مع الإجابة الطالبة

College of Sciences
Mathematical Department King Saud University

Mid-one exam M.225
Second semester 2024
Course Instructor: **Prof.M. DAMLAKHI.**
Course Title: Math 225 (Differential Equations)
Date: Monday 23/8/1445– 4/3/2024
Time: (3-4:30) pm, 1:30 Hour.

السؤال الأول(3+4): أوجد مع الرسم أكبر منطقة في المستوي xy بحيث أن المسألة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases}(x^2-4)\frac{dy}{dx}-\ln(y-1)=0\\ y(0)=2\end{cases}$$ لها حل وحيد.

ب) أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية $y(x^2+1)\frac{dy}{dx}-y^2=4$.

السؤال الثاني(3+5): أ) أوجد حل المسألة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases}(x-2y)dx+(2x+y)dy=0\\ y(1)=2\end{cases}.$$

ب) أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}+\cos^2\left(\frac{y}{x^2}\right),\ x\neq 0$$ ، (ارشاد: افرض $u=\frac{y}{x^2}$)

السؤال الثالث(5+5): أ) برهن أن المعادلة التفاضلية التالية تامة ثم أوجد حلها.

$$\left(\frac{1}{1+y^2}+\cos x-2xy\right)\frac{dy}{dx}=y(y+\sin x).$$

ب) أكتب المعادلة التفاضلية التالية على شكل معادلة بيرنولي ثم أوجد حلها.

$x>-\frac{1}{6}$ ، $(6x+1)y^2\frac{dy}{dx}+3x^2+2y^3=0$ ، حيث $y\neq 0$ على فترة I.

الإجابة النموذجية، امتحان فصلي اول
مقرر (٢٢٥) رضيات الفصل الثاني عام ١٤٤٠ هـ

السؤال الأول :

أ) 4

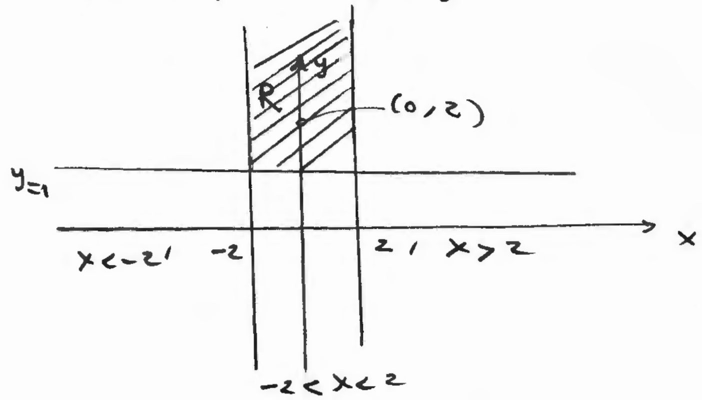
$$\begin{cases} (x^2-4)y' - \ln(y-1) = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$y' = \frac{\ln(y-1)}{x^2-4} = f(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2-4}\,\frac{1}{y-1}$$

f , $\frac{\partial f}{\partial y}$ دالتان متصلتان على

2 $R = \{(x,y) ; x \neq \mp 2, \; y > 1\}$

2



إذاً المنطقة بحيث المعادلة التفاضلية تقبل حلاً وحيداً هي

$$R_1 = \{(x,y) ; -2<x<2, \; y>1\}$$

ب) 3

$$y(x^2+1)y' - y^2 = 4$$

$$y(x^2+1)dy = (y^2+4)dx$$

$1\frac{1}{2}$ $$\int \frac{y\,dy}{y^2+4} = \int \frac{dx}{x^2+1} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(y^2+4) - \tan^{-1}(x) = c$$

إذاً حل المعادلة التفاضلية هو مجموعة المنحنيات التالية $1\frac{1}{2}$

$$\boxed{\ln(y^2+4) - 2\tan^{-1}(x) = c_1}, \quad (2c = c_1)$$

السؤال الثاني :

أ) 5

$$\begin{cases} (x-2y)\,dx + (2x+y)\,dy = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

المعادلة متجانسة ، نفرض ان

$x>0$ ، $u = \frac{y}{x}$

معناه

① $y = xu$ ، $dy = x\,du + u\,dx$

$$\left(1 - 2\frac{y}{x}\right)dx + \left(2 + \frac{y}{x}\right)dy = 0$$

$$(1-2u)\,dx + (2+u)(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(1 - \cancel{2u} + \cancel{2u} + u^2)\,dx + x(2+u)\,du = 0$$

$$(1+u^2)\,dx + x(2+u)\,du = 0$$

② $$\int \frac{dx}{x} + \int \left(\frac{2}{1+u^2} + \frac{u}{1+u^2}\right) du$$

$$\ln x + 2\tan^{-1}(u) + \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = c$$

وبالتالي تكون الحل العام للمعادلة هو مجموعة المنحنيات التالية

① $$\boxed{\ln x + 2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = c}$$

الآن نستخدم الشرط الابتدائي $y(1)=2$ ، فنجد

$$\cancel{\ln 1} + 2\tan^{-1}(2) + \frac{1}{2}\ln(1+4) = c$$

① $$\boxed{c = -\ln\sqrt{5} - 2\tan^{-1}(2)}$$

اذن حل المسألة الابتدائية هو المنحنى الوحيد

$$C : \boxed{\ln x + 2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = -\ln\sqrt{5} - 2\tan^{-1}(2)}$$

ب) 3

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + \cos^2\left(\frac{y}{x^2}\right)$; $x \neq 0$ ، افرض $u = \frac{y}{x^2}$

① $y = ux^2$ ، $y' = 2xu + x^2u'$

$$2xu + x^2u' = 2x\frac{y}{x^2} + \cos^2\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\cancel{2xu} + x^2u' = \cancel{2xu} + \cos^2(u)$$

① $x^2\,du = \cos^2(u)\,dx \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{du}{\cos^2 x}$

$$\frac{-1}{x} = \tan u + c$$

① $\boxed{\tan\left(\frac{y}{x^2}\right) + \frac{1}{x} = c}$ مجموعة حلول المعادلة التفاضلية

السؤال الثالث :

أ) 5

$$\left(\frac{1}{1+y^2} + \cos x - 2xy\right)\frac{dy}{dx} = y(y + \sin x)$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{1+y^2} + \cos x - 2xy\right)}_{N} dy - \underbrace{(y^2 + y\sin x)}_{M} dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y - \sin x = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

∴ إذاً المعادلة تامة وبالتالي توجد دالة F في x و y معرفة

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M = -y^2 - y\sin x \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N = \dfrac{1}{1+y^2} + \cos x - 2xy \end{cases}$$

$$F(x,y) = \int(-y^2 - y\sin x)\,dx = -y^2 x + y\cos x + \phi(y) \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cancel{-2xy} + \cancel{\cos x} + \phi'(y) = \frac{1}{1+y^2} + \cancel{\cos x} - \cancel{2xy}$$

$$\phi'(y) = \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow \phi(y) = \tan^{-1}(y) + c \quad (1)$$

إذاً الحل العام للمعادلة التفاضلية هو مجموعة المنحنيات التالية

$$\boxed{F(x,y) = -y^2 x + y\cos x + \tan^{-1}(y) + c = 0} \quad (1)$$

ب) 5

$$(6x+1)y^2 y' + 3x^2 + 2y^3 = 0$$

$$y' + \frac{2}{6x+1}y = \frac{-3x^2}{6x+1}y^{-2}$$ معادلة برنولي $n=-2$

$$y' y^2 + \frac{2}{6x+1}y^3 = \frac{-3x^2}{6x+1} \quad (1)$$

نفرض أن $u = y^3$, $u' = 3y^2 y'$, $\frac{u'}{3} = y^2 y'$ (1)

ومنه

$$\frac{u'}{3} + \frac{2}{6x+1}u = \frac{-3x^2}{6x+1} \quad (1)$$

فيصبح

$$u' + \frac{6}{6x+1}u = \frac{-9x^2}{6x+1}, \quad \mu(x) = e^{\int \frac{6}{6x+1}dx} = 6x+1 \quad (1)$$

$$(6x+1)u = \int \frac{-9x^2}{6x+1}(6x+1)\,dx = -\int 9x^2\,dx = -3x^3 + c$$

إذاً حل المعادلة هو مجموعة المنحنيات التالية (1)

$$\boxed{(6x+1)y^3 + 3x^3 = c}$$

$$\begin{cases} (x-2y)\,dx + (2x+y)\,dy = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

إجابة الصفحة ٣ من السؤال الثاني

نفرض أن $u = \frac{x}{y}\,,\ y \neq 0 \Rightarrow x = u \cdot y$

$dx = u\,dy + y\,du$

$$\left(\frac{x}{y} - 2\right) dx + \left(2\frac{x}{y} + 1\right) dy = 0$$

$$(u-2)(u\,dy + y\,du) + (2u+1)\,dy = 0$$

$$(u^2 - \cancel{2u} + \cancel{2u} + 1)\,dy + y(u-2)\,du = 0$$

$$(u^2+1)\,dy + y(u-2)\,du = 0 \quad 3$$

$$\frac{dy}{y} + \left(\frac{u-2}{u^2+1}\right) du = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{u}{u^2+1}\,du - 2\int \frac{du}{u^2+1} = 0$$

$$\boxed{\ln|y| + \frac{1}{2}\ln(u^2+1) - 2\tan^{-1}(u) = c}$$

$$\boxed{\ln|y| + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) - 2\tan^{-1}(y/x) = c}$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow \quad \ln 2 + \frac{1}{2}\ln(5) - 2\tan^{-1}(2) = c$$

$$\boxed{\ln 2\sqrt{5} - 2\tan^{-1}(2) = c}$$