مع الإجابة النموذجية

College of Sciences
Mathematical Department King Saud University

Mid-one exam M.201.
Second semester, 2024.
Course Instructor: **Prof.M. DAMLAKHI.**
Course Title: Math 201 (Differential an Integral Calculus).
Date: Tuesday 24/8/1445– 5 /3/2024.
Time: 1:30.

السؤال الأول (2+2+3) :

أ) أوجد مع الرسم مجال الدالة التالية:

$$f(x,y)=\frac{\ln(x^2-y)}{x^2+y^2+4}.$$

ب) اختبر كل من النهايتين التاليتين واحسب النهاية في حالة وجودها.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(2xy)}{x^2+y^2}. \qquad \lim_{(x,y)\to(-1,1)}\frac{3xy^2-x^2}{2x^2-y^2}$$

السؤال الثاني (3+2+2+2) :

إذا كانت الدالة $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x-1)^2y}{(x-1)^2+y^2} & ,(x,y)\neq(1,0)\\ 0 & ,(x,y)=(1,0)\end{cases}$.

1) برهن أن f متصلة عند $(1,0)$.

2) أوجد كلا" من $f_x(1,0)$ و $f_y.(1,0)$

3) ادرس قابلية التفاضل للدالة f عند النقطة $(1,0)$.

السؤال الثالث (2+4+3) :

أ) إذا كانت $z=xy+xF(\frac{y}{x})$ حيث F دالة في متغير واحد قابلة للاشتقاق.

برهن صحة العلاقة التالية: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

ب) أوجد النقاط الحرجة للدالة التالية: $f(x,y)=x^2+x-3xy+y^3-5$ ثم حدد نوعية القيم القصوى المحلية والنقاط السرجية إن وجدت.

ج) إذا كانت العلاقة التالية $F(x,y,z)=yz^2e^{xy}+3x\cos(y^2+z^2+4)=0$ تعرف دالة ضمنية $z=f(x,y)$ قابلة للتفاضل عند النقطة (x,y) اوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$.

الإجابة النموذجية للاختبار النهائي الفصل الأول
مقرر (1) رضيا - الفصل الثاني ١٤٤٥

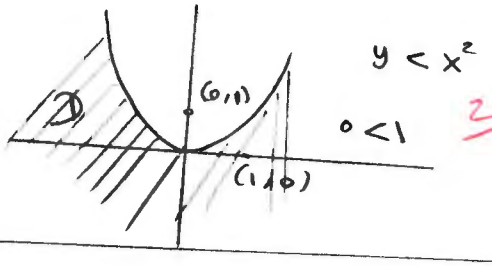
السؤال الأول: أ)

$$f(x,y)=\frac{\ln(x^2-y)}{x^2+y^2+4}$$

3 / 8

ا) مجال الدالة هو

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x^2-y>0\}$$ ①



2

ب)

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)}\frac{3xy^2-x^2}{2x^2-y}=\frac{(-3)(1)-1}{2-1}=\frac{-4}{1}=-4$$

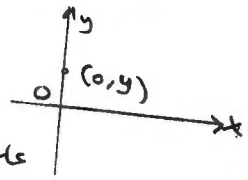
النهاية موجودة

2

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(2xy)}{x^2+y^2}$$ 3

على المحور y (معادلته $x=0$) لدينا

$$\lim_{y\to0}\left(\frac{0}{y^2}\right)=\lim_{y\to0}0=0$$



على المحور $x=y$ لدينا

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x^2)}{2x^2}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1,\quad t=2x^2$$

نضع

وهذه النهاية غير معرفة

السؤال الثاني:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2y}{(x-1)^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(1,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(1,0)\end{cases}$$

9

ا)

$$0\le|f(x,y)|\le|y|\to0\ \Longleftarrow\ 0$$

$$(x,y)\to(1,0)\qquad\qquad(x,y)\to(1,0)$$

ب) ②

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}|f(x,y)|=0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}f(x,y)=0=f(1,0)$$

وبالتالي فإن f متصلة عند النقطة $(1,0)$.

(2)

$$f_x(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0) - f(1,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{0}{h^2} - 0\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$ (2)

$$f_y(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,0+h) - f(1,0)}{h}$$

$$= \lim \frac{\left(\frac{0}{h^2} - 0\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{0}{h}\right) = 0$$ (2)

(3)

$$\Delta w = f(1+\Delta x, \Delta y+0) - f(1,0)$$

$$= \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\Delta w - f_x(1,0)\Delta x - f_y(1,0)\Delta y = \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \cdot \frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \cdot \|h\|$$ (3)

$$\epsilon = \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$$

لنا $\Delta x = 0$ (معادلة) Δy على المحور المحاذي، $\Delta y > 0$،

$$\lim_{\Delta y \to 0^+} \epsilon = \lim_{\Delta y \to 0^+} \left(\frac{0}{(\Delta y)^3}\right) = 0$$

على المسار $\Delta y = \Delta x$، لنا $\Delta x > 0$،

$$\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^3}{2\sqrt{2}(\Delta x)^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

بما أن $\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \epsilon \neq 0$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق

عند النقطة $(1,0)$

السؤال الثالث: (9)

(أ) 3

$z = xy + xF(y/x)$

(1) $z_x = y + F(y/x) + xF'(y/x)(-y/x^2)$

$= y + F(y/x) - (y/x)F'(y/x)$

(1) $z_y = x + x(\frac{1}{x})F'(y/x)$

$xz_x + yz_y = yx + xF(y/x) - yF'(y/x) + xy + yF'(y/x)$

$= 2xy + xF(y/x) = xy + z$

(1) $\boxed{xz_x + yz_y = xy + z}$

(ب) 4

$f(x,y) = x^2 + x - 3xy + y^3 - 5$

$f_x = 2x + 1 - 3y = 0$

$f_y = -3x + 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = x$

$2y^2 - 3y + 1 = 0$

$(2y-1)(y-1) = 0 \Rightarrow y = 1, \ y = \frac{1}{2}$

(1) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), (1,1)$ (1) لدينا نقطتان

$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = f_{yx} = -3$

$g(x,y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 12y - 9$

عند النقطة $(1,1)$ لدينا (1)

$\begin{cases} g(1,1) = 12 - 9 = 3 > 0 \\ f_{xx}(1,1) = 2 > 0 \text{ or } f_{yy}(1,1) = 6 > 0 \end{cases}$

عند النقطة $f(1,1) = 1 + 1 - 3 + 1 - 5$ قيمة صغرى محلية

$= -5$

عند النقطة $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ لدينا:

$g(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = 6 - 9 = -3 < 0$

(1) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ نقطة سرجية

---

(4) 2/

$$F(x,y,z) = y z^2 e^{xy} + 3x\cos(y^2+z^2+4) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{y^2 z^2 e^{xy} + 3\cos(y^2+z^2+4) - 3}{2zy\, e^{xy} - 6xz\sin(y^2+z^2+4)}$$ (1)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{z^2 xy\, e^{xy} + z^2 e^{xy} - 6xy\sin(y^2+z^2+4)}{2zy\, e^{xy} - 6xz\sin(y^2+z^2+4)}$$ (1)