

343 رياض (نظرية الزمر)

الاختبار الفصلي

30 درجات



جامعة الملك سعود

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السؤال الأول (2+3 درجة)

- (أ) لتكن G زمرة و H مجموعة جزئية غير خالية من G . أثبت أن:
 H زمرة جزئية من $G \iff$ لأي عنصرين $a, b \in H$ نجد أن $ab^{-1} \in H$.
(ب) اذا كانت G زمرة وكانت $H \leq G$ و $K \leq G$ فاثبت ان $H \cap K \leq G$

السؤال الثاني (3+3+5 درجة)

- (أ) إكتب نص (مبرهنة كايلى) ثم اثبتها.
(ب) لتكن A مجموعة غير خالية، ولتكن S_A مجموعة تبديلات A ، أثبت أن S_A زمرة بالنسبة الى ضرب التبديلات.
(ت) لتكن $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_8$
(1) اكتب σ على شكل ضرب دورات منفصلة.
(2) اكتب σ على شكل ضرب مبادلات (مناقلات) ثم استنتج اذا كانت σ تبديل زوجي أو فردي

السؤال الثالث (2+1 درجة)

- (أ) عرف التشاكل بين زمريتين.
(ب) لتكن G, G' زمريتين و $\varphi: G \rightarrow G'$ تشاكل. أثبت أن $\varphi[G] \leq G'$.

السؤال الرابع (2+1+2+1 درجة)

- (أ) اذكر نص مبرهنة لاگرانج.
(ب) أوجد جميع المجموعات المشتركة للزمر الجزئية $\langle 9 \rangle$ من $\mathbb{Z}_{36}$.
(ت) ما هو دليل $\langle 9 \rangle$ في $\mathbb{Z}_{36}$. $(\langle 9 \rangle : \mathbb{Z}_{36})$.
(ث) أثبت أن كل زمرة من رتبة أولية هي دورية.

السؤال الخامس (1+1+1+2 درجة)

- (أ) أوجد جميع الزمر الابدالية - وفق التماثل- من الرتبة 300

ب) اثبتي صحة او خطأ كل من ما يلي

(1) اذا كانت G زمرة وكان $a \in G$ بحيث ان $a \neq e$ فان

$$|a| = 2 \iff a = a^{-1}$$

(2) اذا كانت G زمرة وكانت $|G| = 35$ فان كل زمرة جزئية فعلية من G هي زمرة دورية

(3) توجد زمرة G و $H, K \leq G$ بحيث ان

$$|H \cap K| = 3, \quad |K| = 8, \quad |H| = 6, \quad |G| = 24$$

السؤال الأول (2+3 درجة)

- (أ) لتكن G زمرة و H مجموعة جزئية غير خالية من G . أثبتني أن:
 H زمرة جزئية من $G \iff$ لأي عنصرين $a, b \in H$ نجد أن $ab^{-1} \in H$.
 (ب) إذا كانت G زمرة وكانت $H \leq G$ و $K \leq G$ فاثبتني أن $H \cap K \leq G$

(أ) $\iff$
 $H \leq G \iff \forall a, b \in H, a^{-1}b \in H$ و أيضاً $a^{-1}b \in H$
 $(\Rightarrow)$ لنفرضي ان $H \neq \emptyset$ و انه لأي عنصرين $a, b \in H$
 فإن $a^{-1}b \in H$
 أولاً لان $H \neq \emptyset \iff$ يوجد $a \in H \iff e = aa^{-1} \in H$
 ثانياً لنفرضي ان $a \in H$ في أولاً $e \in H \iff e^{-1} = e \in H$
 ثالثاً نفرضي ان $a, b \in H$ ، لان $b \in H$ في ثانياً $a^{-1}b \in H$
 $\iff a^{-1}b = a^{-1}(b^{-1})^{-1} \in H$
 في أولاً ، ثانياً و ثالثاً فإن H زمرة جزئية من G .

(ب) لنفرضي ان G زمرة $H, K \leq G$
 بما ان $e \in H$ و $e \in K \iff e \in H \cap K$
 $H \cap K \neq \emptyset$
 الان نفرضي $a, b \in H \cap K \iff a, b \in H$ و $a, b \in K$
 $\iff a^{-1}b \in H$ و $a^{-1}b \in K$
 $\iff a^{-1}b \in H \cap K$ من نظرية (أ) من هذا السؤال
 نجد ان $H \cap K$ زمرة جزئية من G .

السؤال الثاني (3+3+5 درجة)

- (أ) اكتب نص (مبرهنة كايلي) ثم اثبتها.
 (ب) لتكن A مجموعة غير خالية، ولتكن S_A مجموعة تبديلات A ، أثبت أن زمرة بالنسبة الى ضرب التبديلات.
 (ت) لتكن $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_8$
 (1) اكتب σ على شكل ضرب دورات منفصلة.
 (2) اكتب σ على شكل ضرب مبادلات (مناقلات) ثم استنتج اذا كانت σ تبديل زوجي أو فردي

(٢)

16.8 مبرهنة (مبرهنة كايلي) كل زمرة تماثل زمرة تبديلات.

مخطط الدشبات :-
 $\forall x \in G$ define $\lambda_x: G \rightarrow G$; $\lambda_x(g) = xg$
 $\Rightarrow \lambda$ is 1-1 and onto $\Rightarrow \lambda_x \in S_G$

Now :-

$$\varphi: G \rightarrow S_G$$

$$\varphi(x) = \lambda_x$$

$\Rightarrow \varphi$ is 1-1 isomorphism

$$\Rightarrow \varphi(G) \leq S_G \text{ and } G \cong \varphi(G)$$

البرهان :-

لكل عنصر $x \in G$ نعرف $\lambda_x: G \rightarrow G$ ، $\lambda_x(g) = xg$ لكل $g \in G$

انه λ_x احاديث و تماثل :-

λ_x^{-1} احاديث :- نفرض $a, b \in G$ بحيث $\lambda_x(a) = \lambda_x(b)$
 $xa = xb \Rightarrow a = b$

λ_x^{-1} تماثل :- لاي عنصر $g \in G \Rightarrow xg \in G$ بحيث

$$\lambda_x(x^{-1}g) = x(x^{-1}g) = g$$

$\Rightarrow \lambda_x \in S_G$ لكل x

الآن نعرف $\varphi(x) = \lambda_x \quad \forall x \in G; \varphi: G \rightarrow S_G$

سنثبت ان φ تشاكل و ايضا احاديث.

١- φ احاديث لنفرضي $a, b \in G$ بحيث ان $\varphi(a) = \varphi(b)$
 $a=b \Leftrightarrow ae=be \Leftrightarrow \lambda_a(e) = \lambda_b(e) \Leftrightarrow \lambda_a = \lambda_b \Leftrightarrow$

٢- φ دالة تشاكل $[\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)]$
 لنفرضي عنصرين $a, b \in G$

$$\varphi(ab) = \lambda_{ab}$$

$$\varphi(a) = \lambda_a \quad \varphi(b) = \lambda_b$$

$$\lambda_{ab} = \lambda_a \lambda_b$$

سنثبت ان

لكل $g \in G$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S } \lambda_{ab}(g) &= abg = a(bg) = \lambda_a(bg) \\ &= \lambda_a \lambda_b(g) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_{ab} = \lambda_a \lambda_b \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

اذآ في التفسير الجواب

اخيرا $\varphi: G \rightarrow \varphi(G) \subseteq S_G$ لـ φ و اوضح في التعريف ان
 الدالة شاملة

$$G \cong \varphi(G) \leq S_G$$

(ب) لتكن A مجموعة غير خالية، ولتكن S_A مجموعة تبديلات A ، أثبت أن S_A زمرة بالنسبة إلى ضرب التبديلات.

(ت) لتكن $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_8$

- (1) اكتب σ على شكل ضرب دورات منفصلة.
(2) اكتب σ على شكل ضرب مبادلات (مناقلات) ثم استنتج إذا كانت σ تبديل زوجي أو فردي

(ب) $\{ \sigma: A \rightarrow A, \sigma^{-1} \sigma = \text{id} \}$ S_A العملية على S_A هي التحصيل.
(١) عليه التحصيل عليه معرفه جيداً لان تحصيل دالتين احاديتين وشاملتين من المجموعة A في نفسها سيكون داله احاديه وشامله.

(٢) تحصيل الدوال عليه تحصيليه،

ليكن $\sigma, \tau \in S_A$ $\forall a \in A$
 $\sigma(\tau(a)) = (\sigma \circ \tau)(a)$

$\sigma(\tau(a)) = (\sigma \circ \tau)(a)$

(٣) يوجد عنصر وحدة e $i: A \rightarrow A$ $i(a) = a$ $\forall a \in A$
 $i \in S_A$ $\sigma \circ i(a) = \sigma(a) = i(\sigma(a)) = \sigma(a)$
 $i \circ \sigma(a) = i(\sigma(a)) = \sigma(a) = i(\sigma(a)) = \sigma(a)$

$i \circ \sigma = \sigma = \sigma \circ i$ i هو العنصر المحايد.

(٤) $\forall \sigma \in S_A$ لان كل هذه داله احاديه وشامله يوجد معكوس وهو $\sigma^{-1} \in S_A$ $\sigma \circ \sigma^{-1} = \text{id} = \sigma^{-1} \circ \sigma$

(ت) $\sigma = (1827)(456)$

(٢) $\sigma = (17)(12)(18)(46)(45)$
داله فرديه.

السؤال الثالث (2+1 درجة)

أ) عرف التشاكل بين زميرتين.
 ب) لتكن G, G' زميرتين و $\varphi: G \rightarrow G'$ تشاكل. أثبت أن $\varphi[G] \leq G'$.

١) لتكن G, G' زميرتين و $\varphi: G \rightarrow G'$ دالة.
 φ تشاكل $\Leftrightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ لكل $a, b \in G$

ب) ١) الحايد
 $e' = \varphi(e) \in \varphi(G)$ ، لأي $a \in G$

$\varphi(a)e' = \varphi(a) = \varphi(ae) = \varphi(a)\varphi(e)$
 باستخدم قانون الحذف $e' = \varphi(e)$
 ٢) الاغلاق

لكل $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi(G)$ فإن $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in \varphi(G)$
 ٣) المعكوس

لكل $a \in G$ فإن $\varphi(a) \in \varphi(G)$
 $e' = \varphi(e) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(a^{-1})\varphi(a)$
 باستخدم المعكوس $\varphi(a)$ الطرفين من اليمين
 $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1}) \in \varphi(G)$

السؤال الرابع (1+2+1+2 درجة)

- (أ) اذكر نص ميرھنة لاجرانج.
 (ب) أوجد جميع المجموعات المشاركة للزمرة الجزئية $\langle 9 \rangle$ من $\mathbb{Z}_{36}$.
 (ت) ما هو دليل $\langle 9 \rangle$ في $\mathbb{Z}_{36}$. $(\mathbb{Z}_{36} : \langle 9 \rangle)$.
 (ث) أثبت أن كل زمرة من رتبة أولية هي دورية.

(ميرھنة لاجرانج): لتكن H زمرة جزئية من زمرة منتهية G ، عندئذ تكون رتبة H قاسماً لرتبة G .

(ب)

$$\langle 9 \rangle = \{0, 9, 18, 27\}$$

$$1 + \langle 9 \rangle = \{1, 10, 19, 28\}$$

$$2 + \langle 9 \rangle = \{2, 11, 20, 29\}$$

$$3 + \langle 9 \rangle = \{3, 12, 21, 30\}$$

$$4 + \langle 9 \rangle = \{4, 13, 22, 31\}$$

$$5 + \langle 9 \rangle = \{5, 14, 23, 32\}$$

$$6 + \langle 9 \rangle = \{6, 15, 24, 33\}$$

$$7 + \langle 9 \rangle = \{7, 16, 25, 34\}$$

$$8 + \langle 9 \rangle = \{8, 17, 26, 35\}$$

(ت) دليل $\langle 9 \rangle$ في $\mathbb{Z}_{36}$ هو $q = \frac{36}{4}$

(ث) لتكن G زمرة ذات رتبة أولية p ، $|G| = p$ ، p عدد أولي.

لأن $p \geq 2 \Rightarrow$ يوجد عنصر $a \in G$ ، $a \neq e$

$\Rightarrow \langle a \rangle \leq G$ رتبة $\langle a \rangle$ تقسم p ، ولا G عدد أولي
 فإما أن قواسمه p ولتكن $a \neq e \Rightarrow \langle a \rangle \neq 1 \Rightarrow \langle a \rangle = p \Rightarrow G = \langle a \rangle$ إذاً G دورية.

السؤال الخامس (2+1+1+1 درجة)

(أ) أوجد جميع الزمر الابدالية - وفق التماثل - من الرتبة 300

$$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

الزمر الابدالية من الرتبة 300 هي :-

$$\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{5^2}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{5^2}$$

$$\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$$

ب) اثبتي صحة او خطأ كل من ما يلي

(1) اذا كانت G زمرة وكان $a \in G$ بحيث ان $a \neq e$ فان

$$|a| = 2 \Leftrightarrow a = a^{-1}$$

(صحيح) :-

$$|a| = 2 \Leftrightarrow a^2 = aa = a^{-1}a = e \Leftrightarrow a = a^{-1}$$

(2) اذا كانت G زمرة وكانت $|G| = 35$ فان كل زمرة جزئية فعلية من G هي زمرة دورية

(صحيح)

$$\text{نفرض } |G| = 35 = 3 \times 7$$

لدي زمرة جزئية فعلية غير تافهة ستكون من الرتبة 3 او 7 وكلاهما اعداد اولية وحسب الفقرة الاولى من هذه السوال ستكون دورية.

(3) توجد زمرة G و $H, K \leq G$ بحيث ان

$$|H \cap K| = 3, |K| = 8, |H| = 6, |G| = 24$$

(خطأ)

لان $H \cap K$ زمرة جزئية من K فاته هي مبركته لاخرانجب
يجب ان تقسم رتبة $H \cap K$ رتبة K اي 3 تقسم 8
وهذا غير ممكن
لذلك لا يمكن ان تكون رتبة $H \cap K$ مارية للعدد 3.