delta_{ij}\geq o$ لجميع الخلايا الفارغة فإذا حصل ذلك توقفنا وإلا انتقلنا للخطوة (٣). وهنا نلاحظ أن الجدول الحالي لا يمثل حلاً أمثلياً لوجود مؤشرين سالبين قيمة كل منهما 0.1−.

خطوة (٣): تحسين الحل الحالي والعودة إلى الخطوة (٢).

وتطبق هذه الخطوة كما يلي:

(i) تحديد الخلية الداخلة: وهي الخلية التي تملك أدنى مؤشر سالب وفي حال تعادل أكثر من مؤشر نختار أي من الخلايا المقابلة كخلية داخلة هنا يمكن اختيار أي من الخليتين (R_1, D_3) أو (O_1, D_3) كخلية داخلة, باعتبار أن مؤشر كل منهما هو 0.1−.

(ii) رسم مسار الخلية الداخلة وتأشيره. نرسم خط موجه من الخلية الداخلة إلى أول خلية مشغولة على نفس العمود ثم من هذه الأخيرة إلى أول خلية مشغولة على نفس السطر ثم من هذه الأخيرة إلى أول خلية مشغولة على نفس العمود وهكذا حتى نصل إلى خلية مشغولة على نفس سطر الخلية الداخلة ثم نغلق الخط الموجه ونضع الإشارات + ثم − بالتوالي على الخلايا التي توقفنا عندها ابتداءً من الخلية الداخلة

(iii) تحديد الخلية الخارجة: بعد رسم مسار الخلية الداخلة وتأشيره كما في (ii) نختار أقل الكميات في الخلايا التي تحمل الإشارة − ونطرحها من هذه الخلايا ونضيفها إلى الخلايا التي تحمل الإشارة + (ندورها) وبذلك تدخل خلية وتخرج خلية (واحدة على الأقل).

فلو اخترنا (في المثال) الخلية (O_1, D_3) كخلية داخلة فإننا نجد المسار وإشاراته كما هو موضح على الجدول (٣, ١٣) وتدوير الكمية ١٥ على الخلايا كما هو موضح في (ii) أعلاه نحصل على الجدول (٣, ١٤) المحسن التالي:

جدول (٣ ,١٤)

	الطاقة الإنتاجية	فترة إضافية D_4	D_3	D_2	D_1	الفترات	
$u_1=0$	50	0 / 1	1.2 / 0	1.1 / 0.1	1 / 50	R_1	D_1
$u_2=1$	25	0 / 0	2.2 / 15	2.1 / 0.1	2 / 10	O_1	
$u_3=0$	75	0 / 1	1.2 / 0	1 / 75	1.5 / 0.5	R_2	D_2
$u_4=1$	40	0 / 5	2.2 / 10	2 / 25	2.5 / 0.5	O_2	
$u_5=-0.2$	50	0 / 1.2	1 / 50	1.5 / 0.7	2 / 1.2	R_3	D_3
$u_6=+0.8$	50	0 / 0.2	2 / 50	2.5 / 0.7	3 / 1.2	O_3	
	290 / 290	5	125	10	60	المطلوب	
		$v_4=-1$	$v_3=1.2$	$v_2=1$	$v_1=1$		

وكما نلاحظ فإن جميع المؤشرات $\delta_{ij}\geq 0$ ولذلك فإن الجدول (٣ ,١٢) يمثل حلاً أمثلياً وتمثل القيم المعطاة في الخلايا القيم المثلى لـ q_{ij}^{R} و q_{ij}^{o} . أما التكلفة الأصغرية ذات الصلة فتساوي

$370= 50\times1+ 10\times2+ 15\times2.2+ 75\times1+ 25\times2+ 10\times2.2+ 50\times1+ 50\times2+ (5\times0)$ دولار

وكما هو ملاحظ فإن ارتفاع تكلفة العجز ($S_i=\$0.5$) أدى إلى عدم السماح بالعجز.

ويمكن للحل الأمثل أعلاه (الجدول (٣ ,١٢)) أن يتغير فيما لو كان $S_i=\$0.1$ (تحقق من ذلك).

تمارين

١. البيانات في الجدول (٣, ١٥) تتعلق بنظام مخزون ذي ثلاث فترات مع السماح بالعجز:

جدول (٣, ١٥)

الفترة i	الطلب d_i	تكلفة الطلب K_i	تكلفة التخزين h_i
١	٥	٨٠	١
٢	٧	٧٠	١
٣	١٠	٦٠	٢

إذا افترضنا أن عدد الوحدات المتوافرة في بداية الفترة الأولى يساوي ٢ فما هي الكمية المثلى للطلبية لكل من الفترات الثلاث والتكلفة المقابلة لها إذا كانت تكلفة الوحدة هي ١٠دولار لأول خمس وحدات و ٢٠ دولار لكل وحدة إضافية.

٢. قدرت شركة مقدار الطالب على إحدى السلع التي تقوم بتسويقها خلال ستة شهور بالمقادير ٢٠، ٨٠، ٢٤٠، ١٢٠، ١٠٠، ٤٠ كما قدرت تكاليف كل طلبية جديدة بمقدار ٥٠ دولار وتكلفة تخزين كل وحدة بـ ١ دولار في الشهر. وقد توافر ١٠ وحدات من السلعة في البداية. ما هي الخطة المثلى للطلبيات للشهور الستة وما مقدار التكلفة الدنيا المقابلة لذلك إذا كانت تكلفة الوحدة من السلعة ثابتة وقدرها ٥ دولار للوحدة.

٣. أوجد السياسة المثلى لنظام ذي خمس فترات بياناتها كما في الجدول (٣, ١٦):

جدول (٣, ١٦)

الفترة i	الطلب d_i	تكلفة شراء الوحدة p_i	تكلفة الطلب k_i	تكلفة التخزين h_i
١	١٥٠	٦	٢٠٠	٢
٢	١٠٠	٦	٣٠٠	١
٣	٢٠	٤	١٠٠	٢
٤	٤٠	٤	٢٠٠	١
٥	٧٠	٨	٣٠٠	٢

علماً بأنه لا تتوافر أي وحدة من السلعة مسبقاً.

٤. أعد حل التمرين ٣ باستخدام خوارزمية **واجنر – واتين** ماذا تلاحظ؟

٥. استخدم خوارزمية **واجنر – وايتن** لإيجاد الكميات المثلى الواجب طلبها من سلعة خلال عشرة شهور قدر الاستهلاك فيها كما في الجدول (٣, ١٧):

جدول (٣, ١٧)

الشهر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد الوحدات المستهلكة	٧٠	٢٠	٥	١٠٠	١٥٠	٠	٢٥	٦٠	٨٠	١٠

كما قدرت التكاليف بما يلي k = ٥٠٠ دولار لكل طلبية و h= ٥ دولار للوحدة.

٦. أعد حل التمرين ٥ باستخدام استكشافية سلفر – ميل. ماذا تلاحظ؟

٧. لاحظت إحدى الشركات الإنتاجية ازدياداً في الطلب على إحدى السلع التي تنتجها ونتيجة لدراسة أجراها المختصون في هذه الشركة وجدوا أنه يمكن تلبية الطلب من هذه السلعة لثلاث فترات قادمة (كل واحدة منها ٣ شهور) من خلال الإنتاج بأوقات إضافية علاوة على الأوقات النظامية. يعطي الجدول (٣, ١٨) تقديراً للطاقة الإنتاجية (بالوحدات) خلال الوقت النظامي والوقت الإضافي وتقدير للاحتياج من هذه السلعة خلال هذه الفترات.

جدول (٣, ١٨)

الفترة	**الطاقة الإنتاجية خلال الوقت النظامي**	**الطاقة الإنتاجية خلال الوقت الإضافي**	**عدد الوحدات المستهلكة**
١	٩٠	٨٠	١٦٠
٢	١٠٠	٧٠	٢٠٠
٣	٨٠	٥٠	١٠٠

تقدر تكاليف إنتاج الوحدة خلال الوقت النظامي بـ ١٠ دولار وتتضاعف هذه التكلفة خلال الوقت الإضافي، إذا كانت تكلفة تخزين الوحدة من فترة إلى فترة تالية تساوي ٥ دولار فالمطلوب:

(i) إيجاد السياسية الإنتاجية المثلى لهذه الشركة والتكلفة المقابلة لذلك.

(ii) أعد السؤال (i) بافتراض السماح بوجود عجز بتكلفة قدرها:

أ - ٣ دولار للوحدة.

ب - ١٠ دولار للوحدة.

ج - ١٥ دولار للوحدة.

٨. تقوم شركة بإنتاج عدة أجهزة كهربائية ونتيجة لتزايد الطلب على أحد أنواع هذه الأجهزة فقد قررت الشركة المنتجة سد الاحتياج المتزايد بعمليات إنتاج خلال أوقات إضافية علاوة على الأوقات النظامية وكذلك التعاقد مع شركات أخرى لإنتاج عدد من هذه الأجهزة. ونتيجة للدراسة التي أجريت لأربع فترات قادمة وجدت البيانات كما في الجدول (٣ ,١٩):

جدول (٣ ,١٩)

الفترة	الطاقة الإنتاجية في الوقت النظامي	الطاقة الإنتاجية في الوقت الإضافي	عدد الوحدات التي يمكن التعاقد عليها مع شركات أخرى	عدد الوحدات المستهلكة
١	٢٠٠	٥٠	٣٠	٢٠٠
٢	٨٠	٤٠	٣٠	١٥٠
٣	٧٥	٤٠	٣٠	١٧٠
٤	١٢٥	٦٠	٣٠	٢٥٠

إذا علمت أن تكلفة إنتاج الوحدة (مئات الدولارات) إذا ما أنتجت في الوقت النظامي أو الوقت الإضافي أو تم التعاقد عليها من شركة أخرى هي على التوالي ١، ٢، ٣ وأن تكلفة تخزين الوحدة من فترة إلى التي تليها تساوي ٥ دولار وتكلفة عدم توافر أي وحدة تساوي ٥٠ دولار:

(١) فما هي السياسة المثلى للشركة والتكلفة المقابلة لها.

(٢) أعد السؤال (١) في الحالات التالية:

أ - يمكن إهمال تكلفة عدم توافر الوحدة.

ب - عدد الوحدات المستهلكة لكل من الفترتين ٢ و ٣ زاد بمقدار ٥٠ وحدة كما أن تكلفة عدم توافر أي وحدة قد زاد إلى ١٠٠ دولار.

الفصل الرابع

بعض نماذج المخزون الاحتمالية

(٤ ,١) مقدمة:

تعرفنا في الفصول السابقة على كثير من نماذج المخزون التي يكون فيها الطلب معروفاً ومحدداً. فقد درسنا في الفصل الثاني بعض النماذج الرئيسة للمخزون والتي يكون فيها الطلب محدداً وثابتاً. كما درسنا في الفصل الثالث نماذج رئيسة للمخزون كان الطلب فيها محدداً ومتغيراً مع الزمن ولكن تغيراته معروفة. وسنتناول في هذا الفصل بعض نماذج المخزون التي يكون فيها الطلب أو الوقت المتقدم متغيراً عشوائياً ذو توزيع احتمالي معروف ولكنه غير متغير مع الزمن والتي سبق وأسميناها بالنماذج الاحتمالية المستقرة (Probabilistic Stationary Models).

وفي مثل نماذج المخزون الاحتمالية فإننا لا نتحدث عن القيم الممكنة للطلب أو عن جعل التكلفة الكلية ذات الصلة للمخزون أصغر ما يمكن كما هي الحال في نماذج المخزون المحددة ولكننا نتحدث عن القيمة المتوقعة للطلب وعن جعل التكلفة الكلية المتوقعة لمشكلة المخزون قيد الدراسة أصغر ما يمكن، وأياً كانت المتغيرات العشوائية التي تصادفنا في نماذج المخزون الاحتمالية فإننا سنكون مهتمين إما بقيمتها المتوقعة (و/أو انحرافها المعياري) أو بجعل بعض هذه القيم أفضل (أصغر أو أكبر) ما يمكن.

ولذا فإننا سنحتاج إلى بعض المصطلحات والتعاريف الإحصائية المتعلقة بالمتغيرات العشوائية والتي سنوردها في الفقرة التالية.

(٢, ٤) مصطلحات وتعاريف:

لنفرض أن X متغيراً عشوائياً (Random Variable) . في كل ما يأتي سوف نرمز لدالة التوزيع التراكمي (Cumulative Distribution Function) اختصاراً c.d.f وبالعربية د.ت.ت) لـ X بالرمز $F_X(x)$ أو F (x). وسنرمز بالرمزين E (X) و σ^2 للقيمة المتوقعة لـ X ولتباين X على الترتيب.

إذا كان X متصلا (Continuous)، فاننا سنرمز لدالة الكثافة الاحتمالية (Probability Density Function أو اختصاراً p.d.f وبالعربية د.ك.أ) لـ X بالرمز $f_X(x)$ أو f (x).

إذا كان X منفصلاً (Discrete) يأخذ القيم x_i (i عدد طبيعي) بالاحتمالات p_i أي:

$$\Pr\{X = x_i\} = p_i \qquad (١, ٤)$$

فإن:

$$E(X) = \sum_i x_i p_i \qquad (٢, ٤)$$

$$\sigma^2 = \sum_i [x_i - E(X)]^2 p_i \qquad (٣, ٤)$$

أما إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً يأخذ قيمة في المجموعة M فإن:

$$E(X) = \int_M x f(x) dx \qquad (٤, ٤)$$

$$\sigma^2 = \int_M [x - E(X)]^2 f(x) dx \qquad (٥, ٤)$$

كذلك يمكننا إيجاد دالة التوزيع التراكمي F(x) من دالة الكثافة الاحتمالية f(x) كما يلي:

$$F(x) = \Pr\{X \le x\} = \sum_{x_i \le x} \Pr\{X = x_i\} \qquad (٦, ٤)$$

إذا كان X متغيراً عشوائياً منفصلاً و

$$F(x) = \Pr\{X \le x\} = \int_m f(x) dx \qquad (٧, ٤)$$

حيث $M \supseteq m = \{x \in M : X \le x\}$ إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً وقد نحتاج لحساب أي قيمة متوقعة لدالة في X مثل g(X) حيث يكون لدينا عندئذٍ:

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) p_i \qquad (٨, ٤)$$

إذا كان X متغيراً عشوائياً منفصلاً يأخذ القيم x_i (i عدد طبيعي)

$$E[g(X)] = \int_{x \in M} g(x) f(x) dx \qquad (٩, ٤)$$

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً يأخذ قيمة في المجموعة M.

نشير أخيراً إلى أننا قد نحتاج أحياناً إلى اشتقاق الدالة G(y) كدالة متصلة في y والمعرفة بالعلاقة:

$$G(y)=\int_{g(y)}^{h(y)} z(x,y)dx \qquad (١٠, ٤)$$

بالنسبة للمتغير y إن هذا المشتق يعطى بـ:

$$\frac{dG(y)}{dy}=\int_{g(y)}^{h(y)}\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}dx+z(h(y),y)\frac{dh(y)}{dy}-z(g(y),y)\frac{dg(y)}{dy} \qquad (١١, ٤)$$

وفي مسائل المخزون نصادف الحالة الخاصة التالية:

$$G(y)=\int_{o}^{h(y)} z_1(x,y)dx+\int_{h(y)}^{\infty} z_2(x,y)dx \qquad (١٢, ٤)$$

عندئذٍ:

$$\frac{dG(y)}{dy}=\int_{o}^{h(y)}\frac{\partial z_1(x,y)}{\partial y}dx+z_1(h(y),y)\frac{dh(y)}{dy}+\int_{h(y)}^{\infty}\frac{\partial z_2(x,y)}{\partial y}dx-z_2(h(y),y)\frac{dh(y)}{dy} \qquad (١٣, ٤)$$

ونظراً لأن الطلب (أو الاستهلاك) كمتغير عشوائي يمكن أن يكون ذو طبيعة منفصلة أو ذو طبيعة متصلة فإننا سنقدم بعض نماذج المخزون الرئيسة وذات الجانب التطبيقي لكلا النوعين ولكننا سنشرح أولاً مفهوم ما يسمى مستوى الخدمة (Service level) ومخزون الأمان (Safety stock).

(٣, ٤) مستوى الخدمة ومخزون الأمان

قد يقع العجز في أنظمة المخزون نتيجة لعدم معرفة مؤكدة عما سيكون عليه الطلب (باعتباره عشوائياً) وخاصة خلال ما أسميناه الوقت المتقدم ولما كان احتمال وقوع العجز والذي سنرمز له بالرمز Π يعطى بالعلاقة:

$$\Pi = \frac{\text{عدد مرات وقوع العجز في عدد } n \text{ من الدورات التخزينية}}{n}$$

ولما كان للعجز تكاليفه الخاصة به والتي قد تكون مرتفعة في بعض الأحيان فإن أنظمة المخزون قد تحاول تجنب الوقوع في العجز من خلال مخزون احتياطي يطلق عليه مخزون الأمان والذي يقلل من فرص الوقوع في مثل هذا العجز. ونعبر عن ذلك بقولنا أن النظام قد رفع مستوى الخدمة.

ويعرف مستوى الخدمة بأنه نسبة عدد المرات (الدورات) التي لا يقع فيها العجز إلى العدد الكلي لدورات. فإذا كان لدينا ١٠دورات تخزينية مثلاً لم يقع العجز إلا في واحدة منها فإن مستوى الخدمة يساوي ٠,٩ = . واحتمال العجز ٠,١ = .. وبشكل عام فإن:

مستوى الخدمة = ١ − احتمال الوقوع في العجز (٤, ١٤)

فإذا افترضنا أن الطلب هو متغير عشوائي D متوسطه μ وانحرافه المعياري σ ودالة كثافته الاحتمالية f ودالة توزيعه التراكمي F فيمكننا عندئذٍ حساب كل من احتمال الوقوع في العجز ومستوى الخدمة المقابلة لكمية معينة، B مثلاً، من مخزون الأمان كما يلي:

إن **مخزون الأمان** هو الكمية B التي تزيد عن متوسط الطلب μ وبذلك فإن احتمال الوقوع بالعجز يساوي:

$$\Pr\{D > \mu + B\} = 1 - F(d) \qquad (٤, ١٥)$$

حيث $d = \mu + B$

ومستوى الخدمة يساوي:

$$\Pr\{D \le \mu + B\} = F(d) \qquad (٤, ١٦)$$

وكثيراً ما تلجأ الأنظمة إلى ضبط مستوى المخزون بحيث يحقق مستويات خدمة معينة وذلك من خلال مخزون الأمان وهذا ما سنتناوله فيما يلي.

(٤, ٤) نموذج لضبط المخزون عند مستوى معين من الخدمة:

لما كان تحقيق مستوى معين من الخدمة يقتضي استخدام ما أسميناه مخزون الأمان ولما كان لمثل هذا المخزون تكاليفه الخاصة به فلابد من إدراج مثل هذه التكاليف مع التكاليف الخاصة بنظام المخزون قيد الدراسة. لنفرض كما سبق أن h تمثل تكاليف تخزين الوحدة في واحدة الزمن ولنفرض أن مستوى الخدمة المرغوب بتحقيقه هو p، عندئذٍ يكون الهدف من هذا النموذج هو إيجاد قيمة مخزون الأمان B الذي يحقق مستوى الخدمة p وسنوضح ذلك من خلال المثالين التاليين حيث، توزيع D في أحدهما متصلاً وفي الآخر منفصلاً.

مثال (٤, ١):

لنفرض أن الطلب D على سلعة معينة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 60$ وحدة في الأسبوع وبانحراف معياري $\sigma = 8$ وحدات في الأسبوع فالمطلوب:

(١) إيجاد مخزون الأمان المقابل لمستويات الخدمة $p_1 = 0.9$ و $p_2 = 0.95$.

(٢) بافتراض أن نموذج المخزون هو نموذج الكمية الاقتصادية للطلب بالبيانات التالية:

تكلفة تخزين الوحدة في الأسبوع h = ٣٠ دولار.

تكلفة الطلبية الواحدة K = ١٠٠ دولار.

تكلفة العجز لوحدة في الأسبوع g= ١٠ دولار.

فما هو أفضل مستوى لمخزون الأمان من بين المستويات p_1 و p_2 وما هي نقطة إعادة الطلب عندئذٍ؟

الحل :

(١) من العلاقة (٤, ١٦) فإن :

مستوى الخدمة = المساحة تحت المنحني الطبيعي وإلى يسار النقطة $d = \mu + B$.

ولحساب هذه المساحة نوجد النقطة المعيارية z المقابلة للنقطة d من العلاقة:

$$d = \sigma z + \mu \Leftrightarrow z = \frac{d - \mu}{\sigma} \qquad (٤ ,١٧)$$

ومن قيمتي d نجد أن $B = \sigma z$ وبذلك فإن معرفة z تؤدي إلى معرفة B. ولإيجاد z نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري فنجد من أجل $p_1 = 0.9$ فإن $F(z_1) = 0.9 \Leftarrow z_1=1.28$ و $B_1 = 8\ (1.28) = 10.24$ وحدة.

ومن أجل $p_2 = 0.95$ فإن $F(z_2) = 0.95$ و $B_2 = 8\ (1.65) = 13.2$ وحدة.

(٢) تكاليف تخزين مخزون الأمان المقابلة لـ 0.9 = p_1 تساوي hB_1 = $(30)(10.24) = 307.2$ دولار في الأسبوع. أما تكاليف العجز فتحسب كما يلي:

إن احتمال العجز هنا مقابل مستوى الخدمة p يساوي 1-p وتكاليفه في واحدة الزمن تساوي :

(1-p) × عدد مرات وقوع العجز في واحدة الزمن × تكلفة العجز للوحدة في واحدة الزمن

ولكن عدد مرات وقوع العجز في واحدة الزمن =

$$\text{عدد الدورات التخزينية في واحدة الزمن } n = \frac{\text{متوسط الطلب في واحدة الزمن}}{\text{الكمية المطلوبة}} \qquad (١٨, ٤)$$

في مثالنا هنا: متوسط الطلب = μ = ٦٠ وحدة في الأسبوع.

الكمية المطلوبة هي الكمية الاقتصادية للطلب وتعطى بالعلاقة (راجع نموذج EOQ من الفصل الثاني)

$$Q = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2(100)(60)}{30}} = 20 \text{ وحدة في الأسبوع.}$$

وبذلك فإن $\frac{٦٠}{٢٠}$= ٣ وبالتالي فإن تكاليف العجز المقابلة لـ 0.9 = p_1 تساوي $(10)(3)(0.1)= 3$ دولار في الأسبوع.

فالتكاليف الكلية المقابلة لـ $p_1 = 0.9$ والمؤلفة من تكلفة التخزين والطلب والعجز تساوي: $307.2 + 3 + 3 \times 100 = 610.2$ دولار في الأسبوع.

وبالمثل نجد أن التكاليف الكلية المقابلة لـ $p_2 = 0.95$ تساوي:

$(30)(13.2) + (10)(3)(0.05) + 3 \times 100 = 697.5$ دولار في الأسبوع.

فأقل تكلفة كلية للمخزون في الأسبوع هي التي تقابل مستوى الخدمة $p_1 = 0.9$ والتي تقابل مخزون الأمان $B_1 = 10.24$ وحدة في الأسبوع.

أما نقطة إعادة الطلب عندئذٍ فهي: $R = \mu + B_1 = 60 + 10.24 = 70.24$ ويمكننا التحقق أنه لو ارتفعت تكاليف العجز مثلاً g = ١٠٠٠ دولار فإن التكاليف المقابلة لـ

$p_1 = 0.9$ و $p_2 = 0.95$ تصبح ٦٠٧,٢ دولار و ٥٤٦ دولار على الترتيب والتي تعني أن مستوى الخدمة الأمثل هو ٠,٩٥.

مثال (٤ ,٢):

وجدت شركة توزيع أن الكمية الاقتصادية للطلب على سلعة معينة هي $q^* = ٢٠٠$ وحدة لدورة مدتها سبعة شهور وأن تكاليف نفاذ المخزون لمرة واحدة هو $g = ٤٠٠$ دولار وقد لاحظت الشركة أن الوقت المتقدم هو ٦ أيام. ونتيجة للاستهلاك غير المنتظم فقد قامت الشركة بتسجيل مقدار هذا الاستهلاك خلال دورات تخزينية مدة كل منها سبعة شهور فحصلت على البيانات المعطاة في الجدول (٤ ,١):

جدول (٤ ,١)

عدد الوحدات المستهلكة	٢٠	٢٥	٣٠	٤٠	٥٠	٧٥	٩٥
عدد مرات الاستهلاك	٣	٤	٦	٥٠	٢٧	٨	٢

إذا علمت أن $h = ٢$ دولار في الشهر فالمطلوب إيجاد أفضل مستوى لمخزون الأمان بين المستويات التالية $p_1 = 0.8$، $p_2 = 0.9$ و $p_3 = 0.95$ ثم إيجاد نقطة إعادة الطلب المقابلة له.

الحل:

من البيانات في الجدول أعلاه نجد أن التوزيع الاحتمالي لطلب يعطى كما في الجدول (٤ ,٢):

جدول (٤ ,٢)

قيمة الطلب d	٢٠	٢٥	٣٠	٤٠	٥٠	٧٥	٩٥
$f(d) = Pr\{D = d\}$	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٦	٠,٥	٠,٢٧	٠,٠٨	٠,٠٢

وبذلك فإن القيمة المتوقعة لـ D (متوسط d) بحسب العلاقة (2) ولتكن μ تعطى بـ:

$$\mu = 20(0.03) + 25(0.04) + 30(0.06) + 40(0.5) + 50(0.27) + 75(0.08) + 95(0.02)$$

أو $\mu = 44.8$ وحدة في الشهر. ومن أجل الوقت المتقدم ٦ أيام = $\frac{٦}{٣٠}$ شهراً فإن متوسط

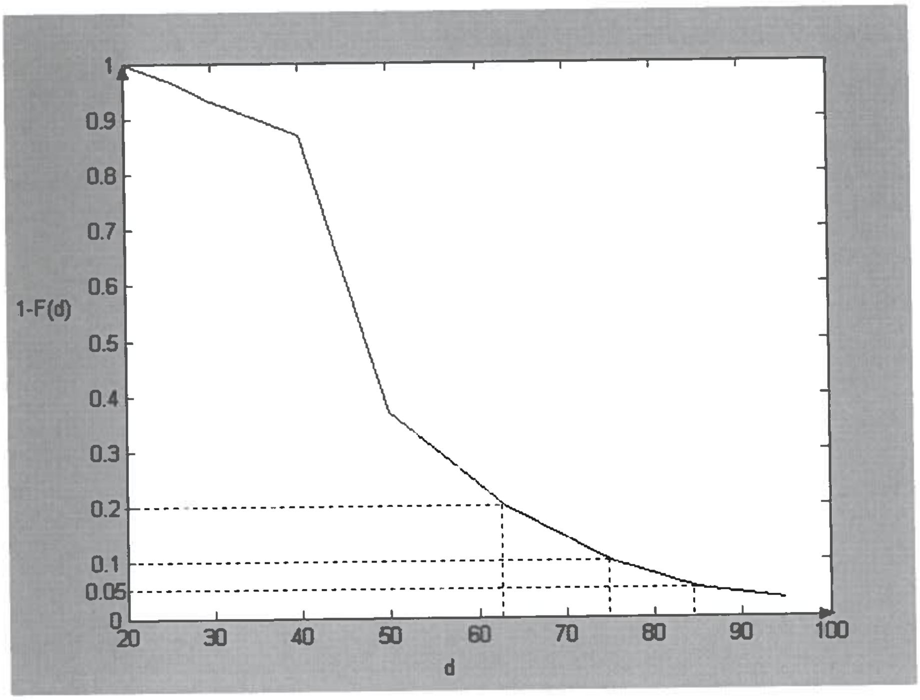
الاستهلاك وليكن μ_1 = (٤٤,٨) - = ٨,٩٦ ≅ ٩ وحدات. في مثل هذه الحالة فإن مخزون الأمان B يمكن تحديده من إحدى العلاقتين (٣ ,١٥) أو (٣ ,١٦) بعد معرفة دالة التوزيع التراكمي للطلب F(d) ثم رسم الدالة 1-F(d) والتي تعطى بالجدول (٤ ,٣):

جدول (٤ ,٣):

d	٢٠	٢٥	٣٠	٤٠	٥٠	٧٥	٩٥
$1-F(d)=\Pr\{D>d\}$	١	٠,٩٧	٠,٩٣	٠,٨٧	٠,٣٧	٠,١	٠,٠٢

وبشكل تقريبي فإن المنحني البياني لها يعطى بالشكل التالي:

شكل (٤, ١)



من الشكل (٤ ,١) نجد وبشكل تقريبي ما يلي:

من أجل $F(d_1) = p_1 = 0.8$ فإن $1 - F(d_1) = 0.2$ تقابل القيمة $d_1 = \mu_1 + B_1 = 63$

وحدة ومنه $B_1 = 54$ وحدة وقيمة التكلفة المقابلة لذلك هي:

$$C_1 = 0.2\left(\frac{44.8}{200}\right)(400) + 2(54) = 125.92 \text{ دولار}$$

(نذكر هنا أن عدد مرات العجز $= \frac{\mu}{q} = \frac{44.8}{200} = 0.224$ مرة في الشهر).

ومن أجل $F(d_2) = p_2 = 0.9$ فإن $1 - F(d_2) = 0.1$ تقابل القيمة $d_2 = \mu_1 + B_2 = 75$

وحدة ومنه $B_2 = 66$ وحدة وقيمة التكلفة المقابلة لذلك هي:

$$C_2 = 0.2\,(0.224)(400) + 2\,(66) = 149.92 \text{ دولار}$$

ومن أجل $F(d_3) = p_3 = 0.95$ فإن $1 - F(d_3) = 0.05$ تقابل القيمة $d_3 = \mu_1 + B_3 = 85$ ومنه $B_3 = 76$ وحدة وقيمة التكلفة المقابلة لذلك هي:

$$C_3 = 0.2\,(0.244)(400) + 2\,(76) = 169.9 \text{ دولار}$$

وبذلك فإن مستوى الخدمة الأمثل هو $p_1 = 0.8$ لأنه يعطي أقل تكلفة ممكنة. ونقطة إعادة الطلب عندئذٍ هي $R_1 = \mu_1 + B_1 = 63$ وحدة. ويمكننا بسهولة أن نتحقق أنه لو كان $g = ٤٠٠٠$ دولار فإن التكاليف المقابلة لـ p_1 و p_2 و p_3 تصبح ٢٨٧,٢، ٢٢١,٦ و ١٩٦,٨ دولار على الترتيب وعندها يصبح المستوى الأمثل للخدمة هو $p_3 = 0.95$.

ويتضح من المثالين السابقين أن النتيجة المنطقية لارتفاع تكاليف العجز هي محاولة تفاديه من خلال رفع مستوى الخدمة.

نموذج المخزون الاحتمالي التالي هو أحد نماذج ما أسميناه سابقاً (نماذج المراجعة المستمرة) والذي سيمكننا من إيجاد القيمة المثلى لكل من الطلبية ونقطة إعادتها وذلك عندما يتبع الطلب توزيعاً احتمالياً متصلاً غير متغير مع الزمن.

(٥, ٤) نموذج مراجعة مستمرة اختصاراً ن م م للمخزون

(A Continuous Review Model CRM)

يقوم هذا النموذج على الفرضيات التالية:

(i) الطلب هو متغير عشوائي X يتبع توزيعاً احتمالياً متصلاً دالة كثافته الاحتمالية f(x) غير متغيرة مع الزمن.

(ii) يمكن مراجعة مستوى المخزون بصورة مستمرة بحيث أن طلبية جديدة حجمها y من الوحدات يتم طلبها عندما يصبح مستوى المخزون عند نقطة إعادة طلب محددة قدرها R وحدة (y و R متغيرات القرار).

(iii) يمكن السماح بالعجز ولكن مثل هذا العجز (في حال وقوعه خلال الوقت المتقدم) قابل للاسترداد ولا يعتبر مثل هذا العجز واقعاً ما لم تتجاوز قيمة الطلب X في لحظة ما القيمة R في تلك اللحظة فلو رمزنا لكمية العجز (وهو دالة في المتغير العشوائي X) بالرمز S(X) فإن:

$$S(X)=\begin{cases}0 & X\le R \quad \text{إذا كان} \\ X-R & X>R \quad \text{إذا كان}\end{cases} \qquad (١٩, ٤)$$

(iv) إن سعر الوحدة مستقل تماماً عن حجم الطلبية (تكاليف الشراء ثابتة).

(v) تعرف التكاليف كما في السابق كما يلي (وهي مقادير معلومة).

- h تكلفة تخزين الوحدة في واحدة الزمن.
- g تكلفة العجز للوحدة في واحدة الزمن.
- K تكلفة الطلب (أو التحضير) لطلبية واحدة.
- D القيمة المتوقعة لعدد الوحدات المطلوبة في واحدة الزمن.

ويمكن تمثيل سلوك مستوى المخزون لمثل هذا النموذج كما في الشكل (٤ ,٢):

شكل (٤ ,٢) سلوك مستوى المخزون

بناء النموذج:

بما أن عناصر المشكلة ذات طبيعة احتمالية فإننا سنتحدث عن القيم المتوقعة لمثل هذه العناصر. والهدف الرئيس في هذا النموذج هو تحديد قيم y و R والتي تجعل القيمة المتوقعة لمجموع التكاليف ذات الصلة بهذه المشكلة أقل ما يمكن. وكما هو واضح فإن هذه التكاليف تتكون من كل تكاليف الطلب (أو التحضير) وتكاليف التخزين وتكاليف العجز. وسنقوم بحساب القيمة المتوقعة لكل منها في واحدة الزمن.

تكاليف الطلب (أو التحضير). استناداً لتعريف كل من D و y فإن:

$$n = \frac{D}{y} \qquad (٢٠, ٤)$$

يمثل العدد المتوقع للدورات التخزينية في واحدة الزمن. وبذلك فإن تكاليف الطلب (أو التحضير) في واحدة الزمن تساوي $Kn = K\dfrac{D}{y}$.

تكاليف التخزين: لتبسيط الأمور وكما فعلنا في نموذج الكمية الاقتصادية للطلب فإننا سنعتبر أن القيمة المتوقعة لعدد الوحدات المخزنة خلال دورة تخزينية تساوي:

$$\frac{\text{القيمة المتوقعة لمستوى المخزون في بداية الدورة + القيمة المتوقعة لمستوى المخزون في نهاية الدورة}}{٢}$$

ولكن القيمة المتوقعة لمستوى المخزون في بداية الدورة تساوي $y + E(R - X)$ وفي نهايتها تساوي $E(R - X)$. وبملاحظة أن:

$$E(R - X) = \int_0^\infty (R - x)f(x)dx = R - E(X)$$

وبذلك فإن القيمة المتوقعة لعدد الوحدات المخزنة خلال دورة تخزينية تساوي:

$$\frac{y}{2} + R - E(X) = \frac{y + R - E(X) + R - E(X)}{2}$$

وبالتالي فإن القيمة المتوقعة لتكلفة التخزين في واحدة الزمن تساوي:

$$h\left[\frac{y}{2} + R - E(X)\right]$$

تكاليف العجز: بموجب الفرضية (iii) والعلاقة (٤, ١٩) فإن القيمة المتوقعة لعدد وحدات العجز في دورة تخزينية والذي سنرمز له بالرمز $\bar{S}$ يعطى ب

$$\bar{S} = E\{S(X)\} = \int_0^\infty S(x)f(x) = \int_0^\infty (x - R)f(x)dx \qquad (٤ ,٢١)$$

وبموجب العلاقة (٤ ,٢٠) فإن القيمة المتوقعة لتكاليف العجز في واحدة الزمن يساوي $g\bar{S}\dfrac{D}{y}$. وبذلك تكون القيمة المتوقعة لمجموع التكاليف في واحدة الزمن كدالة في المتغيرين y و R والتي سنرمز لها بالرمز TCU (y,R) تعطي بالعلاقة:

$$TCU(y, R) = \frac{Dk}{y} + h\left[\frac{y}{2} + R - E(X)\right] + g\bar{S}\frac{D}{y} \qquad (٤ ,٢٢)$$

حيث تعطي $\bar{S}$ بالعلاقة (٤ ,٢١).

حل النموذج: نحصل على القيم المثلى لكل من y و R من حل المعادلتين:

$$\frac{\partial TCU(y,R)}{\partial y} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial TCU(y,R)}{\partial R} = 0 \qquad (٤ ,٢٣)$$

ومن العلاقة (٤ ,٢٢) نجد أن العلاقة الأولى من (٤ ,٢٣) تكافئ:

$$\frac{-Dk}{y^2} + \frac{h}{2} - \frac{gD\bar{S}}{y^2} = 0$$

وبالحل بالنسبة لـ y نجد:

$$y = \sqrt{\frac{2D(k+g\bar{S})}{h}} \qquad (٤ ,٢٤)$$

ولاشتقاق TCU (y,R) بالنسبة لـ R نلاحظ أن $\bar{S}$ تشبه التكامل الثاني في الطرف الأيمن من العلاقة (٤ ,١٢) والذي يعطي اشتقاقه بالحدين الثالث والرابع من الطرف الأيمن للعلاقة (٤ ,١٣). وبذلك فإن العلاقة الثانية من (٤ ,٢٣) تكافئ:

$$h - g\frac{D}{y}\int_R^\infty f(x)dx - 0 = 0$$

والتي تقود إلى:

$$\int_R^\infty f(x)dx = \frac{hy}{gD} \qquad (٤ ,٢٥)$$

علينا إذاً إيجاد القيم المثلى لكل من y و R من المعادلتين (غير الخطيتين) (٤ ,٢٤) و (٤ ,٢٥) وهو أمر لا يخلو من الصعوبة نظراً لأن العلاقة (٤ ,٢٥) تعبر عن R بشكل ضمني وغير مستقل عن y كما أن العلاقة (٤ ,٢٤) تعبر عن y بدلالة $\bar{S}$ التي تحوي R. كذلك ثمة صعوبة أخرى ناتجة عن إثبات وجود الحل ولكننا سنذلل هذه الأخيرة بقبول نتيجة النظرية التالية دون إثبات.

نظرية (٤ ,١):

لدى إعطاء R القيمة صفر نحصل من العلاقة (٤ ,٢٤) على القيمة $y = \hat{y} = \sqrt{\dfrac{2D[k + g.E(x)]}{h}}$ ونحصل من العلاقة (٤ ,٢٥) على القيمة $y = \tilde{y} = \dfrac{gD}{h}$ فإذا كان $\tilde{y} > \hat{y}$ فيوجد عندئذٍ حلاً أمثلياً وحيداً للمشكلة.

وفي حال تحقق شروط النظرية (٤ ,١) فيمكن إيجاد الحل الأمثل من خلال الخوارزمية التالية:

خوارزمية (٤ ,١):

الخطوة الأولى: ضع $y = y_1 = \sqrt{\dfrac{2Dk}{h}}$ (نذكر بأن y_1 تساوي الكمية الاقتصادية للطلب كما سبق ورأينا في الفصل الثاني). ثم استخدم هذه القيمة في (٤ ,٢٥) لحساب قيمة R ولتكن $R=R_1$.

الخطوة الثانية: استخدام القيمة $R=R_1$ في (٤ ,٢٤) للحصول على قيمة ثانية لـ y ولتكن $y=y_2$ ثم استخدام القيمة $y=y_2$ في (٤ ,٢٥) لحساب قيمة ثانية لـ R ولتكن $R=R_2$.

قم بتكرار العمل في الدورة الثانية حتى تصل إلى قيمتين متقاربتين جداً لـ R عندئذٍ تكون آخر قيمتين حصلت عليهما لـ y و R هي القيم المثلى لهما وعندها عوض هذه القيم المثلى لـ y و R في العلاقة (٤ ,٢٢) فتحصل على أقل قيمة متوقعة لمجموع التكاليف في واحدة الزمن.

سنوضح كيفية تطبيق هذه الخوارزمية من خلال المثال التالي:

مثال (٤ ,٣):

في ن.م.م للمخزون لدينا البينات التالية: الطلب متغير عشوائي يتبع توزيعاً منتظماً دالة كثافته الاحتمالية هي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}; & 0\le x\le 10\\ 0; & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

D = ١٠٠٠ وحدة، h = ١ دولار للوحدة في وحدة الزمن، g = ٢دولار للوحدة في وحدة الزمن k = ١٠ دولار لكل طلبية والمطلوب إيجاد القيمة المثلى لكل من الطلبية y ونقطة إعادة الطلب R.

الحل:

بموجب العلاقة (٤ ,٢١) فإن:

$$\overline{S}=\int_R^{10}\frac{1}{10}(x-R)dx=\frac{R^2}{20}-R+5$$

وبموجب العلاقة (٤ ,٢٥) فإن:

$$\int_R^{10}10dx=\frac{hy}{gD}\Rightarrow R=\frac{-10hy}{gD}+10$$

لدينا أيضاً:

$$\hat{y}=\sqrt{\frac{2\times1000(10+2\times5)}{1}}=200,E(x)=\int_0^{10}x\frac{1}{10}dx=5$$

$\hat{y}=\frac{2(1000)}{1}=2000$. فبما أن $\tilde{y}>\hat{y}$ فيوجد حل أمثل وحيد نستطيع الحصول عليه بتطبيق الخوارزمية (٤ ,١) أعلاه كما يلي:

$y_1=\sqrt{\frac{2\times10\times1000}{1}}=141.42136$ وبالتعويض في عبارة R نجد $R_1=\frac{-10\times1\times141.42136}{2\times1000}+10=9.30$ وبالتعويض في عبارة $\overline{S}$ نجد $\overline{S}$=0.0249932 وباستخدام (٤ ,٢٤) نجد y_2= 141.77437 وباستخدام عبارة R نجد R_2= 9.2911. ثم نجد y_3=141.77663 و R_3= 9.2911 وهنا يمكننا التوقف لأن $R_3\approx R_2$ والقيم المثلى لـ y و R هما:

$y^*=y_3$=141.77663 وحدة و $R^*=R_3$=9.2911 وحدة.

ومن (٤ ,٢٢) نجد أن أقل تكلفة مقابلة لذلك هي دولار $TCU(y^*,R^*)= 146.07$.

(٤ ,٦) نماذج ضبط المخزون للفترة واحدة

لوحظ في الواقع العملي أنه لا ضرورة لمعالجة بعض مسائل المخزون بشكل مستمر أو دوري. ويرجع ذلك إلى طبيعة الطلب على بعض السلع. فقد تكون السلعة نادرة أو يخشى فقدانها فيلجأ النظام عندئذٍ إلى تقدير كامل احتياجه من هذه السلعة لفترة معينة ويقوم بطلبها (أو إنتاجها) دفعة واحدة في بداية هذه الفترة. وقد يكون الطلب على السلعة ذو طبيعة موسمية (في الأعياد ـ العطل ـ المناسبات) وعندئذٍ يتم التخطيط للطلبية لمثل هذه السلع خلال تلك المواسم ومن الواضح أن الاستهلاك (الطلب) في مثل هذه الحالات هو ذو طبيعة عشوائية. وسنفترض في كل هذه النماذج أن هذا الاستهلاك يتبع توزيعاً احتمالياً (سنرمز لدالة كثافة الاحتمالية بالرمز $f(x)$ وسنعتبر أن $f(x)$ معروفة وغير متغيرة مع الزمن كما سنرمز بالرمز $F(x)$ لدالة التوزيع التراكمي لهذا الطلب). سنبدأ أولاً بأبسط هذه النماذج.

(٤ ,٦ ,١) نموذج فترة واحدة مع عدم السماح بالعجز وإهمال تكلفة الطلبية

يشتهر هذا النموذج أيضاً بنموذج بائع الجرائد (Newsboy problem). فبائع الجرائد لا يعرف بشكل مؤكد كم سيكون عليه الطلب من جريدة ما بالضبط، فإن اشترى أكثر من اللازم سيتعرض لخسارة قيمة الجرائد التي لا تباع حتى نهاية اليوم وإن اشترى أقل من اللازم فإنه سيخسر بعضاً من ربحه (وربما بعضاً من زبائنه) والذي يمكن أن يحصل عليه لو كانت الجرائد متوافرة. فالطلب إذاً ذو طبيعة عشوائية. ولكن الخبرة الطويلة للبائع أو لمزوده، والتي قد تكون مدعومة بتسجيل لبيانات سابقة، تمكنه من تقدير التوزيع الاحتمالي لمثل هذا الطلب. وعلى ضوء ذلك يرغب البائع بشراء الكمية المثلى من الجرائد وسيكون ذلك في مطلع الفترة (كل يوم ـ كل أسبوع ـ كل شهر) والتي تجعل أرباحه المتوقعة أكبر ما يمكن. ونصادف في الواقع العملي الكثير من الحالات المماثلة لحالة بائع الجرائد التي شرحناها أعلاه.

يقوم نموذج الفترة الواحدة هذا على فرضيتين أساسيتين هما:

(١) إهمال تكلفة الطلبية. وتبرير ذلك أنه في حالة بائع الجرائد مثلاً فإن مزوده قد يتعهد بإيصال الطلبية من الجرائد في مطلع كل يوم (أو أسبوع أو شهر).

(٢) عدم السماح بالعجز. ويعود ذلك لأمرين أولهما تلافي تكاليف العجز وثانيهما تبسيط النموذج.

أما المصطلحات التي ستستخدم لبناء النموذج فهي:

q: عدد الوحدات المطلوبة أو المنتجة (مقدار الطلبية) لكامل الفترة.

D: معدل الطلب أو الاستهلاك لكامل الفترة.

C: سعر شراء الوحدة.

S: سعر بيع الوحدة.

ϑ: القيمة المسترجعة للوحدة غير المباعة.

بناء النموذج:

حسبما افترضناه أعلاه لدينا إمكانيتين:

(i) أن يزيد استهلاك السلعة عن الكمية المطلوبة منها (D>q) عندئذٍ يحقق البائع ربحاً صافياً قدره P(q)= q(S-p).

(ii) ألا يزيد استهلاك السلعة عن الكمية المطلوبة منها عندئذٍ يحقق البائع ربحاً قدره P(q)= DS+ϑ(q-D)-Cq . ولإيجاد القيمة المتوقعة للربح والتي سنرمز لها بالرمز E{P(q)} نميز حالتين.

الحالة الأولى: التوزيع الاحتمالي f (D) لـ D متصلٍ عندئذٍ.

$$E\{P(q)\} = \int_q^\infty q(S-k)f(D)dD + \int_0^q [DS + \vartheta(q-D) - Cq]f(D) \backslash \backslash dD \qquad (٢٦, ٤)$$

الحالة الثانية: التوزيع الاحتمالي f(D) لـ D منفصل عندئذٍ

$$E\{P(q)\} = \sum_{D=q+1}^\infty [q(S-C)]\ f(D) + \sum_{D=0}^q [DS + \vartheta(q-D) - Cq]\ f(D) \qquad (٢٧, ٤)$$

والهدف الرئيس هو إيجاد القيمة q^* لـ q والتي تجعل E{P(q)} أكبر ما يمكن. ولدينا بهذا الخصوص النتائج التالية.

نظرية (٤, ٢):

إذا كان f(D) متصلاً فإن القيمة المثلى q^* يجب أن تحقق العلاقة:

$$F(q^*) = \frac{S-C}{S-\vartheta} \tag{٤, ٢٨}$$

البرهان: حسب قواعد حساب التفاضل فإن الشرط الضروري لكي يبلغ E{P(q)} قيمة عظمى هو:

$$\frac{dE\{P(q)\}}{dq} = 0 \tag{٤, ٢٩}$$

وبحسب العلاقة (٤, ١٣) فإن:

$$\begin{aligned}\frac{dE\{P(q)\}}{dq} &= \int_q^{\infty}(S-C)f(D)dD - q(S-C)\ f(q)\\ &\quad + \int_0^q(\vartheta-C)f(D)dD + q(S-C)f(q)\\ &= (S-C)\left[1-\int_0^q f(D)dD\right] + (\vartheta-C)\int_0^q f(D)dD\\ &= (S-C) - (S-\vartheta)\int_0^q f(D)dD\\ &= (S-C) - (S-\vartheta)\ F(q)\end{aligned}$$

وبذلك فإن العلاقة (٤, ٢٩) تقتضي العلاقة (٤, ٢٨) المطلوب إثباتها.

نظرية (٤, ٣):

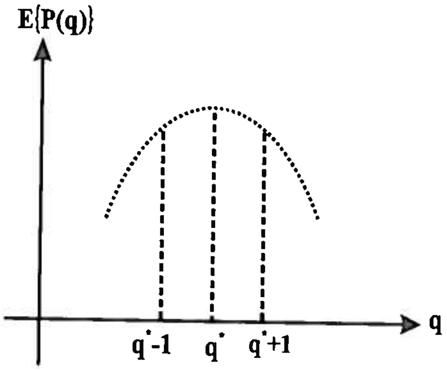
إذا كان f(D) منفصلاً فإن القيمة المثلى q^* يجب أن تحقق.

$$F(q^*-1) \le \frac{S-C}{S-\vartheta} \le F(q^*) \tag{٤, ٣٠}$$

البرهان: لكي تكون q^* قيمة مثلى لـ E{P(q)} يجب أن يتحقق لدينا:

$$E\{P(q^*-1)\} \le E\{P(q^*)\} \tag{٤, ٣١}$$

$$E\{P(q^*)\} \geq E\{P(q^*+1)\} \quad (٤ ,٣٢)$$



الشكل (٤ ,٣)

لنلاحظ أولاً أن العلاقة (٤ ,٢٧) تكافئ

$$E\{P(q)\} = (S-\vartheta)\{\sum_{D=0}^{q} Df(D) + q\sum_{D=q+1}^{\infty} f(D)\} - q(C-\vartheta)D \quad (٤ ,٣٣)$$

وباستبدال q-1 بـ q في العلاقة (٤ ,٣٣) نجد:

$$E\{P(q-1)\} = (S-\vartheta)\left\{\sum_{D=0}^{q-1} Df(D) + (q-1)\sum_{D=q}^{\infty} f(D) - (q-1)(C-\vartheta)\right\}$$

$$= (S-\vartheta)\left\{\sum_{D=0}^{q-1} Df(D) + q\sum_{D=q}^{\infty} f(D) - \sum_{D=q}^{\infty} f(D)\right\} - (q-1)(C-\vartheta)$$

$$= (S-\vartheta)\left\{\sum_{D=0}^{q} Df(D) + q\sum_{D=q+1}^{\infty} f(D) - \left[1-\sum_{0}^{q-1} f(D)\right]\right\} - (q-1)(C-\vartheta)$$

$$= (S-\vartheta)\left\{\sum_{D=0}^{\infty} qDf(D) + \sum_{D=q+1}^{\infty} f(D)\right\} - (S-\vartheta)[1-F(q-1)] - (q-1)(C-\vartheta)$$

وبذلك فإن العلاقة (٤ ,٣١) تكافئ:

$E\{P(q)\} - E\{P(q-1)\} \geq 0 \Leftrightarrow$

$(S-\vartheta)[1-F(q-1)] - (C-\vartheta) \geq 0 \Leftrightarrow$

أو

$$F(q-1) \leq \frac{S-C}{S-\vartheta}$$

وباستبدال q+1 بـ q في العلاقة (٤ ,٣٣) وملاحظة أن (٤ ,٣٢) تكافئ $E\{P(q)\} - E\{P(q+1)\} \geq 0$ نستطيع التحقق أن هذه الأخيرة تكافئ:

$$F(q) \geq \frac{S-C}{S-\vartheta}$$

وبذلك يتم إثبات العلاقة (٤ ,٣٠).

وسنوضح كيفية تطبيق النتائج النظرية أعلاه من خلال المثالين التاليين الطلب في أحدهما متغير عشوائي مستمر وفي الآخر منفصل.

مثال (٤, ٤):

وجد أن الطلب على سلعة موسمية يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ٧٠٠٠ وحدة وانحراف معياري ٤٠٠٠ وحدة فما هو عدد الوحدات الواجب شراؤها من هذه السلعة بحيث يتحقق أكبر ربح موسمي من هذه السلعة وما هي القيمة المتوقعة لهذا الربح إذا كان C = ٦٠ دولار، S = ٨٠ دولار، ϑ = ١٠ دولار.

الحل:

حسب العلاقة (٤, ٢٨) فإن الكمية المثلى q^* يجب أن تحقق

$$F(q^*) = \Pr\{D \leq q^*\} = \frac{80-60}{80-10} = \frac{20}{70} = \frac{2}{7} = 0.2857 \Leftrightarrow$$

$$\Pr\left\{\frac{D-7000}{4000} \leq \frac{q^*-7000}{4000}\right\} = 0.2857 \Leftrightarrow$$

$$\Pr\left\{Z \leq \frac{q^*-7000}{4000}\right\} = 0,2857$$

وباستخدام جداول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن:

$$\frac{q^*-7000}{4000} \approx -0.5659 \quad \Leftrightarrow \quad q^* = ٤٧٣٦,١٢١ \text{ وحدة}$$

ولحساب القيمة المتوقعة للربح المقابل لـ q^* نطبق العلاقة (٤, ٢٦) فنجد أنه يساوي:

$$\int_{q^*}^{\infty} q^*(80-60)f(D)dD + \int_0^{q^*}\left[80D + 10(q^*-D) - 60q^*\right]f(D)dD$$

$$= 94400\int_{q^*}^{\infty} f(D)dD - 236000\int_0^{q^*} f(D)dD + 90\int_0^{q^*} Df(D)dD$$

حيث f(D) هو التوزيع الطبيعي للطلب بمتوسط ٧٠٠٠ وانحراف معياري ٤٠٠٠ وبإجراء الحسابات نجد أن الربح أعلاه يساوي ٤٤٨٢٨,٢٢ دولار.

مثال (٤ ,٥):

يمكن شراء إحدى السلع النادرة بقيمة ٤٠ دولار للوحدة وبيعها بقيمة ٥٠ دولار وقد وجد أن الطلب على هذه السلعة خلال فترة زمنية قدرها شهرين يتبع التوزيع الاحتمالي المعطى بالجدول (٤ ,٤):

جدول (٤ ,٤)

عدد الوحدات d	٠	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠
Pr{D=d}=f(d)	٠	٠,٠٥	٠,١	٠,١٥	٠,٢٠	٠,٢٠	٠,١٥	٠,١٠	٠,٠٥

فكم هو عدد الوحدات الواجب شراؤها من هذه السلعة إذا كانت $\vartheta=\$10$ وما هو أكبر ربح متوقع عندئذٍ؟

الحل:

من جدول التوزيع الاحتمالي أعلاه نجد أن التوزيع المتجمع F(D) معطى كما في الجدول (٤, ٥):

جدول (٤, ٥)

d	٠	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠
$F(d) = Pr\{D \le d\}$	٠	٠,٠٥	٠,١٥	٠,٣٠	٠,٥٠	٠,٧٠	٠,٨٥	٠,٩٥	١

وحسب بيانات المثال نجد $\frac{S-C}{S-\vartheta} = \frac{50-40}{50-10} = \frac{1}{4} = 0.25$

وبحسب العلاقة (٤ ,٣٠) فإن القيمة المثلى q^* يجب ن تحقق

$F(q^*-1) \le 0.25 \le F(q^*)$

وبحسب جدول F(d) فإن:

$F(20) = 0.15 < 0.25 < 0.30 = F(30)$

لذا فإن $q^*=30$ وحدة (نذكر بأن التوزيع F(x) متصل من اليمين). ولحساب الربح المتوقع نطبق العلاقة (٤ ,٢٧) من أجل $q=30$ فنجد أن هذا الربح يساوي:

$$\sum_{D=31}^{80} 30(50-40)f(D)+\sum_{D=0}^{30}\left[50D+10(30-D)-1200\right]\ f(D)$$

$$=\sum_{D=0}^{30}\left[40Df(D)-900f(D)\right]+\sum_{D=31}^{80}300f(D)$$

وحسب جدول f(d) نجد أن المقدار الأخير يساوي ٧٠ دولار.

في النماذج التالية لفترة الواحدة سيكون الهدف هو جعل التكاليف المتوقعة أقل ما يمكن.

(٤, ٦, ٢) نموذج فترة واحدة مع السماح بالعجز وإهمال تكلفة الطلبية.

يختلف هذا النموذج عن النموذج السابق بأن العجز مسموح به. وبما أن الهدف هو جعل التكاليف المتوقعة أقل ما يمكن لذا يلزمنا أولاً تحديد بعض المصطلحات وهي كالآتي:

c: سعر شراء أو إنتاج الوحدة.

h: تكلفة تخزين الوحدة في فترة واحدة.

g: تكلفة العجز للوحدة في فترة واحدة.

D: مقدار الطلب لكامل الفترة (وهو متغير عشوائي).

x: كمية المخزون المتوافرة في بداية الفترة.

y: الكمية المتوافرة في بداية الدورة بعد استلام الطلبية مباشرة.

ومن الواضح أن y تساوي x زائداً الطلبية التي وصلت في بداية الدورة. ولما كانت هذه الأخيرة هي متغير القرار ولما كانت x معلومة وثابتة فإنه يمكن اعتبار y هو متغير القرار.

بناء النموذج: تتكون التكاليف من تكاليف الشراء وتكاليف التخزين وتكاليف العجز وقبل حساب هذه التكاليف نلاحظ ما يلي:

الكمية المخزونة خلال كامل الفترة كدالة في y والتي سنرمز لها بالرمز $H(y)$ تعطى بـ

$$H(y)=\begin{cases} y-D: & y>D \text{ إذا كان} \\ 0: & y\le D \text{ إذا كان}\end{cases} \qquad (٤, ٣٤)$$

مقدار العجز خلال كامل الفترة كدالة في y والتي سنرمز لها بالرمز $G(y)$ يعطي بـ:

$$G(y)=\begin{cases}0: & D<y \quad \text{إذا كان} \\ D-y: & D\geq y \quad \text{إذا كان}\end{cases} \qquad (٣٥, ٤)$$

ولذا فإن التكلفة الكلية لكامل الفترة كدالة في y سنرمز لها بالرمز C(y) تعطى بـ:

$$C(y)= c(y-x)+hH(y) + gG(y) \qquad (٣٦, ٤)$$

ولحساب القيمة المتوقعة لـ C(y) ومن ثم أقل قيمة متوقعة نميز حالتين:

أ – D **متغير عشوائي متصل**. عندئذٍ (نذكر بـ (٤, ٣٤) و (٤, ٣٥)) يكون

$$E\{C(y)\}=c\,(y-x)+h\int_0^y (y-D)\,f(D)dD+g\int_y^\infty (D-y)f(D)dD \qquad (٣٧, ٤)$$

وكشرط ضروري لبلوغ E{C(y)} أقل قيمة لها لدينا (نذكر بالعلاقة (٤, ١٣))

$$\frac{dE\{C(y)\}}{dy}=0 \Leftrightarrow$$

$$c+h\int_0^y f(D)dD-g\int_y^\infty f(D)dD=0$$

ولكن

$$\int_y^\infty f(D)dD=1-\int_0^y f(D)dD$$

ومنه نجد أن:

$$\int_0^y f(D)dD=\frac{g-c}{g+h} \qquad (٣٨, ٤)$$

بشرط أن g > c (يمكن تبرير مثل هذا الشرط بأن تكاليف العجز تفوق أحياناً تكاليف الشراء وخاصة في السلع النادرة).

لاحظ أن $\frac{d^2E\{C(y)\}}{y^2}=(h+g)f(y)>0$

لذا فإن العلاقة (٤, ٣٨) تعطي قيمة مثلى وحيدة لـ y ولتكن y^*.

ب – D متغير عشوائي منفصل. عندئذٍ يكون :

$$E\{C(y)\} = c(y-x) + h\sum_{D=0}^{y}(y-D)f(D) + g\sum_{D=y+1}^{\infty}(D-y)f(D) \qquad (٣٩,\ ٤)$$

وهنا فإن الشرطين التاليين:

$$E\{C(y^*)\} \le E\{C(y^*+1)\} \qquad (٤٠,\ ٤)$$

$$E\{C(y^*)\} \le E\{C(y^*-1)\} \qquad (٤١,\ ٤)$$

هما شرطان ضروريان لكي تبلغ $E\{C(y^*)\}$ قيمة صغرى عند $y=y^*$ وبهذا الخصوص لدينا النتيجة التالية:

نظرية (٤, ٤):

إذا كان D متغيراً منفصلاً فإن y^* يجب أن تحقق:

$$F(y^*-1) \le \frac{g-c}{g+h} \le F(y^*) \qquad (٤٢,\ ٤)$$

حيث $g > c$ كما في حالة المتغير المتصل.

البرهان: يمكن إثبات (٤٢, ٤) من (٤٠, ٤) و (٤١, ٤) بطريقة مماثلة للطريقة التي برهنا فيه النظرية (٣, ٤) أعلاه.

أما السياسة المثلى لنموذج الفترة الواحدة هذا فهي:

إذا كان $y^*>x$ فالحجم الأمثل للطلبية هو (y^*-x) وحدة.

أما إذا كان $y^*\le x$ فلا داعي لطلبية جديدة.

وسنوضح كيفية حساب y^* من خلال المثال التالي.

مثال (٤, ٦):

في نموذج مخزون لفترة واحدة وجد أن سعر الوحدة c = ٥ دولار وتكلفة تخزينها في الشهر h = ٠,٥ دولار أما تكلفة عدم توافرها فتساوى ٤,٥ دولار شهرياً. إذا افترضنا أن الطلب خلال هذه الفترة هو متغير عشوائي وأنه يمكن إهمال تكلفة الطلبية فالمطلوب مايلي:

(١) إيجاد السياسة المثلى (الكمية المثلى للطلبية) لهذه الفترة إذا كان الطلب يتبع التوزيع المنتظم فوق الفترة [0,10] وذلك لكل من الحالتين x=12, x=3. ثم إيجاد التكلفة المتوقعة المقابلة.

(٢) نفس المطلوب في (١) ولكن الطلب في هذه الحالة منتظماً فوق المجموعة {3,4,5,6,7,8}.

الحل:

(١) هنا لدينا

$$f(D)=\begin{cases}\frac{1}{10} & ; \quad 0\le D\le 10\\ 0 & \text{عدا ذلك:}\end{cases}$$

وبتطبيق العلاقة (٤, ٣٨) على بيانات المسألة نجد:

$$\int_0^y \frac{1}{10}dD=\frac{4.5-0.5}{4.5+0.5}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow\frac{y}{10}=\frac{4}{5}\Rightarrow y^*=8$$

فمن أجل x=3 يجب طلب ٨ − ٣ = ٥ وحدات ومن أجل x=12 لا داعي لطلبية جديدة.

وتحسب التكلفة المتوقعة المقابلة من العلاقة (٤, ٣٧) وهي:

$$E\{C(y^*=8)\}=0.5(8-3)+0.5\int_0^8(8-D)\frac{1}{10}dD+4.5\int_8^{10}(D-8)\frac{1}{10}dD$$

وبإجراء الحسابات نجد $E\{C(y^*)\}$ = ٥ دولار.

(٢) بما أن الطلب هنا ذو وطبيعة منفصلة ومنتظماً فوق المجموعة S={3,4,5,6,7,8} فإن $f(d)=\Pr\{D=d\}=\frac{1}{6}$ حيث $d\in S$ وبذلك فإن F(d) يعطي كما في الجدول (٤, ٦):

جدول (٤, ٦)

d	٣	٤	٥	٦	٧	٨
$F(d)=\Pr\{D\le d\}$	١/٦	٢/٦	٣/٦	٤/٦	٥/٦	١

وحسب (٤, ٤٢) فإن $F(y^*-1) \le \frac{g-c}{g+h} = \frac{4}{5} \le F(y^*)$ وحسب جدول $F(d)$ القيمة $\frac{4}{5}$ تقع بين القيمتين $\frac{4}{6}$ و $\frac{5}{6}$ وبذلك فإن $y^* = 6$ فمن أجل $x = 3$ يجب طلب ٦-٣= ٣ وحدات ومن أجل $x = 12$ لا داعي لطلبية جديدة أما التكلفة المتوقعة المقابلة فتحسب من العلاقة (٤, ٣٩) حيث نجد:

$$E\{C(y^*=6)\}=0.5\,(6-3)+0.5\sum_{D=0}^{6}(6-D)\frac{1}{6}+4.5\sum_{D=7}^{8}(D-6)\frac{1}{6}=3.25 \text{ دولار}$$

(٤, ٦, ٣) نموذج فترة واحدة مع السماح بالعجز وعدم إهمال تكلفة الطلبية (سياسة (s-S))

يختلف هذا النموذج عن سابقه بأن تكلفة الطلبية الواحدة والتي سنرمز لها بالرمز K غير مهملة فإذا رمزنا بـ $\overline{C}(y)$ للتكلفة الكلية لكامل الفترة فإن:

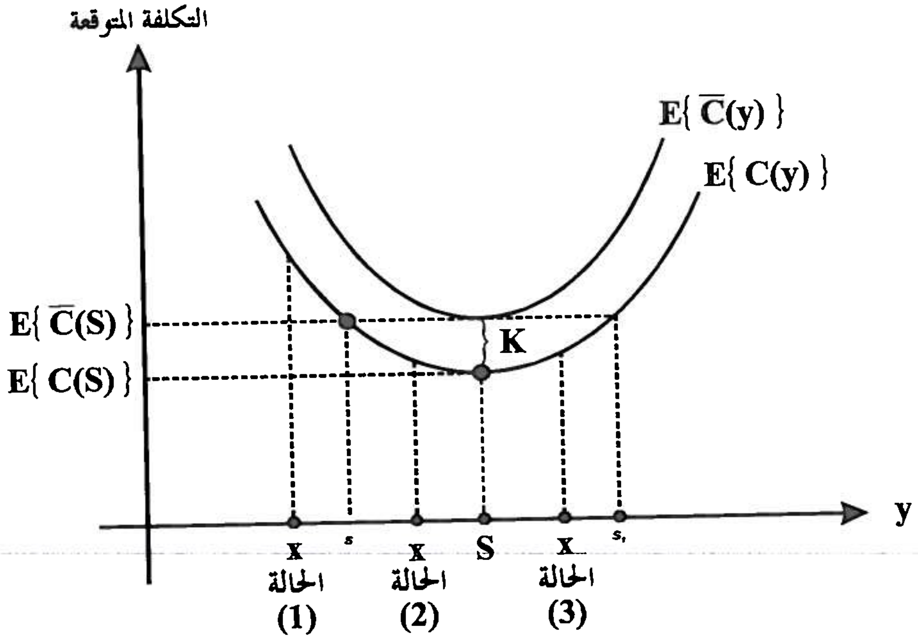
$$\overline{C}(y) = C(y) + K \qquad (٤, ٤٣)$$

وبالتالي:

$$E\{\overline{C}(y)\} = E\{C(y)\}+K \qquad (٤, ٤٤)$$

حيث $C(y)$ معطاة في (٤, ٣٦) و $E\{C(y)\}$ معطاة بـ (٤, ٣٧) أو بـ (٤, ٣٩) وذلك حسبما يكون الطلب متغيراً عشوائياً متصلاً أو منفصلاً.

لنتناول الحالة الأولى مثلاً. فالعلاقة (٤, ٤٤) تقود إلى $\frac{dE\{C(y)\}}{dy} = \frac{dE\{\overline{C}(y)\}}{dy}$ و $\frac{d^2E\{C(y)\}}{dy2} = \frac{d^2E\{\overline{C}(y)\}}{dy2}$ ولما كان $\frac{d^2E\{C(y)\}}{dy2} > 0$ حسبما بيناه أعلاه فإن كلاً من الدالتين $E\{C(y)\}$ و $E\{\overline{C}(y)\}$ هي دالة محدبة وأن $E\{\overline{C}(y)\}$ تنتج عن $E\{C(y)\}$ بانسحاب قدره K كما في الشكل (٤, ٤).



الشكل (٤, ٤)

لنعرف القيمتين s, S كما يلي:

$S=y^*$ حيث y^* هي قيمة y الناتجة من (٤, ٣٨)

$E\{C(s)\}= E\{\overline{C}(S)\}= E\{C(S)\}+K$ بحيث $s<S$ (٤, ٤٥)

ولنذكر بأن x هي مقدار المخزون المتوافر مسبقاً في بداية الفترة عندئذٍ لدينا الحالات التالية:

الحالة (١). $x<s$: فإذا تم أي طلبية جديدة مقدارها y-x(y>x) فإن الشكل (٤, ٤) أعلاه يدل على أن $E\{C(x)\}$ أكبر من أقل قيمة لـ $E\{\overline{C}(y)\}$ عندما $E\{\overline{C}(S)\}=y>x$ وبالتالي $y^*=S$ والحجم الأمثل للطلبية هي S-x.

الحالة (٢). $s \le x \le S$: عندئذٍ من أجل طلبية جديدة مقدارها y-x(y>x) نجد من الشكل (٤, ٤) أعلاه أن أصغر من أو تساوي $E\{C(x)\}$ أقل قيمة لـ $E\{\overline{C}(y)\}$ عندما y>x ومنه $y^*=x$ ولا داعي لطلبية جديدة.

الحالة (٣). $x > S$: نجد من الشكل (٤, ٤) أعلاه أن $E\{(x)\} > E\{\overline{C}(y)\}$ لجميع قيم $y > x$ ومنه $y^* = x$ ولا داعي كذلك لطلبية جديدة.

ويمكن تلخيص الحالات الثلاث أعلاه بأن السياسة المثلى والمعروفة باسم **سياسة (s-S)** كما يلي:

إذا كان $x < s$ فيتم طلب $S-x$ وهو الحجم الأمثل للطلبية.

إذا كان $x \geq s$ فلا داعي لطلبية جديدة.

ملاحظة (٤, ١):

إذا وجد أن $s < 0$ فيمكن تطبيق سياسة (s-S) بعد وضع $s = 0$.

ولنوضح الآن كيفية تطبيق النتائج النظرية لسياسة (s-S) من خلال المثال التالي:

مثال (٤, ٧):

لوحظ أن الطلب على نوع جديد من آلات التصوير خلال إجازة الصيف يتبع التوزيع المنتظم الذي دالة كثافته الاحتمالية

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} & ; \quad 0 \leq x \leq 100 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وقد وجد أن تكلفة الطلبية لهذه الفترة هي ٢٠٠ دولار إذا علم أن c = ٣٥ دولار، h = ١٠ دولار و g = ٥٠ دولار فما هي السياسة المثلى للطلب إذا كان مستوى المخزون المتوافر في بداية الفترة هو الصفر.

الحل: نلاحظ أولاً أن $g > c$ ومن العلاقة (٤, ٣٧) لدينا:

$$E\{C(y)\} = 35y + 10\int_{o}^{y}(y-D)\frac{1}{100}dD + 50\int_{y}^{100}(D-y)\frac{1}{100}dD$$

$$= 35y + \frac{1}{20}y^2 + \frac{1}{2}[10000 - 100y] = 0.05y^2 - 35y + 5000$$

لنحدد الآن قيمة $y^*=S$ وذلك من العلاقة (٤, ٣٨) فنجد:

$$\int_0^y \frac{1}{100}\,dD = \frac{50-35}{50+10} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{100}D\Big]_0^y = \frac{1}{4} \Rightarrow y^* = 25$$

الآن نطبق العلاقة (٤، ٤٥) لحساب قيمة s ‏($S=y^*=25$).

$$0.05s^2-35s + 5000 = 0.05\,(25)^2 - 35(25) + 5000 + 200 \Leftrightarrow$$

$0.05s^2 - 35s + 643.75 = 0$ (المميز= 1086.5)

$$s = \frac{35 \pm 33.11}{0.1} = \begin{cases} s = 680.1 \\ s = 18.9 \end{cases}$$ أو

وبذلك فإن s = ١٨,٩ (لأنه يجب اختيار s < S) وبما أن x = ٠ < s = ١٨,٩ فإن الحجم الأمثل للطلبية هو S-x = ٢٨ وحدة.

تعرضنا في الفقرة السابقة لبعض النماذج الاحتمالية ذات الفترة الواحدة لضبط المخزون وقد أشرنا في مطلع هذه الفقرة إلى ملائمة هذه النماذج لبعض مسائل الواقع العلمي. ومع ذلك فإن هذه النماذج لا تلائم جميع هذه المسائل ولذا فإننا سنستعرض في الفقرة التالية بعض النماذج الاحتمالية لضبط المخزون لفترات متعددة وذلك لحالتي الزمن المحدد وغير المحددة ونظراً لتعدد الفترات فإننا سنستخدم أسلوب البرمجة الديناميكية لبناء النماذج لحالة الزمن المحدد وتعدد الفترات ولكننا لن نتعرض لتفاصيل الحل في هذه الحالة (حالة الفترات المتعددة) نظراً لصعوبته من الناحية الرياضية ولكننا سنستعرض طريقة الحل لحالة الزمن غير المحدد والتي نحصل عليها من حالة الزمن المحدد بجعل عدد الفترات ينتهي إلى اللانهاية. كذلك ونظراً لتعدد الفترات فإننا سندخل على العوائد مفهوم ما يسمى عامل الخصم والذي سنعطي عنه أولاً فكرة موجزة.

مفهوم عامل الخصم:

من المعروف أن القيمة الشرائية لأي عملة تتناقص بشكل عام (وقد تتزايد) بمرور الزمن ويشار لمثل هذه الحالة عادة بالتضخم. فمثلاً ما يمكن شراؤه في الوقت الحالي بـ ١٠٠ دولار قد يحتاج إلى ١١٠ دولار بعد فترة (سنة، شهر،...) وبذلك فإن القيمة الشرائية للدولار تكون قد نقصت بحول ١٠٠% – ١١٠/١٠٠ = ٠,٠٩ ويشار إلى القيمة ٠,٠٩ بأنها عامل الخصم (Discount factor). فإن كان لدينا مقداراً من المال قدره A وكان عامل الخصم للفترة الواحدة

مساوياً r فإن قيمة هذا المقدار (الشرائية) بعد فترة (سنة، شهر، .. إلخ) تصبح rA وتصبح قيمة هذا المقدار الأخير بعد فترة أخرى $r^2A = r(rA)$ وهكذا تصبح قيمة المقدار A بعد m من الفترات مساوية $r^m.A$.

(٤, ٧) بعض نماذج الفترات المتعددة لضبط المخزون

سنستعرض في هذه الفقرة اثنين من النماذج الاحتمالية لضبط المخزون للفترات المتعددة نفترض فيها أن فترة الدراسة معروفة ومحددة مسبقاً وتتكون من عدد N نرمزها بـ 1, 2, ..., N من الدورات التخزينية يكون الوقت المتقدم فيها صفراً، كما أننا سنهمل فيها تكلفة الطلبية وذلك لتسهيل بناء وحل النموذج في كل حالة. ولذلك فإن التكلفة الكلية تتكون من ثلاثة أقسام هي تكلفة الشراء وتكلفة التخزين وتكلفة العجز.

وكما أشرنا أعلاه ونظراً لوجود عدة فترات فإننا سندخل ما أسميناه أعلاه عامل الخصم في هذه التكاليف. وفي جميع هذه النماذج سنعتبر أن الطلب D يتبع توزيعاً احتمالياً متصلاً دالة كثافة الاحتمالية f (D) لجميع الفترات. وسيكون الهدف في جميع هذه النماذج هو جعل العائد الصافي أكبّر ما يمكن.

(٤, ٧, ١) نموذج لضبط المخزون مع الاسترجاع الكامل للعجز وانعدام الوقت المتقدم

سوف نستخدم لهذا النموذج الرموز التالية:

λ_i: مستوى المخزون في بداية الفترة i وذلك قبل طلب (أو إنتاج) طلبية في هذه الفترة $i = 1, 2, ..., N$.

C: سعر شراء (أو إنتاج) الوحدة في أي فترة.

s: سعر بيع الوحدة في أي فترة.

P: الربح الصافي المتحقق من بيع وحدة متوفر في أي فترة.

h: تكلفة تخزين الوحدة من الفترة i إلى الفترة $i + 1$.

y_i: مقدار الطلبية في الفترة i $(i = 1, 2, ..., N)$.

D: معدل الاستهلاك للفترة i $(i = 1, 2, ..., N)$.

$C_i(\lambda_i)$: أكبر قيمة للربح الكلي الصافي للفترات $i, i+1, ..., N$.

قبل بناء النموذج نلاحظ أولاً أن مستوى المخزون في نهاية الفترة i والذي ينظر له على أنه مستوى المخزون في بداية الفترة $i + 1$ يعطى بـ

$$\lambda_i = y_i - D \qquad (٤٦, ٤)$$

وفي الفترة الأخيرة لدينا $\lambda_{N+1} = y_N - D$ لأنه لن يتم أي طلبية جديدة في نهاية الفترة الأخيرة، ونظراً لأن الدراسة مقصورة إلى نهاية الفترة N فإننا سنعتبر أن:

$$E\{C_{N+1}(\lambda_{N+1})\} = E\{C_{N+1}(y_N - D)\} = 0 \qquad (٤٧, ٤)$$

واستناداً للعلاقة (٤٧, ٤) فإن الطريقة التراجعية للبرمجة الديناميكية هي الأنسب للحسابات.

نود أن نشير أيضاً أنه بسبب السماح بالعجز فإن λ_i المعطاة بالعلاقة (٤٦, ٤) يمكن أن تكون سالبة في حالة زيادة الطلب D للفترة i عن الطلبية y_i لهذه الفترة لنلاحظ الآن ما يلي:

* تكلفة الشراء في الفترة i يساوي $C\ (y_i - \lambda_i)$.

* في حال عدم حصول عجز في الفترة i (أي $D \le y_i$) فإنه سيتم بيع D (وهو مقدار الطلب) من الوحدات وتخزين $y_i - D$ من الوحدات للفترة التالية ويكون الربح الصافي لهذه الفترة مساوياً $PD - h\ (y_i-D)$ والقيمة المتوقعة لهذا الربح تساوي:

$$\int_0^{y_i} \left[(PD - h(y_i - D)\right]\ f(D)dD$$

في حال حصول عجز في الفترة i (أي $D > y_i$) والذي يفترض أنه سيتم استراجعه في الفترات اللاحقة فإن مقدار هذا العجز يساوي $(D-y_i)$ من الوحدات. ونظراً لإمكانية بيع هذه الوحدات لاحقاً فإن ربحها الصافي هو $P(D-y_i)$ وبإدخال عامل الخصم فإن هذا الربح يصبح $rP(D-y_i)$.

كذلك فإن وقوع العجز في الفترة i يعني أنه لن يتم بيع سوى y_i من الوحدات بربح قدره Py_i، إضافة إلى ذلك فإن هناك خسارة في المبيعات بمقدار $D-y_i$ وحدة وقيمتها $s(D-y_i)$ وبذلك فإن القيمة المتوقعة لصافي العوائد في مثل هذه الحالة يساوي:

$$\int_{y_i}^{\infty} \left[rP(D - y_i) + Py_i - s(d - y_i)\right]\ f(D)dD$$

وحسب تعريف $C_i(\lambda_i)$ وبملاحظة العلاقة (٤٦, ٤)

$$y_i \geq \lambda_i \Leftrightarrow 0 \leq D = y_i - \lambda_i$$

وبذلك يكون:

$$E\{C_i(\lambda_i)\} = \underset{y_i \geq \lambda_i}{Max}\left\{\int_0^{y_i}[PD - h(y_i - D)]\ f(D)dD + \int_{y_i}^{\infty}[rP(d - y_i) + Py_i - s(D - y_i)]\ f(D)dD + r\int_0^{\infty}C_{i+1}(y_i - D)f(D)dD - C(y_i - \lambda_i)\right\},\ i = 1,2,\ldots,N \qquad (٤ ,٤٨)$$

لاحظ أن الحد الأخير في العلاقة يمثل القيمة المتوقعة للأرباح من الفترة i+1 إلى الفترة N ولذلك تم إدخال عامل الخصم عليه.

ويمكن من الناحية النظرية استخدام الطريقة التراجعية للبرمجة الديناميكية لإيجاد القيم المثلى لـ y_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ وذلك ابتداءً من المرحلة الأخيرة والتي تعتمد على استخدام نتيجة العلاقة (٤ ,٤٧) ولكننا سنكتفي باستعراض الحل لحالة الزمن غير المحدد والتي يمكن الحصول عليها من العلاقة (٤ ,٤٨) بجعل N تنتهي إلى اللانهاية حيث نأخذ عندها:

$y_i = y$ و $\lambda_i = y - D = \lambda$ لجميع الفترات (المتكررة) وحيث تؤول العلاقة (٤ ,٤٨) عندئذٍ إلى:

$$E\{C(\lambda)\} = \underset{y \geq \lambda}{Max}\left\{\int_0^{y}[PD - h(y - D)]\ f(D)dD + \int_{y}^{\infty}[rP(d - y) + Py - s(D - y)]\ f(D)dD + r\int_0^{\infty}C(y - D)f(D)dD - C(y - \lambda)\right\} \qquad (٤ ,٤٩)$$

وهي علاقة ذات متغير وحيد هو y ويمثل هذا المتغير مقدار الطلبية في بداية كل فترة بعد العلم أن مستوى المخزون هو λ.

ويمكننا الآن إيجاد القيمة المثلى لـ y من المعادلة:

$$\frac{dE\{C(\lambda)\}}{dy} = 0 \qquad (٤ ,٥٠)$$

والتي تكافئ:

$$-h\int_0^{y}f(D)dD + \int_{y}^{\infty}(-rP + P + s)\ f(D)dD + r\int_0^{\infty}\frac{dC(y - D)}{dy}f(D)dD - C = 0 \qquad (٤ ,٥١)$$

وكما هو ملاحظ ونظراً لأن $f(D)$ معطى فإن الصعوبة في حل المعادلة (٤, ٥١) تكمن في حساب المقدار $\frac{dC(y-D)}{dy}$ الذي يمثل معدل تغير $C(y - D)$ بالنسبة لـ y والذي يمكن حسابه كما يلي:

إن أي زيادة $\Delta y = \Delta(y - D) = \Delta\lambda$ في مستوى المخزون في بداية أي فترة سوف تؤدي إلى نقصان الكمية المطلوبة لتلك الفترة الأمر الذي يؤدي إلى توفير ما مقداره $C.\Delta\lambda$ وهذا التوفير ليس إلا زيادة في العائد الصافي وبالتالي فإن:

$$\frac{dC(y-D)}{dy} = C \qquad (٤, ٥٢)$$

وبتعويض (٤, ٥٢) في (٤, ٥١) نجد:

$$-h\int_0^y f(D)dD + \int_y^\infty(-rP + P + s)f(D)dD + rC\int_y^\infty f(D)dD - C = 0 \qquad (٤, ٥٣)$$

وبملاحظة أن:

$$\int_0^\infty f(D)dD = 1 \Leftrightarrow \int_y^\infty f(D)dD = 1 - \int_0^y f(D)dD$$

نجد من العلاقة (٤, ٥٣) أن:

$$\int_0^y f(D)dD = \frac{s + (1-r)(P-C)}{s + h + (1-r)P} \qquad (٤, ٥٤)$$

وتعطي العلاقة (٤, ٥٤) القيمة المثلى $y = y^*$ في كل فترة مع العلم أن مستوى المخزون في بدايتها هو λ. وبذلك فإن السياسة المثلى لحالة الزمن غير المحدد هذه هي:

$$\begin{cases} \text{إذا كانت } \lambda < y^* & \text{اطلب طلبية قدرها } y^* - \lambda \\ \text{إذا كانت } \lambda \geq y^* & \text{لا داعي لطلب أي مقدار} \end{cases} \qquad (٤, ٥٥)$$

(٤, ٧, ٢) نموذج لضبط المخزون مع الخسارة الكاملة للعجز وانعدام الوقت المتقدم

يختلف هذا النموذج عن النموذج المعطى في الفقرة (٤, ٧, ١) بأن العجز مسموح به ولكن لا يمكن استرجاع أي شيء منه أي أن هناك خسارة كاملة لهذا العجز. وسنفترض أن مثل هذه الخسارة ستؤدي فقط إلى خسارة العوائد الناتجة عن مقدار هذا العجز. وحسبما أوضحنا في

النموذج السابق فإن هذا مقدار هذه الخسارة هو $rP(D-y_i)$ والتي يجب شطبها من التكامل الثاني في العلاقة (٤٨, ٤) وبمراعاة ذلك نجد بالنسبة لهذا النموذج ما يلي:

أ – حالة الزمن المحدد (عدة فترات):

$$E\{C_i(\lambda_i)\} = \underset{y_i \ge \lambda_i}{Max}\left\{\int_0^{y_i}[PD - h(y_i - D)]\ f(D)dD + \int_{y_i}^{\infty}[Py_i - s(D - y_i)]\ f(D)dD + r\int_0^{\infty} C_{i+1}(y_i - D)f(D)dD - C(y_i - \lambda_i)\right. \qquad (٥٦, ٤)$$

حيث $i = 1, 2, ..., N$ و $E\{C_{N+1}(y_N-D)\} = 0$ كما في النموذج السابق.

ب – حالة الزمن غير المحدد (فترة متكررة):

$$E\{C(\lambda)\} = \underset{y \ge \lambda}{Max}\left\{\int_0^{y}[PD - h(y - D)]\ f(D)dD + \int_{y}^{\infty}[Py - s(D - y)]\ f(D)dD + r\int_0^{\infty} C(y - D)f(D)d\right. \qquad (٥٧, ٤)$$

ويمكن إيجاد القيمة المثلى لـ y بجعل مشتقة $E\ \{C(\lambda)\}$ المعطاة في (٥٧, ٤) بالنسبة لـ y مساوية للصفر حيث نجد وبطريقة مشابهة لما عملناه في النموذج السابق أن هذه القيمة المثلى تعطى من العلاقة:

$$\int_0^{y} f(D)dD = \frac{s + P - C}{s + h + P - rC} \qquad (٥٨, ٤)$$

وبافتراض أن القيمة المثلى التي تعطيها العلاقة (٥٨, ٤) هي y^* فإن السياسة المثلى لحالة الزمن غير المحدد في هذه الحالة تعطى أيضاً وفقاً لـ (٥٥, ٤).

تمارين

١- وجدت شركة لتوريد الأدوات الكهربائية أن الطلب الفعلي على بعض مصابيح الإنارة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ١٠٠٠٠ مصباح في السنة وبانحراف معياري قدره ١٠مصابيح والمطلوب:

(i) إيجاد مخزون الأمان المقابل لمستويات الخدمة $p_1=0.8$، $p_2=0.9$ و $p_3=0.95$.

(ii) بافتراض أن نموذج المخزون أعلاه هو نموذج EOQ بالبيانات التالية: h = ٠,٤ دولار للمصباح في السنة، k = ١٨٠ دولار للطلبية، g = ١دولار فما هو أفضل مستوى لمخزون الأمان من بين المستويات p_3, p_2, p_1 الواردة في (i) وما هي نقطة إعادة الطلب عندئذ.

(iii) أعد السؤال السابق (ii) من أجل القيم التالية لـ g.

أ- g = ٥ دولار، ب- g = ١٠ دولار و g = ١٥ دولار.

٢- وجدت شركة من سجلاتها السابقة المتعلقة باستهلاك إحدى السلع البيانات التالية (الوحدة الزمنية هي أسبوع) الموضحة في الجدول (٤, ٧).

جدول (٤, ٧)

عدد الوحدات المستهلكة	٧٠	٨٠	٩٠	١٠٠	١١٠	١٢٠
عدد مرات الاستهلاك	٣	٥	٢٢	٦٠	٦	٤

والمطلوب:

(١) أوجد التوزيع الاحتمالي لاستهلاك على هذه السلعة.

(٢) إذا علم أن تكاليف نفاذ المخزون للمرة الواحدة هو ٢٥ دولار وتكاليف تخزين الوحدة في الأسبوع هو ٣٥ دولار وتكاليف الطلب هي ١٠٠ دولار وأن الشركة تطلب من هذه السلعة بمقدار الكمية الاقتصادية للطلب EOQ فالمطلوب إيجاد أفضل مستوى

لمخزون الأمان المقابل لمستويات الخدمة $p_1=0.8$، $p_2=0.9$ و $p_3=0.958$؟ وما هي نقطة إعادة الطلب عندئذٍ؟

٣- في ن.م.م للمخزون لدينا البيانات التالية:

دالة الكثافة الاحتمالية للطلب خلال الوقت المتقدم هي
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{50} & ; \quad 0<x\leq 50\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

كذلك فإن:

D= ١٠٠٠٠ وحدة في السنة، h = ٢ دولار للوحدة في السنة، g = ٣ دولار للوحدة في السنة، و K = ٢٠ دولار لكل طلبية. أوجد القيم المثلى لكل من الطلبية ونقطة إعادة الطلب.

٤- أوجد القيم المثلى لكل من الطلبية ونقطة إعادة الطلب في ن.م.م بالبيانات نفسها الواردة في التمرين ٣ إلا أن الطلب يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ١٠٠وحدة في الشهر وانحراف معياري يساوي ٢ وحدة في الشهر.

٥- في دراسة حديثة أجريت على سلعة موسمية وجد أن تكلفة شراء الوحدة تقدر بـ ٨٠ دولار وتباع بـ١٢٠ دولار أما في حالة عدم بيع هذه السلعة فيمكن إعادتها إلى المورد واسترداد ٢٠ دولار لكل وحدة معادة. كذلك فقد وجد أن التوزيع الاحتمالي لاستهلاك هذه السلعة معطى كما في الجدول (٤, ٨):

جدول (٤, ٨)

عدد الوحدات	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
الاحتمال	٠,٠٥	٠,١٠	٠,١٥	٠,٢٠	٠,٢٠	٠,١٥	٠,١	٠,٠٥

(١) فما هي الكمية المثلى الواجب شراؤها لهذا الموسم والتي تحقق أكبر ربح ممكن وما هي القيمة المتوقعة لهذا الربح بافتراض أنه يمكن إهمال تكلفة الطلبية.

(٢) أعد السؤال في (١) بأخذ دولار 5=g، دولار 40=g لكل وحدة معادة.

٦- وجد أن الطلب على سلعة موسمية يتبع التوزيع المنتظم فوق الفترة [٣٠٠٠، ٧٠٠٠] يمكن شراء الوحدة بقيمة ٥٠ دولار وبيعها بقيمة ٩٠ دولار ولكن المورد لا يقبل رد أي وحدة غير مباعة مما يؤدي عندئذٍ إلى خسارة كاملة لقيمتها. والمطلوب:

(أ) ما هو عدد الوحدات الواجب شراؤها من هذه السلعة وما هو الربح المتوقع عندئذٍ.

(ب) أعد السؤال السابق (أ) بافتراض أن الطلب على السلعة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ٥٠٠٠ وحدة وانحراف معياري ٢٠٠٠ وحدة.

٧- تلقى أحد بائعي الجملة لنوع خاص من دراجات السباق عرضاً مغرياً لموسم الصيف القادم وذلك بمقدار ٢٠ دولار للدراجة وقد قدر بائع الجملة هذا أن بقاء أي دراجة يكلف ٤٥ دولار. ونظراً للعلاقة الخاصة بين المورد وبائع الجملة فإنه لا توجد تكلفة تذكر للطلبية. لوحظ كذلك أن الطلب على الدراجات يتبع التوزيع الأسي الذي د.ك.ا معطاة بـ $f(x) = \frac{1}{10000} e^{-x/10000}; x \geq 0$.

المطلوب تحديد الكمية المثلى الواجب طلبها من الدراجات والتكلفة المقابلة لذلك في الحالات:

أ. في حال توافر ١٠٠٠ دراجة في مخازن بائع الجملة من المواسم السابقة.

ب. في حال توافر ١٢٠٠٠ دراجة في مخازن بائع الجملة من المواسم السابقة.

٨- أعد السؤال في التمرين السابق ٧ من أجل سلعة موسمية تتوافر فيها البيانات التالية: h = ١دولار للوحدة في، c = ٢ دولار للوحدة و g = ٤دولار للوحدة والتوزيع الاحتمالي للطلب على هذه السلعة يعطي كما في الجدول (٤ ,٩):

جدول (٤ ,٩)

عدد الوحدات	٠	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠
الاحتمال	٠,١	٠,٢	٠,٢٥	٠,٢	٠,١٥	٠,١

وذلك في الحالتين: أ- x = ١٠ وحدة، ب- x = ١٢ وحدة.

٩- بالعودة إلى مثال الدراجات في التمرين ٧ إذا افترضنا وجود تكلفة للطلبية قدرها k = ٨٠٠ دولار فما هي سياسة (s-S) المثلى في الحالتين x = ٥٠٠ دراجة و x = ١٢٠٠٠دراجة.

١٠- يقوم مخبر بتوزيع الخبز في المواسم السياحية إلى الأسواق يومياً. تتكلف صناعة كل رغيف ٠,٢ دولار وفي حال عدم بيع أي رغيف فإنه يعاد إلى المخبز ليتم تخزينه بتكلفة ٠,١ دولار لكي يستفاد منه في أغراض أخرى. ونظراً للربح الكبير الذي يحققه المخبر في كل رغيف في المواسم السياحية فإن النقص في الإمدادات يكلفه ٠,٥ دولار للرغيف. وجد أن كل طلبية تتكلف ما مقداره ١٠٠ دولار وأن الطلب اليومي على الخبز في موسم سياحي يتبع التوزيع المنتظم فوق الفترة [١٠٠٠، ٢٠٠٠] ما هي سياسة (s-S) المثلى اليومية في الحالات التالية:

أ- يبدأ المخبز يومياً بمخزون قدره صفر من الأرغفة.

ب- يبدأ المخبز يومياً بمخزون قدره ١٢٠٠ رغيف تأتيه من مخابز سياحية أخرى بنفس التكلفة.

١١- أعد السؤال في تمرين ١٠ إذا علم أن التوزيع الاحتمالي للطلب اليومي على الخبز يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ١٥٠٠ رغيف وانحراف معياري ١٠٠ رغيف.

١٢ - لدينا نموذج من مخزون ذو فترة واحدة يتصف بما يلي:

العجز مسموح، تكلفة الطلبية مهملة، مستوى المخزون في بداية الفترة يساوي الصفر. إذا افترضنا أن القيمة المتوقعة لتكلفة المخزون معطاة بـ:

$$E\{C(y)\} = h\int_0^y (y - \frac{D}{2})f(D)dD + \frac{hy}{2}\int_y^\infty f(D)dD + \frac{g}{2}\int_y^\infty (D-y)f(D)dD$$

حيث y هو مستوى المخزون بعد الطلبية. والمطلوب:

آ) أوجد *y التي تجعل {E{C(y أقل ما يمكن.

ب) احسب قيمة *y خلال الفترة [1,5] إذا علمت أن:

h = ٠,٢٥ دولار للوحدة، g = ٨ دولار للوحدة. ثم احسب قيمة {(*E{C(y المقابلة.

١٣ - في نموذج مخزون لسلعة واحدة ولفترة واحدة وجد أن الطلب في فترة [a,b] يتبع التوزيع المنتظم فوق هذه الفترة وأنه يمكن إهمال تكلفة الطلبية والمطلوب:

آ) أثبت أن العلاقة (٤ ,٣٧) تصبح عندئذ.

$$E\{C(y)\} = c(y-x) + \frac{1}{2(b-a)}\left[h(y-a)^2 + g(b-y)^2\right]$$

ب) أثبت كذلك أن $y^* = \dfrac{a(c+h) - b(c-g)}{h+g}$ وأن:

$$E\{C(y^*)\} = \frac{1}{h+g}\left\{c\left[a(c+h) - b(c-g)\right] + \frac{(b-a)(c^2+hg)}{2}\right\} - cx$$

١٤ - في نموذج لسلعة واحدة ولفترة واحدة مع إهمال تكلفة الطلبية وجد أن الطلب يتبع التوزيع الأسي التالي:

$$f(D) = e^{-D}; D \ge 0$$

والمطلوب:

أ) أثبت أن:

$$E\{C(y)\} = (h+g)e^{-y} + (h+c)y - (cx+h)$$

ب) أثبت أن:

$$y^* = \ell n\left(\frac{h+g}{h+c}\right)$$

وأن:

$$E\{C(y)\} = (h+c)\left[1 + \ell n\left(\frac{h+g}{h+c}\right)\right] - (cx+h)$$

ج) احسب كلاً من y* و E{C(y*)} من أجل h = ٥ دولار للوحدة، وg = ٤,٥ دولار للوحدة. مفترضاً أن x = 0 ما هي سياسة التخزين المثلى في هذه الحالة.