مع الإجابة النهائية

College of Sciences
Mathematical Department King Saud University

Mid-two exam M.201
Second semester 2024
Course Instructor: **Prof.M. DAMLAKHI.**
Course Title: Math 201 (Differential and Integral Calculus).
Date: Thursday 14/10/1445– 23/4/2024
Time: (5-6:30) pm, 1:30 Hour.

السؤال الأول(7) : أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x,y) = 2x^2 + x + y^2 - 2$ على المنطقة المغلقة والمحدودة بالمنحني $x^2 + y^2 = 4$

السؤال الثاني(4+4) : أ) احسب التكامل التالي : $\iint_R 4y^3 dA$ حيث R هي المنطقة المغلقة والمحدودة بالدوال

$y = \sqrt{x}$ و $y = 0$ و $y = x - 6.$

ب) اعكس ترتيب التكامل التالي ثم احسب قيمته $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1}\, dx\, dy.$

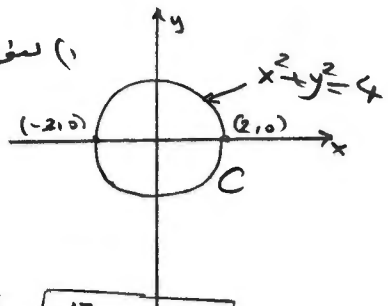
السؤال الثالث(5+5) : أ) احسب التكامل التالي : $\iint_R (3x + 4y) dA$ حيث R المنطقة المغلقة والمحدودة بالدائرتين

$x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ والواقعة في النصف العلوي بالمستوي xy .

ب) أوجد حجم المجسم الواقع في الثمن الأول والمحدود بالمستويات الإحداثية والمستوي $x + y + z = 1.$

الاختبار النهائي الثاني (101) رضا
الفصل الثاني 1442 (2021)

السؤال الأول: ① إيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x,y)=2x^2+x+y^2-2$
② المنطقة المغلقة والمحدودة بالدائرة $x^2+y^2=4$



① لنوجد النقاط الحرجة للدالة f
$f_x=4x+1=0$ ، $f_y=2y=0$
منه $(-\frac{1}{4},0)$ نقطة حرجة وحيدة تقع داخل المنطقة

$f(-\frac{1}{4},0)=2(\frac{1}{16})-\frac{1}{4}+0-2$
$=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-2=\frac{1-2-16}{8}=\boxed{\frac{-17}{8}=-2.125}$ ①

② لنوجد نقاط (x,y) واقعة على المحيط $g(x,y)=x^2+y^2-4=0$
ولنوجد $\lambda\in\mathbb{R}$ بحيث يكون
$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$
$(4x+1,2y)=\lambda(2x,2y)\iff$
$4x+1=2\lambda x,\ 2y=2\lambda y$
$4x+1=2\lambda x,\ y=\lambda y$ or $y(\lambda-1)=0$
إما $y=0$ ومنه $x=\pm 2$ أي $x^2=4$ $\Leftarrow$ $(-2,0)$ ، $(2,0)$ ✓
$(2,0)\Rightarrow 8+1=4\lambda\Rightarrow\lambda=\frac{4}{9}$ ✓
$(-2,0)\Rightarrow -8+1=-4\lambda\Rightarrow\lambda=\frac{7}{4}$ ✓
① $f(2,0)=2(4)+2+0-2=\boxed{8=f(2,0)}$
① $f(-2,0)=2(4)-2+0-2=\boxed{4=f(-2,0)}$
وإما $\lambda=1$، لدينا $4x+1=2x\Leftarrow 2x=-1\Leftarrow x=\frac{-1}{2}$ ✓
نعوض في المعيّن $\frac{1}{4}+y^2=4$
$y^2=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$,
$y=\mp\frac{\sqrt{15}}{2}$
$\lambda=1$, $(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{15}}{2})$, $(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{15}}{2})$
① $f(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{15}}{2})=2(\frac{1}{4})-\frac{1}{2}+\frac{15}{4}-2=\frac{7}{4}=\boxed{1.75=f(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{15}}{2})}$
① $f(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{15}}{2})=2(\frac{1}{4})-\frac{1}{2}+\frac{15}{4}-2=\frac{7}{4}=\boxed{1.75=f(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{15}}{2})}$
منه
$\frac{1}{2}$ $f(\frac{-1}{4},0)=-2.125$ هي صغرى مطلقة
$\frac{1}{2}$ $f(2,0)=8$ هي كبرى مطلقة

السؤال الثاني: $I = \iint_R 4y^3 dA$

R المنطقة المحصورة بالدوال: $y = \sqrt{x}$ ، $y = 0$ ، $y = x - 6$

نوجد نقاط تقاطع الدالتين $x - 6 = \sqrt{x}$

$x \geq 0$

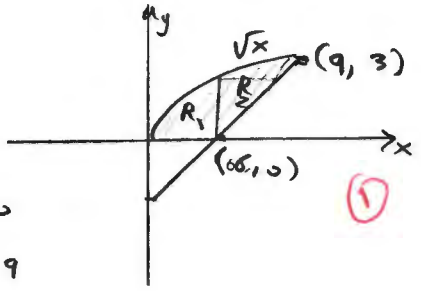
$(x-6)^2 = x$

$x^2 + 36 - 12x = x$

$x^2 - 13x + 36 = (x-9)(x-4) = 0$

$x = 9$ تحقق المعادلة $x - 6 = \sqrt{x}$ ($9 - 6 = \sqrt{9}$)

~~$x = 4$~~ لا تحقق المعادلة $x - 6 = \sqrt{x}$ $(-2 = -4 - 6 + \sqrt{4})$



$x = y + 6$

$x = y^2$

① (1)

طريقة ①

المنطقة (4, -2) تحقق المعادلة $x - 6 = -\sqrt{x}$

$R = \{ \; y^2 \leq x \leq y + 6 \; , \; 0 \leq y \leq 3 \}$

$I = \int_0^3 \int_{y^2}^{y+6} 4y^3 \, dx \, dy = \int_0^3 4y^3 [x]_{y^2}^{y+6} dy$ ②

$= \int_0^3 [4y^4 + 24y^3 - 4y^5] dy$

$= [\frac{4}{5}y^5 + 6y^4 - \frac{2}{3}y^6]_0^3$

$= \frac{972}{5} + 486 - 486$ (1)

$= \frac{972}{5}$

طريقة ثانية:

$R_1 = \{ \; 0 \leq x \leq 6 \; , \; 0 \leq y \leq \sqrt{x} \}$

$R_2 = \{ \; 6 \leq x \leq 9 \; , \; x - 6 \leq y \leq \sqrt{x} \}$

$I = \iint_{R_1} 4y^3 dA + \iint_{R_2} 4y^3 dA$

$= \int_0^6 \int_0^{\sqrt{x}} 4y^3 dy \, dx + \int_6^9 \int_{x-6}^{\sqrt{x}} 4y^3 dy \, dx$ (1) (1)

$= \int_0^6 x^2 dx + \int_6^9 [y^4]_{x-6}^{\sqrt{x}} dx$

$= \int_0^6 x^2 dx + \int_6^9 [x^2 - (x-6)^4] dx$

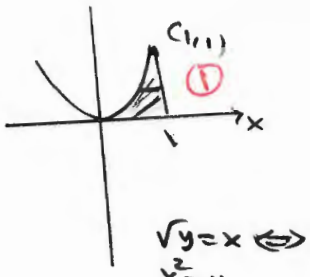
$= [\frac{x^3}{3}]_0^6 + [\frac{x^3}{3} - \frac{1}{5}(x-6)^5]_6^9$

$= [\frac{216}{3} - 0] + [243 - \frac{243}{5} - 72 - 0]$ (1)

$= \frac{972}{5}$

$$I=\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\,dx\,dy$$ (ب

$$=\iint_R \sqrt{x^3+1}\,dA.$$



$R=\{(x,y);\ \sqrt{y}\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$

$R=\{(x,y);\ 0\le y\le x^2,\ 0\le y\le 1\}$

$$I=\int_0^1\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}\,dy\,dx=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$ ②

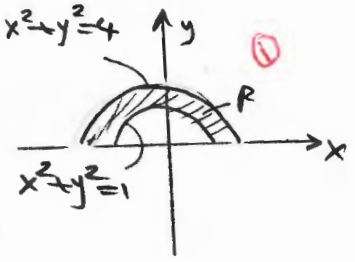
$$I=\frac{1}{3}\int_0^1 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx=\frac{1}{3}\left[(x^3+1)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\right]_0^1$$

$$\boxed{I=\frac{2}{9}\left[2\sqrt{2}-1\right]}$$ ③

السؤال الثالث: (ا)

$$I=\iint_R (3x+4y)\,dA$$

$R=\{(r,\theta);\ 1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\pi\}$ ①



$$I=\int_0^{\pi}\int_1^2 r(3r\cos\theta+4r\sin\theta)\,dr\,d\theta$$ ①

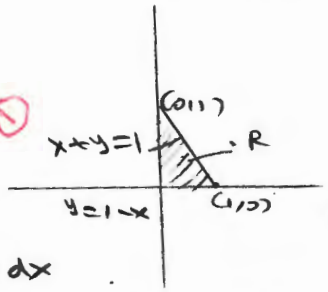
$$\int_0^{\pi}\int_1^2 r^2(3\cos\theta+4\sin\theta)\,dr\,d\theta$$

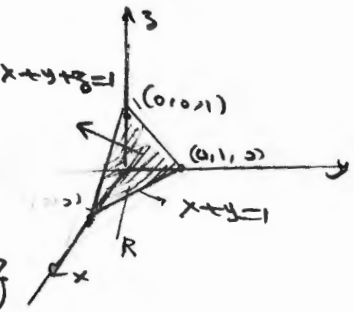
$$=\left[\frac{1}{3}r^3\right]_1^2\left[3\sin\theta-4\cos\theta\right]_0^{\pi}$$ ②

$$=\frac{1}{3}(8-1)\left[(0+4)-(0-4)\right]=\frac{7}{3}(8)=\frac{56}{3}$$ ③

$V=\iint_R f(x,y)\,dA=$, $f(x,y)=1-y-x=z$ (ب

$$=\int\int_R (1-x-y)\,dA$$ ①





$$=\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy\,dx$$ ②

$R=\{0\le y\le 1-x,\ 0\le x\le 1\}$

$$=\int_0^1\left[(1-x)y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}dx$$

$$=\int_0^1\left[(1-x)^2-\frac{1}{2}(1-x)^2\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2dx=\left[\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{3}(1-x)^3\right]_0^1$$ ②

$$=\frac{-1}{6}[0-1]=\frac{1}{6}$$ ✓