جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

343 ريض (نظرية الزمر)
الاختبار الفصلي
30 درجات

**السؤال الأول** (2+3 درجة)

أ) لتكن G زمرة و H مجموعة جزئية غير خالية من G. أثبتي أن:
H زمرة جزية من G $\Leftrightarrow$ لأي عنصرين $a, b \in H$ نجد أن $ab^{-1} \in H$.
ب) اذا كانت $G$ زمرة وكانت $H \leq G$ و $K \leq G$ فاثبتي ان $H \cap K \leq G$

**السؤال الثاني** (5+3+3 درجه)

أ) إكتبي نص (مبرهنة كايلي) ثم اثبتيها.
ب) لتكن $A$ مجموعة غير خالية، ولتكن $S_A$ مجموعة تبديلات $A$، أثبتي أن $S_A$ زمرة بالنسبة الى ضرب التبديلات.
ت) لتكن $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_8$
1) اكتبي $\sigma$ على شكل ضرب دورات منفصلة.
2) اكتبي $\sigma$ على شكل ضرب مبادلات(مناقلات) ثم استنتجي اذا كانت $\sigma$ تبديل زوجي أو فردي

**السؤال الثالث** (2+1 درجه)

أ) عرفي التشاكل بين زمرتين.
ب) لتكن $G, G'$ زمرتين و $\varphi: G \to G'$ تشاكل. أثبتي أن $\varphi[G] \leq G'$.

**السؤال الرابع** ( 1+2+1+2 درجه)

أ) اذكري نص مبرهنة لاجرانج.
ب) أوجدي جميع المجموعات المشاركه للزمرة الجزئية $\langle 9 \rangle$ من $\mathbb{Z}_{36}$ .
ت) ما هو دليل $\langle 9 \rangle$ في $\mathbb{Z}_{36}$. $(\mathbb{Z}_{36} : \langle 9 \rangle)$.
ث) أثبتي أن كل زمرة من رتبة أولية هي دورية.

**السؤال الخامس** (2+1+1+1 درجه)

أ) أوجدي جميع الزمر الابدالية – وفق التماثل- من الرتبة 300

ب) **اثبتي صحة او خطا كل من ما يلي**

1) اذا كانت $G$ زمره وكان $a \in G$ بحيث ان $a \neq e$ فان

$$a = a^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad |a| = 2.$$

2) اذا كانت $G$ زمرة وكانت $|G| = 35$ فان كل زمره جزئيه فعليه من $G$ هي زمره دوريه

3) توجد زمره $G$ و $H, K \leq G$ بحيث ان

$$|G| = 24, \quad |H| = 6, \quad |K| = 8, \quad |H \cap K| = 3$$

**السؤال الأول (3+2 درجة)**

أ) لتكن G زمرة و H مجموعة جزئية غير خالية من G. أثبتي أن:
H زمرة جزية من G $\Leftrightarrow$ لأي عنصرين $a,b \in H$ نجد أن $ab^{-1} \in H$.

ب) اذا كانت $G$ زمرة وكانت $H \leq G$ و $K \leq G$ فاثبتي ان $H \cap K \leq G$

أ) $\Rightarrow$)

$H \leq G \Rightarrow \forall a,b \in H$ لدينا $b \in H$ و ايضاً $ab^{-1} \in H$

($\Leftarrow$ لنفرض ان $H \neq \phi$ و انه لاي عنصرين $a,b \in H$

فإن $ab^{-1} \in H$

اولاً لان $H \neq \phi \Rightarrow$ يوجد $a \in H \Rightarrow e = aa^{-1} \in H$

ثانياً لنفرض ان $a \in H$ من اولاً $e \in H \Rightarrow a^{-1} = ea^{-1} \in H$

ثالثاً نفرض ان $a,b \in H$ ، لدن $b \in H$ من ثانياً $b^{-1} \in H$

$\Rightarrow ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$

من اولاً وثانياً وثالثاً فإن H زمرة جزئية من G.

---

ب) لنفرض ان G زمرة $H, K \leq G$

بما ان $e \in H$ و $e \in K \Rightarrow e \in H \cap K$

$\Rightarrow H \cap K \neq \phi$

الان نفرض $a,b \in H \cap K \Rightarrow a,b \in K$ و $a,b \in H$

$\Rightarrow ab^{-1} \in K$ و $ab^{-1} \in H$

$\Rightarrow ab^{-1} \in H \cap K$ من فقره (أ) من هذا السؤال

نجد ان $H \cap K$ زمرة جزئية من G.

**السؤال الثاني (5+3+3 درجه)**

أ) إكتبي نص (مبرهنة كايلي) ثم اثبتيها.

ب) لتكن $A$ مجموعة غير خالية، ولتكن $S_A$ مجموعة تبديلات $A$، أثبتي أن $S_A$ زمرة بالنسبة الى ضرب التبديلات.

ت) لتكن $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_8$

1) اكتبي $\sigma$ على شكل ضرب دورات منفصلة.

2) اكتبي $\sigma$ على شكل ضرب مبادلات(مناقلات) ثم استنتجي اذا كانت $\sigma$ تبديل زوجي أو فردي

٢٤

## 16.8 مبرهنة (مبرهنة كايلي) كل زمرةٍ تُماثلُ زمرةَ تبديلات.

مخطط الاثبات :-

$\forall x \in G$ define $\lambda_x : G \to G$ ; $\lambda_x(g) = xg$

$\Rightarrow \lambda$ is 1-1 and onto $\Rightarrow \lambda_x \in S_G$

Now :

$\varphi : G \to S_G$

$\varphi(x) = \lambda_x$

$\Rightarrow \varphi$ is 1-1 نثبت كل ism

$\Rightarrow \varphi(G) \leq S_G$ and $G \simeq \varphi(G)$

---

البرهان :-

لكل عنصر $x \in G$ نعرف $\lambda_x : G \to G$ ، $\lambda_x(g) = xg$ لكل $g \in G$

اذا الـ $\lambda_x$ احاديه وشامله :-

$\lambda_x$ احاديه :- نفرض $a, b \in G$ بحيث $\lambda_x(a) = \lambda_x(b)$ ونعرفه جيداً

$xa = xb \Leftrightarrow a = b$

$\lambda_x$ شامله :- لاي عنصر $g \in G \Leftarrow x^{-1}g \in G$ بحيث

$\lambda_x(x^{-1}g) = xx^{-1}g = g$ المجال المقابل

$\Leftarrow \lambda_x \in S_G$ لكل $x$ .

الآن نعرف

$\varphi(x) = \lambda_x \quad \forall x \in G \; ; \; \varphi : G \to S_G$

سنثبت ان $\varphi$ تشاكل و ايضاً احادية.

1- $\varphi$ احادية لنفرض $a,b \in G$ بحيث ان $\varphi(a) = \varphi(b)$

$\Leftarrow \lambda_a = \lambda_b \Leftarrow \lambda_a(e) = \lambda_b(e) \Leftarrow ae = be \Leftarrow a = b$

2- $\varphi$ دالة تشاكل $[\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)]$

لنفرض عنصرين $a,b \in G \Leftarrow$

$\varphi(ab) = \lambda_{ab}$

$\varphi(a) = \lambda_a \qquad \varphi(b) = \lambda_b$

سنثبت ان $\lambda_{ab} = \lambda_a \lambda_b$

لكل $g \in G$

$L.H.S \; \lambda_{ab}(g) = abg = a(bg) = \lambda_a(bg)$

$= \lambda_a \lambda_b(g)$

$\Rightarrow \lambda_{ab} = \lambda_a \lambda_b \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

اذاً حسب التعريف السابق

اذن $\varphi : G \to \varphi(G)$ حيث $\varphi$ تشاكل. واضح من التعريف ان الدالة شاملة.

$G \cong \varphi(G) \leq S_G$

ب) لتكن $A$ مجموعة غير خالية، ولتكن $S_A$ مجموعة تبديلات $A$، أثبتي أن $S_A$ زمرة بالنسبة الى ضرب التبديلات.

ت) لتكن $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_8$

1) اكتبي $\sigma$ على شكل ضرب دورات منفصلة.

2) اكتبي $\sigma$ على شكل ضرب مبادلات(مناقلات) ثم استنتجي اذا كانت $\sigma$ تبديل زوجي أو فردي

ب) $S_A = \{\sigma : A \to A, \ \sigma \text{ تقابل}\}$ العمليه على $S_A$ هي التحصيل.

١) عليه التحصيل عليه معرفه جيداً لان تحصيل دالتين احاديتين وشاملتين من المجموعه A فإن نفسها سيكون دالة احاديه وشامله.

٢) تحصيل الدوال عمليه تجميعيه،

ليكن $\tau, \gamma \in S_A$ $\sigma(\tau\gamma)(a) = (\sigma\tau)\gamma(a)$ لكل $a \in A$

$\Leftarrow$ $\sigma(\tau\gamma) = (\sigma\tau)\gamma$

٣) يوجد عنصر وحده $i : A \to A$ $i(a) = a$ لكل $a \in A$

$i \in S_A$ و $i\sigma(a) = i(\sigma(a)) = \sigma(a) = \sigma(i(a)) = \sigma i(a)$

$\Leftarrow$ لكل $\sigma \in S_A$ لكل $a \in A$

$\Leftarrow$ $i\sigma = \sigma = \sigma i$ $\Leftarrow$ $i$ هو العنصر المحايد.

٤) لكل $\sigma \in S_A$ لان هذه دالة احاديه وشامله يوجد معكوس وهو $\sigma' \in S_A$ ايضاً دالة شامله واحاديه وتحقق $\sigma\sigma' = i = \sigma'\sigma$

---

ت) $\sigma = (1\ 8\ 2\ 7)(4\ 5\ 6)$

$\sigma = (1\ 7)(1\ 2)(1\ 8)(4\ 6)(4\ 5)$ (٢

دالة فردية.

**السؤال الثالث** (1+2 درجه)

أ) عرفي التشاكل بين زمرتين.

ب) لتكن $G, G'$ زمرتين و $\varphi: G \to G'$ تشاكل. أثبتي أن $\varphi[G] \leq G'$.

أ) لتكن $G, G'$ زمرتين و $\varphi: G \to G'$ دالة.

$\varphi$ تسمى تشاكل $\Leftrightarrow$ لكل $a, b \in G$ $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

---

ب) 1) العنصر المحايد

$e' = \varphi(e) \in \varphi(G)$، لدي $a \in G$

$\varphi(a)e' = \varphi(ae) = \varphi(a)\varphi(e)$

باستخدام قانون الحذف $e' = \varphi(e)$

2) الانغلاق

لكل $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi(G)$ فإن $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in \varphi(G)$

3) المعكوس.

لكل $\varphi(a) \in \varphi(G)$ فإن

$e' = \varphi(e) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(a^{-1})\varphi(a)$

بالضرب في معكوس $\varphi(a)$ الطرفين من اليمين

$\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1}) \in \varphi(G)$

**السؤال الرابع ( 1+2+1+2 درجه)**

أ) اذكري نص مبرهنة لاجرانج.
ب) أوجدي جميع المجموعات المشاركه للزمرة الجزئية $\langle 9 \rangle$ من $\mathbb{Z}_{36}$ .
ت) ما هو دليل $\langle 9 \rangle$ في $\mathbb{Z}_{36}$. $(\mathbb{Z}_{36} : \langle 9 \rangle)$.
ث) أثبتي أن كل زمرة من رتبة أولية هي دورية.

أ) **(مبرهنة لاجرانج)**: لتكن $H$ زمرة جزئيّة من زمرة منتهية $G$، عندئذٍ تكون رتبة $H$ قاسمًا لرتبة $G$.

ب)

$$\langle 9 \rangle = \{0, 9, 18, 27\}$$

$$1+\langle 9 \rangle = \{1, 10, 19, 28\}$$
$$2+\langle 9 \rangle = \{2, 11, 20, 29\}$$
$$3+\langle 9 \rangle = \{3, 12, 21, 30\}$$
$$4+\langle 9 \rangle = \{4, 13, 22, 31\}$$
$$5+\langle 9 \rangle = \{5, 14, 23, 32\}$$
$$6+\langle 9 \rangle = \{6, 15, 24, 33\}$$
$$7+\langle 9 \rangle = \{7, 16, 25, 34\}$$
$$8+\langle 9 \rangle = \{8, 17, 26, 35\}$$

ت) دليل $\langle 9 \rangle$ في $\mathbb{Z}_{36}$ هو $(\mathbb{Z}_{36} : \langle 9 \rangle) = \frac{36}{4} = 9$

ث) لتكن $G$ زمره ذات رتبه اوليه $|G| = p$ ، $p$ عدد اولي.

لدن $p \geq 2$ يوجد عنصر $a \in G$ ، $a \neq e$

$\Leftarrow \langle a \rangle \leq G$ رتبة $\langle a \rangle$ تقسم $p$ ، ولان $p$ عدد اولي

فان قواسمه اما $p$ او $1$ ولكن $a \neq e \Leftarrow \langle a \rangle \neq 1$

$\Leftarrow \langle a \rangle = G$ اذاً $G$ دوريه.

**السؤال الخامس** (2+1+1+1 درجه)

أ) أوجدي جميع الزمر الابدالية – وفق التماثل- من الرتبة 300

$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

الزمر الابدالية من الرتبة 300 هي :-

$\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{5^2}$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{5^2}$

$\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ .

ب) **اثبتي صحة او خطا كل من ما يلي**

1) اذا كانت $G$ زمره وكان $a \in G$ بحيث ان $a \neq e$ فان

$$a = a^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad |a| = 2.$$

(صحيح):

$|a| = 2 \Leftrightarrow a^2 = aa = a^{-1}a = e \Leftrightarrow a = a^{-1}$

2) اذا كانت $G$ زمرة وكانت $|G| = 35$ فان كل زمره جزئيه فعليه من $G$ هي زمره دوريه

(صحيح)

لنفرض $|G| = 35 = 3 \times 7$

لدي زمره جزئيه فعليه غير تافهه ستكون من الرتبه 3 او $\neq$ 3 وكلاهما اعداد اوليه وحسب الفقره الاولى من هذا السؤال ستكون دوريه.

3) توجد زمره $G$ و $H, K \leq G$ بحيث ان

$$|G| = 24 \quad , |H| = 6 \quad , |K| = 8 \quad , |H \cap K| = 3$$

(خطاء)

لدن $H \cap K$ زمره جزئيه من $K$ فإنه من مبرهنه لاغرانج يجب ان تقسم رتبه $H \cap K$ رتبه $K$ اي 3 تقسم 8 وهذا غير ممكن

لذلك لا يمكن ان تكون رتبة $H \cap K$ مساويه للعدد 3.