ح ، الإجا ٣ ، دهامل

College of Sciences

Mathematical Department King Saud University

Mid two exam M.225.

Second semester, 2024.

Course Instructor: **Prof.M. DAMLAKHI.**

Course Title: Math 225 (Differential Equations).

Date: Monday 20/10/1445– 29 /4/2024.

Time: 1:30 hour.

السؤال الأول:(3+5)

أ) بين فيما إذا كانت الدوال التالية مرتبطة أو مستقلة خطيا".

$f_1 \quad (x) = x \ , \ f_2(x) = x^2 \quad (x) = 5x - 2x^2 \ , \ f_4(x) = -2$ على $\mathbb{R}$.

ب) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية: $x^2\,(1 - lnx)y'' + xy' - y = 0$ ، حيث $y_1 = x$ حل خاص للمعادلة التفاضلية وأن $x > e$.

السؤال الثاني:(4+3)

أ) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية: $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$

ب) أوجد **فقط** الشكل العام للحل الخاص للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y''' - 2y'' + y' = 4 - 3e^x + xe^{-2x} - 2cos2x.$$

السؤال الثالث(5+5):

أ) أوجد حل المسألة التفاضلية التالية: $\begin{cases} x^2y'' + 3xy' = 0 \\ y(1) = 0\ ,\ \ y'(1) = 4 \end{cases}$

ب) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية: $y'' - 5y' + 4y = 2x + 8e^x.$

الإجابة الكاملة للاختبار الفصلي الثاني ١٤٤٠

المقرر (٢٠٤) رصد

السؤال الأول: أ)

$$f_1(x)=x,\quad f_2=x^2,\quad f_3(x)=5x-2x^2,\quad f_4=-2$$

3

③ $f_3(x)=5x-2x^2=5f_1(x)-2f_2(x)-0\,f_4(x)$

$$5f_1(x)-2f_2(x)-f_3(x)-0\,f_4(x)=0 \quad \text{for all } x\in\mathbb{R}$$

معنى أن الدوال f_1, f_2, f_3, f_4 مرتبطة خطياً على $\mathbb{R}$.

ب) لنوجد الحل العام للمعادلة $x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=0$ مع العلم أن لها حل خاص $y_1=x$، حيث $x>e$.

5

طريقة ① $y''+\frac{1}{x(1-\ln x)}y'-\frac{1}{x^2(1-\ln x)}y=0$

$\ln x>1$

$\ln x-1>0$

$\boxed{②=①+①}$ $y_2=y_1\int\frac{\int e^{-P(x)}dx}{y_1^2}dx,\quad P(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$

$$\int -P(x)\,dx=\int\frac{-1}{x(1-\ln x)}dx=\ln|1-\ln x|=\ln(\ln x-1)$$

② $e^{\int -P(x)dx}=e^{\ln(\ln x-1)}=\ln x-1$

$$y_2=x\int\frac{(\ln x-1)}{x^2}=x\left[\int\frac{\ln x}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2}\right]$$

② $x\left[-\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2}\right]$

$\boxed{y_2=-\ln x}$ or $\boxed{\ln x}$

إذاً الحل العام للمعادلة هو

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1x+c_2(-\ln x)=\boxed{c_1x+c_3\ln x},\quad c_3=-c_2$$

طريقة ثانية: ايجاد الحل العام بالتعويض بالشكل $y=yu$، حيث u دالة يجب تحديدها

5

$\boxed{②=①+①}$ $y''=u''x+2u'$، $y'=u'x+u$، $y=u.x$

نعوضها في المعادلة السابقة

$x^2(1-\ln x)(u''x+2u')+x(u'x+u)-ux=0$

$x^3(1-\ln x)u''+2x^2u'(1-\ln x)+x^2u'=0$

$x(1-\ln x)u''+[2(1-\ln x)+1]u'=0$

نفرض $u'=w$ ، $u''=w'$ ، لدينا

(2) $x(1-\ln x)w'+[2(1-\ln x)+1]w=0$

$\frac{dw}{w}+[\frac{2}{x}+\frac{1}{x(1-\ln x)}]dx$

$\ln|w|+2\ln x-\ln(\ln x-1)=c$

$\ln(\frac{|w|\cdot x^2}{\ln x-1})=c \Rightarrow \frac{|w|\cdot x^2}{\ln x-1}=e^c$

$u'=w=c_1\frac{(\ln x-1)}{x^2}$, $c_1=\mp e^c\neq 0$ ثابت

(2)

$u=c_1[\int(\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{x^2})dx]$

$u=c_1[\frac{-1}{x}\ln x+\int\cancel{\frac{dx}{x^2}}-\int\cancel{\frac{dx}{x^2}}]+c_2$

$\boxed{u=c_1\frac{-1}{x}\ln x+c_2}$

نحصل على الحل العام للمعادلة هو

$y=xu=-c_1\ln x+c_2x=\boxed{c_3\ln x+c_2x}$; $c_3=-c_1$

السؤال الثاني: أ)

3

$y'''+3y''+3y'+y=0$

المعادلة المميزة نفرض الحل هو $y=e^{mx}$ ، ونعوض

$m^3+3m^2+3m+1=0 \Rightarrow (m^3+1)+3m(m+1)=0$

$(m+1)(m^2-m+1)+3m(m+1)=0$

(2)

$(m+1)(m^2+2m+1)=(m+1)^3=0 \Rightarrow m=-1,-1,-1$

$(2)=(1)+(1)$ $\boxed{y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3x^2e^{-x}}$ ويكون الحل العام هو الشكل

ب) $y''' - 2y'' + y' = 4 - 3e^{x} + xe^{-2x} - 2\cos 2x$

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو

$m^3 - 2m^2 + m = 0$ $\quad (1) + (1) = (2)$

$m(m^2 - 2m + 1) = m(m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 0, 1, 1$

$$\boxed{y_p = \underbrace{Ax + Bx^2 e^{x}}_{(1)} + \underbrace{(Cx + D)e^{-2x}}_{(1)} + \underbrace{E\cos(2x) + F\sin(2x)}_{(1)}}$$

السؤال الثالث: 5

أ) $\begin{cases} x^2 y'' + 3xy' = 0 \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 4 \end{cases}$

1) لنوجد الحل العام لـ $x^2 y'' + 3xy' = 0$ ، حيث $y = x^m$ او $x > 0$

$m(m-1) + 3m = 0$

$m^2 + 2m = 0, \quad m(m+2) = 0$ (2)

معناه $m = 0, -2$

$y = c_1 + c_2 x^{-2}$ (1)

$y' = 0 - 2c_2 x^{-3}$

$y(1) = c_1 + c_2 = 0, \quad y'(1) = -2c_2 = 4$ (1)

معناه $\boxed{c_1 = 2}$ (1) ، $\boxed{c_2 = -2}$

اذاً لدينا حل وحيد للمسألة التفاضلية:

$$\boxed{y = 2 - 2x^{-2} = 2(1 - x^{-2})}$$

ب) لنوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية: 5

$(1) \cdots \quad y'' - 5y' + 4y = 2x + 8e^{x}$

1) لنوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة $y'' - 5y' + 4y = 0$ ، $y = e^{mx}$

لدينا المعادلة المميزة: $m^2 - 5m + 4 = 0$

$(m-1)(m-4) = 0$ ، $\boxed{y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{4x}}$ — (2) $\quad (1) + (1) = (2)$

2) ان شكل الحل الخاص للمعادلة (1) هو

$(1) + (1) = (2)$ $\quad y_p = Ax + B + Cxe^{x}$

$y_p' = A + Ce^{x} + Cxe^{x}, \quad y_p'' = 2Ce^{x} + Cxe^{x}$

$$\ddot{y}_p - 5\dot{y}_p + 4y_p = 2ce^x + \cancel{cxe^x} - 5A - 5ce^x - \cancel{5cxe^x} + 4Ax + 4B + \cancel{4cxe^x} = 2x + 8e^x$$

$$= -3ce^x + 4Ax + 4B - 5A = 2x + 8e^x$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد

$4A = 2, \quad -3C = 8, \quad 4B - 5A = 0$

$A = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{8}{3}, \quad B = \frac{5}{4}A = \frac{5}{8}$

إذاً يكون الحل الخاص للمعادلة ① :

③ $$\boxed{y_p = \frac{x}{2} + \frac{5}{8} - \frac{8}{3}xe^x}$$

ومنه الحل العام للمعادلة ① :

$$\boxed{y = y_c + y_p = c_1 x + c_2 x^4 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{8} - \frac{8}{3}xe^x}$$