جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

343 ريض (نظرية الزمر)
الاختبار الفصلي
30 درجه

السؤال الأول (2+2+1+1 درجة)

أ) عرف الزمرة الدورية.
ب) عرف التماثل بين زمرتين.
ت) أثبت أن أي زمرة دورية من الرتبة n تماثل $\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$.
ث) أوجد جميع الزمر الجزئية الفعلية من الزمرة $\langle \mathbb{Z}_{21}, + \rangle$ وارسم مخطط الزمر الجزئية لها.

السؤال الثاني (2+2+1 درجه)

أ) اكتب نص (مبرهنة كايلي).
ب) أثبت ان $A_n \leq S_n$ حيث A_n عباره عن مجموعة التبديلات الزوجية في S_n.
ت) لتكن $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_8$
1) اكتب σ على شكل ضرب دورات منفصلة.
2) اكتب σ على شكل ضرب مبادلات(مناقلات) ثم استنتج اذا كانت σ تبديل زوجي أو فردي.

السؤال الثالث (2+2+2 درجه)

أ) لتكن G, G' زمرتين و $\varphi: G \to G'$ تشاكل.
1) اذا كانت $H \leq G$ فاثبت ان $\varphi(H) \leq G'$.
2) اثبت ان $Ker(\varphi) \leq G$
ب) اثبت ان $Z(G) \leq G$ ثم استنتج $Z(S_3)$ و $Z(\mathbb{Z}_9)$

السؤال الرابع (2+1+1+1+1 درجه)

أ) اذكر نص مبرهنة لاغرانج.
ب) اعط مثالا يوضح ان عكس مبرهنة لاغرانج غير صحيح؟
ت) أوجد جميع المجموعات المشاركه للزمرة الجزئية $\langle 4 \rangle$ من $\mathbb{Z}_{12}$.
ث) ما هو دليل $\langle 4 \rangle$ في $\mathbb{Z}_{12}$. $(\mathbb{Z}_{12} : \langle 4 \rangle)$
ج) أذا كانت كل من H, G زمر منتهيه بحيث ان $|G| = m$, $|H| = n$, $\gcd(G, H) = 1$ فاثبت ان التشاكل الوحيد من H الى G هو التشاكل التافه.

السؤال الخامس (2 درجه)

أ) أذا كانت $G = S_3 \times \mathbb{Z}_4$ فأوجد رتبه العنصر $(\sigma, 2)$ في G حيث $\sigma = (1\ 2\ 3) \in S_3$

ب) **اثبت صحة او خطا كل من ما يلي** (2+2+2 درجه)

1) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \equiv \mathbb{Z}_9$
2) $(\mathbb{R}^*, \cdot) \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$
3) توجد زمره G و $H, K \leq G$ بحيث ان

$$|G| = 54 \quad , |H| = 9 \quad , |K| = 6 \quad , |H \cap K| = 2$$