حل الإختبار الفصلي الثاني الفصل الثاني 1445 هـ 481 ريض

السؤال 1 :

1. $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$ ، $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$.
2. $\sup_{x\geq a} |f_n(x) - \frac{1}{x}| = \frac{1}{a(1+na^2)}$.
إذاً المتتالية متقاربة بانتظام على $[a, +\infty)$.

السؤال 2 :

1. لتكن $(f_n)_n$ و $(g_n)_n$ متتاليتين من الدوال المعرفة على فترة $I \subset \mathbb{R}$. المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n g_n$ تتقاربة بانتظام على I إذا تحقق أحد الشروط التالية:

(ا) المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n$ متقاربة بانتظام على الفترة I و المتتالية $(g_n)_n$ محدودة و مطردة على الفترة I.

(ب) المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n$ محدودة بانتظام على الفترة I و المتتالية $(g_n)_n$ تناقصية ومتقاربة بانتظام و نهايتها 0 على الفترة I.

2. المتتالية $\left(\frac{1}{n}\tan^{-1}(\frac{x}{n})\right)_n$ تناقصية ومحدودة بالمتتالية $\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{n}\right)_n$ التي تتقارب نحو 0.
إذاً المتسلسلة تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$

3. بما أن $\left|\frac{1}{n}\tan^{-1}(\frac{x}{n})\right| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{a}{n^2}$ فإن تقارب المتسلسلة معياري على $[-a, a]$..

السؤال 3 :

1. مجال تقارب المتسلسلة هو $D=[0,+\infty)$. $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$

2. بما أن الدوال $\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ متصلة و أن المتتالية $\left(\frac{e^{-nx}}{n}\right)_n$

تتقارب بالنتظام نحو 0 إذًا حسب نظرية آبل فإن الدالة f متصلة على D.