Functions of Several variables

التفاضل في عدة متغيرات:

Def: A function of 2 variables is

تعريف: دالة في متغيرين هي:

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

Def: A function of 3 variables is

تعريف 2: بالمثل: نعرف دالة في ثلاث متغيرات

$$f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)$$

Exple: **مثال 1.**

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = xy$$

$f(0,3) = 0$

$f(1,0) = 1\cdot 0 = 0$

$f(1,3) = 3$

$f(-2,7) = -14$

Exple:

مثلا:

Exple:

مثال 2:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = x^2 - y + z^3 + 3$$

$$f(0,1,-2) = 0^2 - 1 + (-2)^3 + 3 = -6.$$

Domain of f

مجال الدالة:

$$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x,y) \text{ موجودة (exists)} \}$$

$$D_f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ f(x,y,z) \text{ موجودة (exists)} \}$$

Find domain of f

مثال 3: $\boxed{\mathrm{I}}$ أوجد مجال f: $f(x,y,z) = x^2 - y + z^3 + 1$

exists

$$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \text{موجودة } f(x,y,z) = x^2 - y + z^3 + 1\}$$

$$D_f = \mathbb{R}^3$$

Remark: If f is a polynomial then $D_f = \mathbb{R}^n$

ملاحظة: إذا كانت f كثيرة حدود في (x,y) فإن $D_f = \mathbb{R}^2$

وإذا " " " (x,y,z) " $D_f = \mathbb{R}^3$

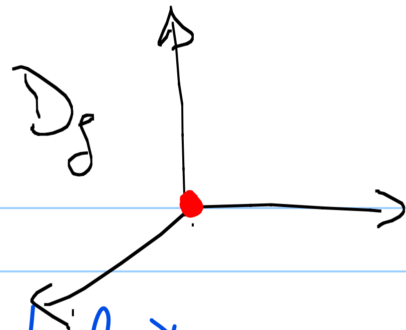
مثال:
$$f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

$$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \text{موجودة } f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\}$$

exists

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \neq 0\}$$

$$= \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$



Find and sketch D_f : مثال: أوجد (مع الرسم) مجال g :

$$g(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$D_g=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \sqrt{1-x^2-y^2}\ \text{موجودة}\right\}$$

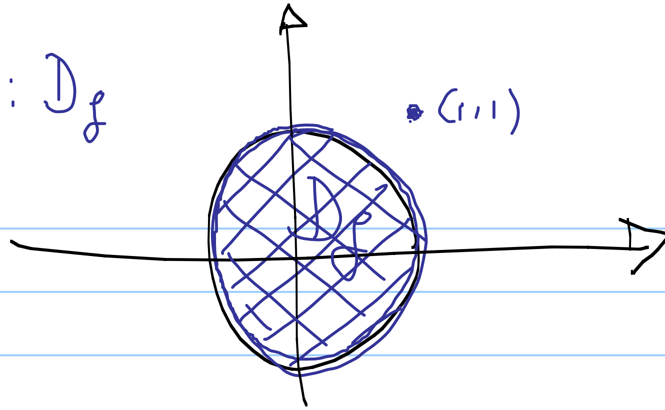
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1-x^2-y^2\geq 0\right\}$$

$1-1^2-1^2<0$

الرسم: $1-x^2-y^2=0$ (حد المنطقة D_g)

$x^2+y^2=1$: دائرة الوحدة (مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 1)

القرص المغلق : D_f



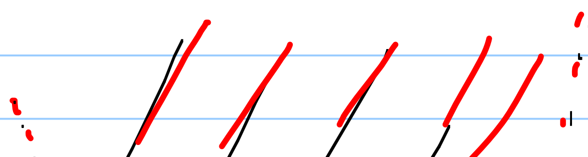
مثال آخر : أوجد مع الرسم مجال : $f(x,y)=\ln(y-x^2)$

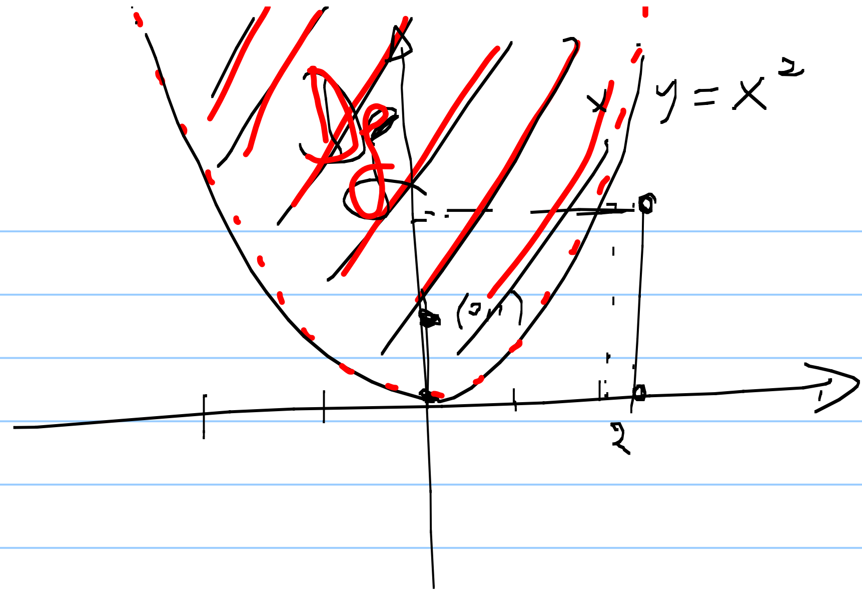
$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ln(y-x^2) \text{ موجودة}\}$$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y-x^2>0\}$$

$$y-x^2<0$$

الرسم : $y-x^2=0$? $\Longleftrightarrow$ $\boxed{y=x^2}$





D_f
$y = x^2$
$(0,1)$
2

Note Title 1/20/2022

أمثلة:

[1] أوجد (مع الرسم) مجال:

$$f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2} + \sqrt{x^2+y^2-4}$$

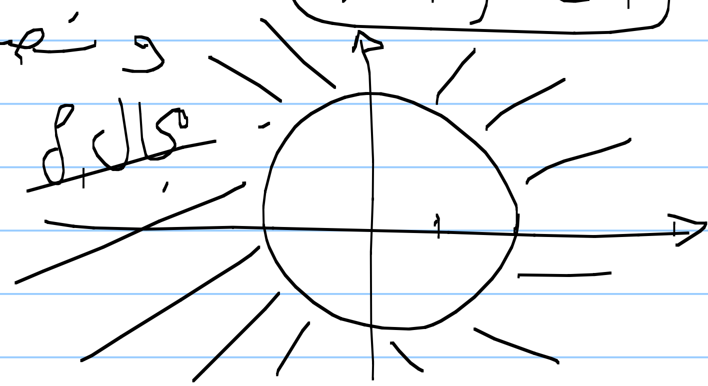
$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 9-x^2-y^2 \geq 0 \text{ و } x^2+y^2-4 \geq 0\}$$

مجال $\sqrt{x^2+y^2-4}$: $x^2+y^2-4=0$?

f_1

$\boxed{x^2+y^2=4}$ دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 2.

مجال f_1 :

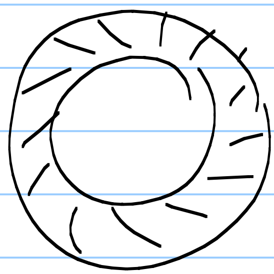


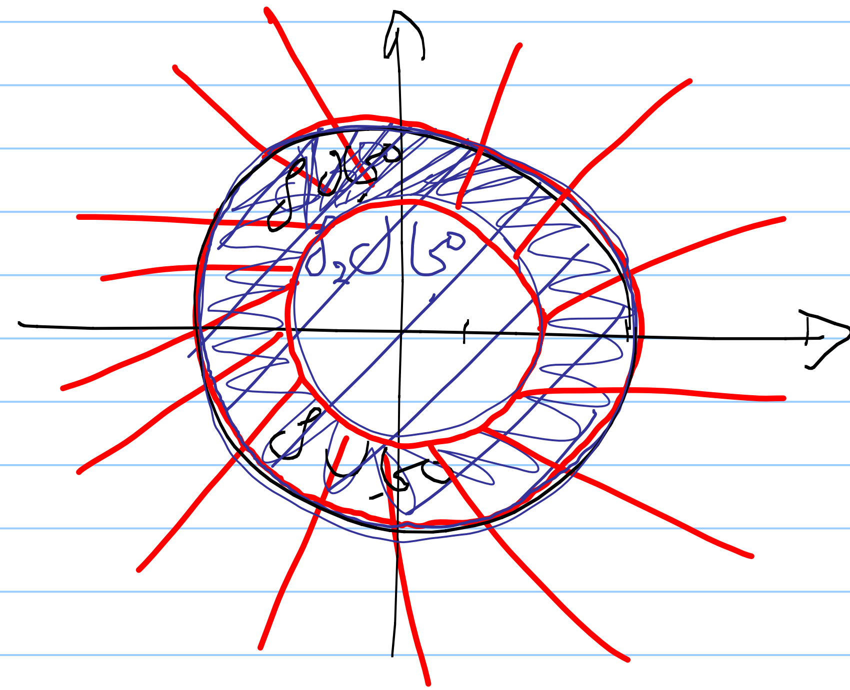
مجال f_2 : $\sqrt{9-x^2-y^2}$

$9-x^2-y^2=0$?

$\boxed{x^2+y^2=9}$

دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 3 .





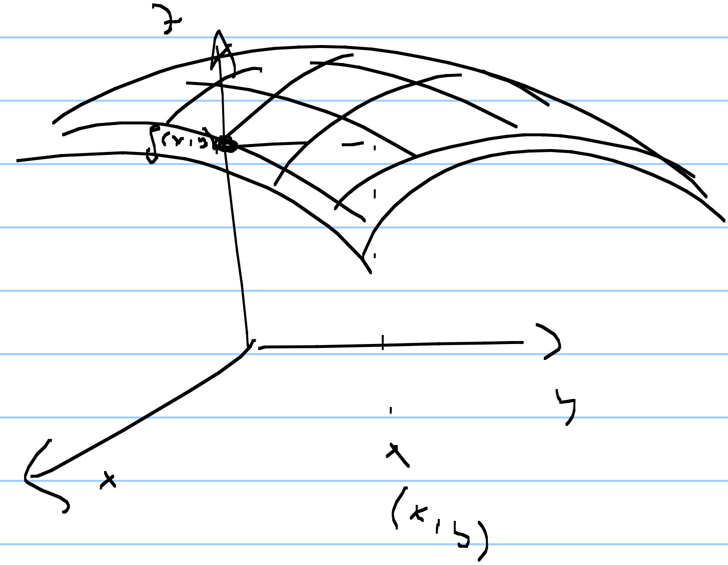
ملاحظة: مجال $f \pm g$ ، $f \times g$ ، $\frac{f}{g}$ هو تقاطع مجالي f و g

(وفي حالة القسمة نستثني جذور (أصفار) المقام)

منحنى دالة في (x,y):

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

منحنى f : سطح في الفضاء $\mathbb{R}^3$



ملاحظة: منحنى دالة في ثلاث متغيرات : سطح في $\mathbb{R}^4$.

النهايات:

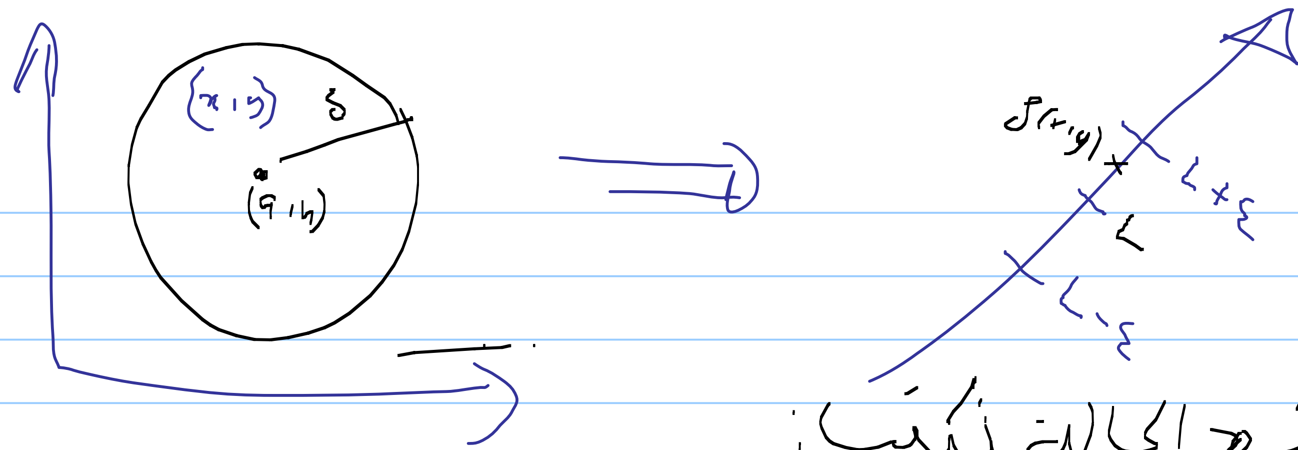
تعريف: لتكن f دالة في (x,y). نقول أن f تنتهي للعدد L لما (x,y) تنتهي لـ (a,b) إذا:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0 : \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2<\delta^2 \Rightarrow -\varepsilon<f(x,y)-L<\varepsilon$$

$(x,y) \in$ القرص الذي مركزه (a,b) ونصف قطره δ $\Longrightarrow L-\varepsilon<f(x,y)<L+\varepsilon$

$$f(x,y)\in(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$$



وفي هذه الحالة نكتب:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Note Title 1/23/2022

النهايات:

نظرية الحصر: لتكن f، g و h ثلاث دوال في (x,y,z) تحقق:

$$g(x,y,z) \leq f(x,y,z) \leq h(x,y,z)$$

إذا كانت $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)$ موجودة و كانت:

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} g(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} h(x,y,z) = L$$

فإن:

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = L$$

أمثلة: (1) أوجد النهاية:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} x^3 + xy^2 - y^4 + 1 \underset{\text{التعويض المباشر}}{=} 10$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} = 1 \qquad \boxed{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \qquad \boxed{3}$$

$$\boxed{\frac{\square}{\square + \text{موجب}} \leqslant 1}$$

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \leqslant 1$$ و منه:

$$\frac{x^2}{x^2+y^6} \leqslant 1$$

$$\frac{x^2}{\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{\text{موجب}}} \leq 1$$

مثال:

$$\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} = \frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^4}{x^2+y^2}$$

$$0 \leq \left|\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x^3|}{x^2+y^2} + \frac{y^4}{x^2+y^2} = \overbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}^{\leq 1} \cdot |x| + \overbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}^{\leq 1} y^2$$

$$\leq 1 \cdot |x| + 1 \cdot y^2$$

$(x,y) \to (0,0)$

$(x,y) \to (0,0)$

0

~~اذا~~

لكن: $0 \le \left|\dfrac{x^3+y^{\cancel{3}4}}{x^2+y^2}\right| \le |x|+y^2$

و $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x|+y^2 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$ فإن (حسب نظرية القص):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} = 0$$

$\boxed{4}$ أثبت أن: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

≤ 1

$$0 \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |y|$$

بما أن: $0 \le \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |y|$

و $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$ فإن:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$\boxed{5}$ أثبت أن:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^3}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$0 \le |\sin(\ )| \le 1$$

≤ 1 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ ≤ 1

$$0 \le \left|\frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^3}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|\,|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |x|$$

$$\rightarrow 0 \leftarrow$$

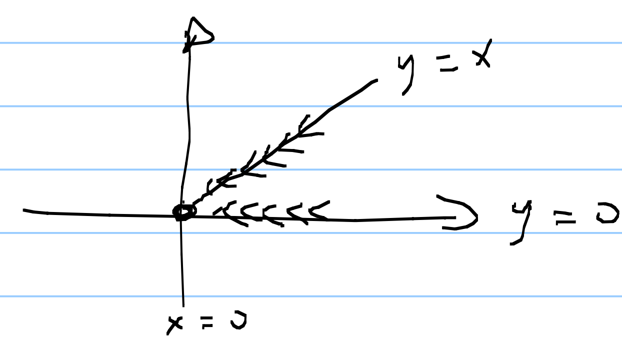
النهايات (نظرية المسارات)

Note Title 1/27/2022

نظرية: إذا كانت $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ تختلف من مسار إلى آخر (يمر بالنقطة (a,b)) فإنها غير موجودة.

هذا يعني أنه إذا كانت $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ تختلف على مسارين (يمران بـ (a,b)) فإنها غير موجودة.

مثال 1. أثبت أن النهاية: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ غير موجودة.



على $y=0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

على المسار $y = x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

ومنه: $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ غير موجودة.

مثال: احسب:

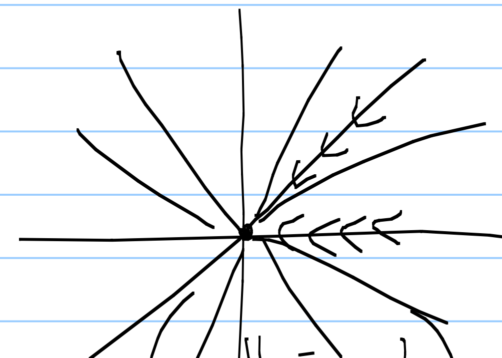
$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

على $y = 0$

$$\lim 0 = 0$$

على $y = x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot x}{x^4 + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^4 + x^2} = 0$$

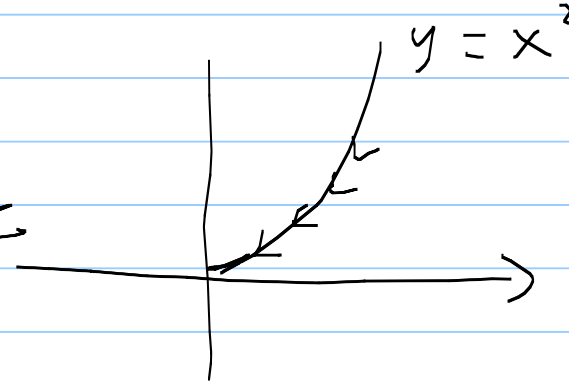


لوبيتال مرتين

على $y = mx$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot mx}{x^4 + (mx)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2} \cdot mx}{\cancel{x^2}\left[x^2 + m^2\right]} = \boxed{0}$$

على المسار $y = x^2$



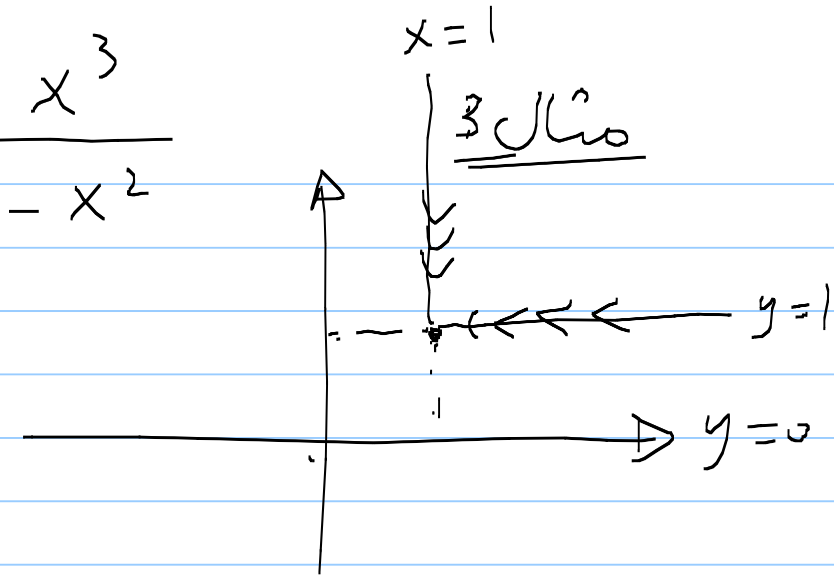
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + (x^2)^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^4}}{2\cancel{x^4}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} = \boxed{1/2}$$

ومما سبق نستنتج أن $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ غير موجودة.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y^2-x^3}{y^2-x^2}$$

مثال 3



$$\lim_{x\to1} \frac{1-x^3}{1-x^2}$$ حالة $y=1$

$$= \lim_{x\to1} \frac{-3x^2}{-2x} = 3/2$$

$$\lim_{y\to1} \frac{\cancel{y^2-1}}{\cancel{y^2-1}} = 1.$$ حالة المسار $x=1$

إذاً: $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y^2-x^3}{y^2-x^2}$ غير موجودة.

Note Title 1/25/2022

النهايات :

مثال : أثبت أن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} |\sin\theta| \le |\theta| & \theta \to 0 \\ |\sin\theta| \le 1 & \theta \to \infty \end{cases}$$

$$0 \le \left|\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}\right| \le \underbrace{\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}}_{}\le |y|, \qquad \frac{x^2}{x^2+y^2}\le 1$$

~~بالحصر~~

$$0 \quad 0 \xleftarrow{(x,y)\to(0,0)} |y|$$

وبما أن: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$ فإن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} = 0$

خواص النهايات:

(1) $\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} (f \pm g)(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) \pm \lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} g(x,y,z)$

(حيث النهايات كلها موجودة)

(2) $\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} (f \times g) = \lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) \cdot \lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} g(x,y,z)$

(3) $\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y,z) = \frac{\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)}{\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} g(x,y,z)}$ $\left(\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} g(x,y,z) \neq 0\right)$

(4)

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g", "\text{συνεχής}"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} (g\circ f)(x,y,z) = g\left(\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)\right)$$

$$D_g \ni \lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) \ \text{υπάρ}$$

<u>مثال:</u> $\sin$ دالة متصلة

$$\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \sin\left(x^2+3y-1\right)$$

$$=\sin\left(\lim_{(x,y)\to(1,\pi)}\left(x^2+3y-1\right)\right)$$

$$=\sin\left(\cancel{1}+3\pi-\cancel{1}\right)$$

$$=0$$

الدوال المتصلة:

تعريف: نقول أن الدالة $f(x,y,z)$ متصلة عند النقطة (a,b,c) إذا:

(1) $f(a,b,c)$ موجودة.

(2) $\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)$ موجودة.

(3) $\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = f(a,b,c)$

مثال: (1)

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ \dfrac{1}{2} & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

ادرس اتصال f عند $(1,0,0)$ و $(0,0,0)$.

عند $(1,0,0)$:

(1) $f(1,0,0) = 1$

(2) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,0)} f(x,y,z) = 1$ (التعويض)

(3) $\lim f(x,y,z) = f(1,0,0)$ ✓

اذاً : f متصلة عند $(1,0,0)$.

عند $(0,0,0)$:

(1) $f(0,0,0) = \frac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$0 \le \left|\frac{x^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}+\frac{z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| \qquad |a+b| \le |a| + |b|$$

$$\le \frac{|x^3|}{x^2+y^2+z^2}+\frac{|z^3|}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \frac{x^2|x|}{x^2+y^2+z^2}+\frac{z^2|z|}{x^2+y^2+z^2}$$

≤ 1 $\qquad$ ≤ 1

$$\le |x| + |z|$$

$$\downarrow 0$$

وبما أن $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0,0)$ فإن

f غير متصلة عند $(0,0,0)$.

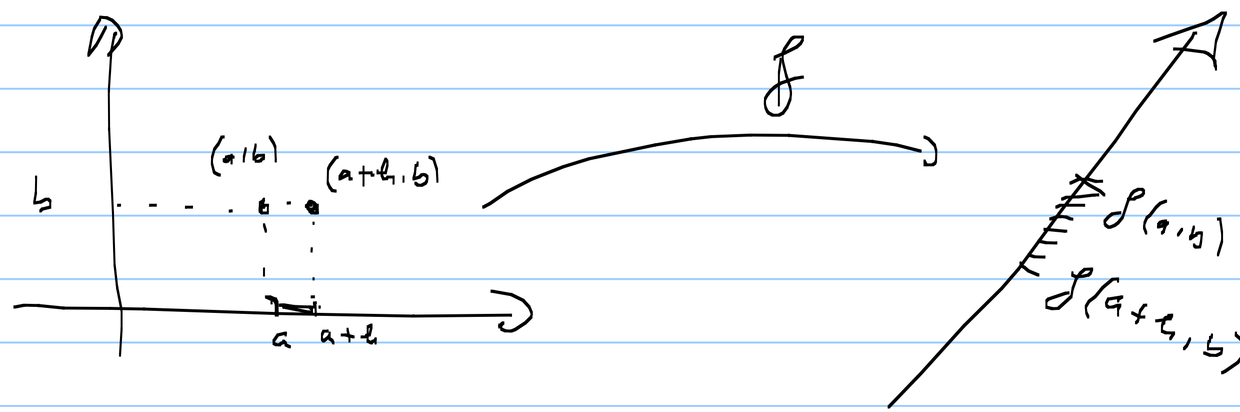
Note Title 1/30/2022

الاشتقاق الجزئي:

تعريف: لتكن f دالة في متغيرين (x,y) ولتكن $(a,b) \in D_f$

نعرف المشتقة الجزئية الأولى لـ f بالنسبة لـ x عند (a,b):

$$f_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$



$$f_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

مثال 1. $f(x,y) = xy + y^2$ $\qquad (a,b) = (1,2)$

$$f_x(1,2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h,2) - f(1,2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(2(1+h) + 2^2\right) - \left(1 \cdot 2 + 2^2\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2} + 2h + \cancel{4} - \cancel{2} - \cancel{4}}{h} = 2.$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1,2+h) - f(1,2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[1\cdot(2+h) + (2+h)^2\right] - \left[1\cdot 2 + 2^2\right]}{h}$$

$$h^2 + 5h$$

$$h(h+5)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2} + h + \cancel{4} + h^2 + 4h \cancel{- 2} \cancel{- 4}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h+5)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} h + 5 = 5$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 5}$$

ملاحظة: لإيجاد $\frac{\partial f}{\partial x}$ نثبت y ونشتق بالنسبة لـ x

ولإيجاد $\frac{\partial f}{\partial y}$ ،، x ،، ،، y .

مثال: $f(x,y) = xy + y^2$

$x \cdot 3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 0 = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 5.$$

مثال 3: $f(x,y,z) = x^2 \underbrace{y^2 z^3}_{\text{ث}}$

$$f_x = 2x\, y^2 z^3$$

$$f_y = x^2 (2y) z^3 = 2x^2 y z^3$$

$$f_z = x^2 y^2 (3z^2) = 3x^2 y^2 z^2$$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^3$$ <u>4 Lição</u>

$$f_x = 2x \qquad f_y = 2y \qquad f_z = 3z^2$$

$$f(x,y) = \sin\left(x^2 y^3\right)$$ <u>5 Lição</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \cos\left(x^2 y^3\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2 \cos\left(x^2 y^3\right)$$

$$f(x,y) = \sin\left(\ln\left(x^2 + y^2 + 1\right)\right)$$ <u>6 Lição</u>

$$f_x = 2x \cdot \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \cdot \cos\left(\ln\left(x^2 + y^2 + 1\right)\right)$$

$$= \frac{2x}{x^2+y^2+1} \cdot \cos\left(\ln(x^2+y^2+1)\right)$$

$$= \frac{2x\cos\left(\ln(x^2+y^2+1)\right)}{x^2+y^2+1}$$

مثال 7. أوجد $f_x(1,0)$ و $f_x(0,0)$ ، $f_y(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+xy^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$: $$f_x = \frac{(3x^2+y^4)(x^2+y^2) - 2x\left(x^3+xy^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_x(1,0) = \frac{3\cdot 1 - 2(1+0)}{1} = 1.$$

عند $(0,0)$: نستخدم التعريف

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^3 + xy^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{h^3 + h\cdot 0^4}{h^2+0^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1$$

إذاً :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0^3 + 0 \cdot h^4}{0^2 + h^2} - 0}{h} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0}$$

$=$

Note Title 2/1/2022

قابلية التفاضل:

تعريف: لتكن f دالة متصلة عند (a,b) و $f_x(a,b)$ ، $f_y(a,b)$ موجودة.

نقول أن f قابلة للتفاضل عند (a,b) إذا:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\left| f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) - f_x(a,b)\cdot\Delta x - f_y(a,b)\cdot\Delta y \right|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

$h \to 0$

$k \to 0$

ملاحظة: $\boxed{1}$ إذا كانت f غير متصلة عند (a,b)

فإن f غير قابلة للتفاضل عند (a,b).

$\boxed{2}$ إذا كانت $f_x(a,b)$ أو $f_y(a,b)$ غير موجودة فإن f غير قابلة

للتفاضل عند (a,b).

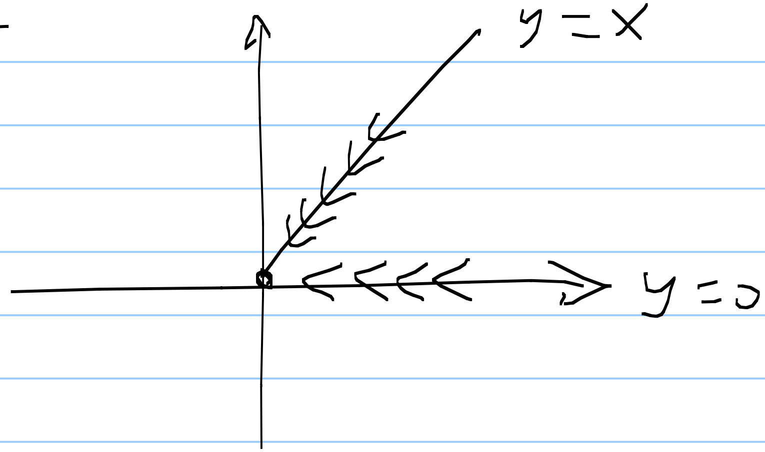
أمثلة: $\boxed{1}$ كل كثيرة حدود هي دالة قابلة للتفاضل عند جميع النقاط.

$\boxed{2}$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. ادرس قابلية تفاضل f عند $(0,0)$

الجواب: f غير متصلة عند $(0,0)$:

1. $f(0,0) = 0$

2. $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,0) = ?$ ✗



على المسار $y=0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot 0}{x^2+0^2} = \boxed{0}$$

على المسار $y=x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot x}{x^2+x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \boxed{1/2}$$

$\Leftarrow$ $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ غير موجودة

$\Leftarrow$ f غير متصلة عند $(0,0)$

$\Leftarrow$ f غير قابلة للتفاضل عند $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \boxed{3}$$

1. f متصلة عند $(0,0)$:

1. $f(0,0) = 0$

2. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$ (الحصر)

$$0 \le \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \le |y|$$

$$\le 1$$

$$\to 0 \leftarrow$$

3. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$ 2.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2 \cdot 0}{h^2+0} - 0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^2 \cdot h}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0$$

.3

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\left| f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - \overbrace{f(0,0)}^{=0} - \overbrace{f_x(0,0)}^{=0} \cdot \Delta x - \overbrace{f_y(0,0)}^{=0} \Delta y \right|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = ?$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\left| \dfrac{\Delta x^2 \cdot \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \right|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x^2 |\Delta y|}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

$\Delta y = \Delta x$, [illegible]

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x^3|}{2 \Delta x^2 \sqrt{2 \Delta x^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x^3|}{2 |\Delta x^2| \sqrt{2} \cdot |\Delta x|}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{|\Delta x^3|}}{2\sqrt{2}\,\cancel{|\Delta x^3|}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

إذاً f غير قابلة التفاضل عند $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ $\boxed{4}$

* f متصلة عند $(0,0)$: نظرية الحصر

* $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

* f قابلة التفاضل عند $(0,0)$:

$$0 \le \frac{|\Delta x^3 \Delta y|}{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \overbrace{\frac{\Delta x^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}}^{\le 1}\cdot\overbrace{\frac{|\Delta x|\cdot|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}^{\le 1} \le |\Delta y|$$

$0 \quad 0 \quad 0$

قانون السلسلة:

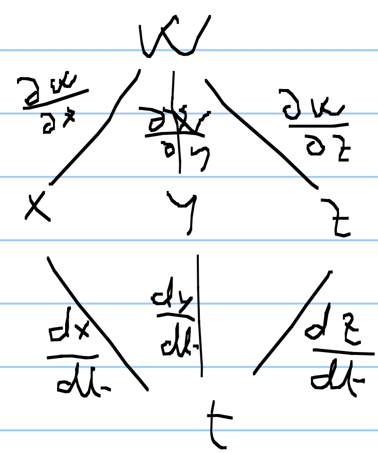
Note Title 2/6/2022

تعريف 1. لتكن f هي (x,y,z) قابلة للاشتقاق الجزئي.

ولنفرض أن $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ ، $z = z(t)$ دوال قابلة للاشتقاق

إذا كانت $W(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ فإن:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$



مثال: إذا كانت $w = \ln(xy + z^2)$

وكانت $x = t^3$ ، $y = \sin t$ ، $z = e^t$ أوجد

$\frac{dw}{dt}$.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$= \left(\frac{y}{xy+z^2}\right)\cdot(3t^2) + \left(\frac{x}{xy+z^2}\right)\cdot(\cos t) + \left(\frac{2z}{xy+z^2}\right)\cdot(e^t)$$

$$= \frac{3t^2\sin t}{t^3\sin t + e^{2t}} + \frac{t^3\cos t}{t^3\sin t + e^{2t}} + \frac{2e^{2t}}{t^3\sin t + e^{2t}}$$

$$= \frac{1}{t^3 \sin t + e^{2t}} \left(3t^2 \sin t + t^3 \cos t + 2e^{2t} \right)$$

أوجد: $\frac{dw}{dt}(0)$

$$\frac{dw}{dt}(0) = 2.$$

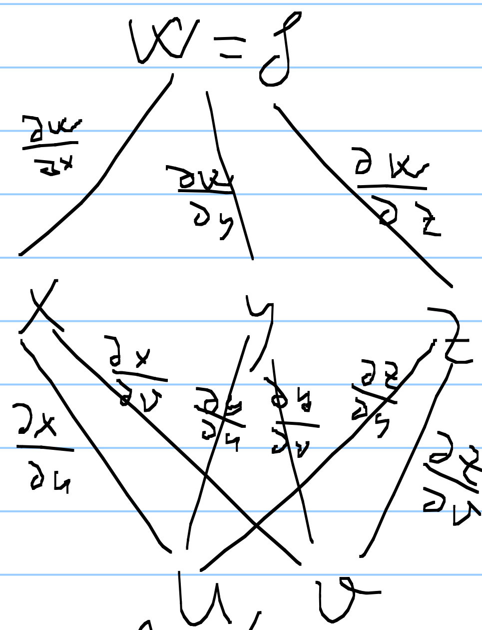
نظرية 2: لتكن f دالة في (x,y,z) قابلة للاشتقاق الجزئي

حيث $x = x(u,v)$ ، $y = y(u,v)$ ، $z = z(u,v)$ دوال قابلة

للاشتقاق الجزئي. إذا كانت $w(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ فإن:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$



$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

مثال: ليكن $w = \ln(xy + z^3)$

حيث $x = uv$ $\quad y = u + v$ $\quad z = \sin(uv)$

أوجد $\frac{\partial w}{\partial u}$ و $\frac{\partial w}{\partial v}$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$= \frac{y}{xy+z^3} \cdot v + \frac{x}{xy+z^3} \cdot 1 + \frac{3z^2}{xy+z^3} \cdot v \cos(uv)$$

$$= \frac{1}{uv(u+v) + \sin^3(uv)} \left[(u+v)v + uv + 3v \sin^2(uv) \cos(uv) \right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= \frac{y}{xy+z^3} \cdot u + \frac{x}{xy+z^3} \cdot 1 + \frac{3z^2}{xy+z^3} \cdot u\cos(uv)$$

$$= \frac{1}{uv(u+v)+\sin^3(uv)} \left[(u+v)u + uv + 3u\sin^2(uv).\cos(uv) \right]$$

Note Title 2/10/2022

قانون السلسلة:

المشتقات الجزئية من مراتب عليا:

$f(x,y)$

$f_{xx}: \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ $\qquad$ $f_{xy}: \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

$f_{yy}: \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ $\qquad$ $f_{yx}: \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$

وبالمثل نعرف المشتقات الجزئية من مراتب عليا (المحاضرة السابقة)

أمثلة:

[1] إذا كانت $w = f(x,y)$ دالة قابلة للتفاضل

بحيث: $x = u - v$ و $y = v - u$

أثبت أن : $\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} = 0$

(تطبيق : $w = (x-y)\sin(y+x)$)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & w \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ x \arrow[d] \arrow[drr] & & y \arrow[dll] \arrow[d] \\ u & & v \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(-1)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-1) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 1$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$$

ومنه :

$$\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\left(-\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$=\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}}-\cancel{\frac{\partial f}{\partial y}}-\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}}+\cancel{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$$=0$$

<u>مثال 2</u> أثبت أن الدالة $w=e^{x}\sin y$ تحقق :

$$w\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

<u>الحل :</u> <u>اشتقاق مباشر :</u>

$$\frac{\partial w}{\partial x}=e^{x}\sin y \qquad \frac{\partial w}{\partial y}=e^{x}\cos y$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = e^x . \cos y$$

ومنه:

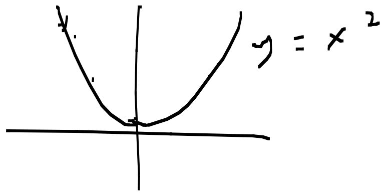
$$w \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = (e^x \sin y)(e^x \cos y) = e^{2x} \sin y . \cos y$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} . \frac{\partial w}{\partial y} = (e^x \sin y)(e^x \cos y) = e^{2x} \sin y . \cos y$$

وبالتالي فإن:

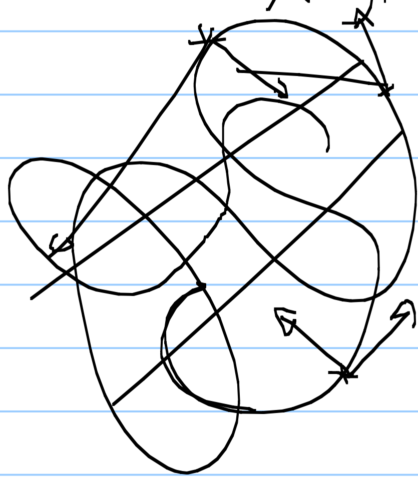
$$w \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} . \frac{\partial w}{\partial y}.$$

الاشتقاق الضمني:



$y = x^2 \qquad y' = 2x$

احسب y' إذا: $\quad x\,y_{(x)} + x^2 = y^4_{(x)}$



$y'(x)$

y':

$$1.\ y + x y' + 2x = 4y^3 y'$$

$$y + 2x = 4y^3 y' - x y'$$

$$= (4y^3 - x) y'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y + 2x}{4y^3 - x}$$

نظرية 1. إذا كانت y دالة في x قابلة للاشتقاق ومعرفة بالمعادلة $F(x,y)=0$ حيث F قابلة للتفاضل

فإن:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

مثال: المثال السابق: $xy + x^2 = y^4$

نضع: $F(x,y) = xy + x^2 - y^4 = 0$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{y+2x}{x-4y^3} = \frac{y+2x}{4y^3-x}$$

مثال 2 أوجد $y'(0)$ عندما : $xy + y^3 = 8 + x^6$

$F(x,y) = xy + y^3 - 8 - x^6$

$y(x)$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{y - 6x^5}{x + 3y^2}$$

$y = ? \Leftarrow x = 0$

$0 \cdot y + y^3 = 8 + 0^6$

$y = 2$

$$y'(0) = -\frac{2 - 0}{0 + 12}$$

نظرية ٢: إذا كانت z دالة في (x,y) قابلة للتفاضل ومعرفة بالمعادلة: $F(x,y,z)=0$ حيث F قابلة للتفاضل، فإن:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

مثال 1: أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$، $\frac{\partial z}{\partial y}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ حيث:

$$x^2+y^2+z^2 = xyz+1$$

الجواب:

نضع: $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x - yz}{2z - xy} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y - xz}{2z - xy} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\left(2 - y\frac{\partial z}{\partial x}\right)(2z - xy) - \left(2\frac{\partial z}{\partial x} - y\right)(2x - yz)}{(2z - xy)^2} \qquad (3)$$

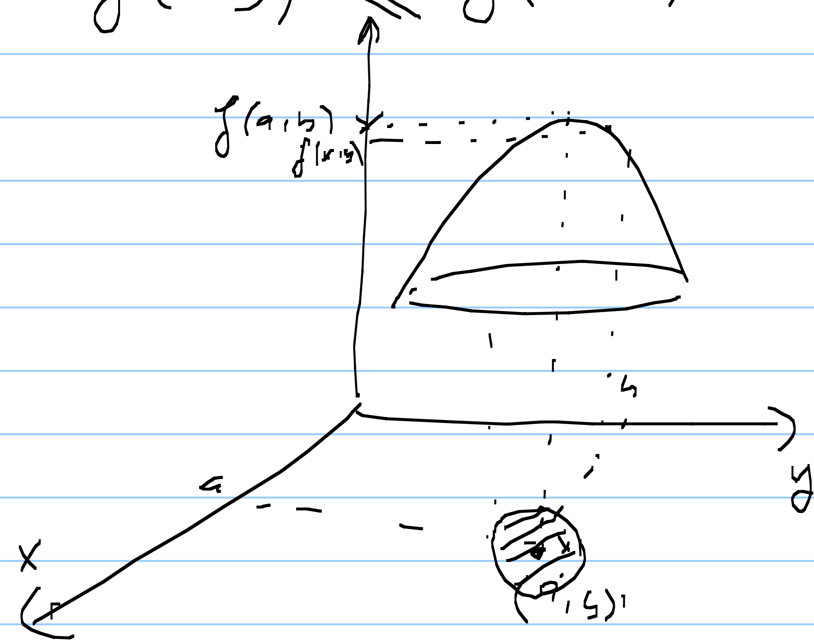
ثم نعوض عن قيمة $\frac{\partial z}{\partial x}$ من (1) في (3)

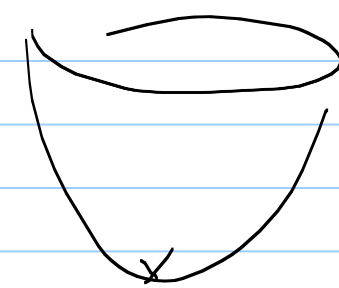
Note Title 2/13/2022

القيم القصوى المحلية:

تعريف 1. نقول أن $f(a,b)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجد قرص مفتوح D مركزه (a,b) بحيث:

$$f(x,y) \leq f(a,b) \quad \forall (x,y) \in D$$





بالمثل: نقول أن $f(a,b)$ قيمة صغرى محلية لـ f

إذا وجد قرص مفتوح D يحوي (a,b) بحيث:

$$f(x,y) \geq f(a,b) \quad \forall (x,y) \in D$$

النقاط الحرجة لـ f: نقول أن (a,b) نقطة حرجة

للدالة f إذا: $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ (1)

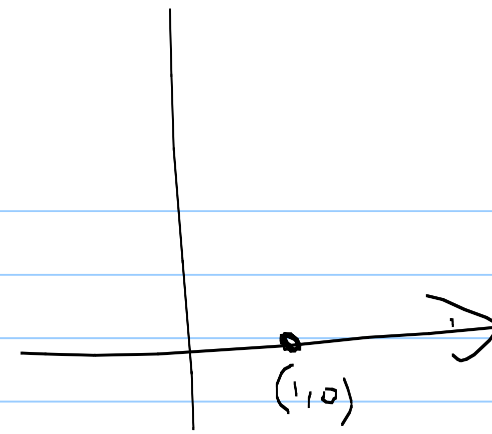
أو (2) $f_x(a,b)$ أو $f_y(a,b)$ غير موجودة.

أمثلة: أوجد النقاط الحرجة للدوال:

$\boxed{1}$ $f(x,y) = x^2 - 2x + y^3 + 3$

$$f_x = 2x - 2 = 0$$
$$f_y = 3y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1, \; y = 0$$

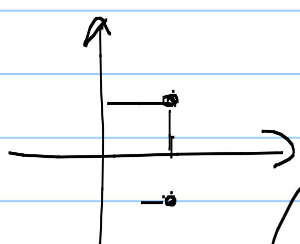
إذاً النقطة الحرجة الوحيدة لـ f هي $(1,0)$



$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^3 - 3y + 3 \quad \boxed{2}$$

$$f_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f_y = 3y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(y^2 - 1) = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$



النقاط الحرجة لـ f هي $(1,1)$, $(1,-1)$

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^3 + 3y + 1 \qquad \boxed{3}$$

$$f_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f_y = 3y^2 + 3 \neq 0$$

لا توجد نقاط حرجة لـ f.

نظرية 1: إذا كانت $f(a,b)$ قيمة قصوى محلية لـ f فإن (a,b) نقطة حرجة.

نظرية : ليكن f دالة في (x,y) قابلة للتفاضل والاشتقاق الجزئي مرتين والمشتقات الجزئية من المرتبة الثانية دوال متصلة.

لتكن :
$$G(x,y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$$

لتكن (a,b) نقطة حرجة لـ f . إذا :

(1) $G(a,b) > 0$:

$f(a,b)$ قيمة عظمى محلية إذا $f_{xx}(a,b) < 0$

$f(a,b)$ " صغرى " إذا $f_{xx}(a,b) > 0$

(ب) $G(a,b) < 0$: $f(a,b)$ ليست قيمة قصوى لـ f

في هذه الحالة : $(a, b, f(a,b))$ تسمى نقطة سرجية لـ f .

(جـ) $G(a,b) = 0$. يفشل الاختبار .

أمثلة : [1] أوجد القيم القصوى المحلية والنقاط السرجية للدالة :

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x + 1$$

الجواب: النقاط الحرجة:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 3y^2 - 3 = 0 & (1) \\ f_y = 6xy = 0 & (2) \end{cases}$$

من (2) نجد: $x = 0$ أو $y = 0$

◦ **إذا $x = 0$** نعوض في (1) نجد: $3y^2 - 3 = 0$

$\cancel{3}y^2 = \cancel{3}$

$y^2 = 1$

$y = \pm 1$

في هذه الحالة : النقاط الحرجة : $(-1,0)$ ، $(1,0)$

إذا $y=0$ نعوض في (1) نجد : $3x^2-3=0$

$3x^2=3$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

في هذه الحالة : النقاط الحرجة هي $(1,0)$ ، $(-1,0)$

$\Leftarrow$ النقاط الحرجة لـ f هي : $(\pm 1,0)$ و $(0,\pm 1)$

Note Title 2/15/2022

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x + 1$$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 3y^2 - 3 \\ f_y = 6xy \end{cases}$$

النقاط الحرجة : $(1,0)$ ، $(-1,0)$ ، $(0,1)$ ، $(0,-1)$

$$f_{xx} = 6x \qquad f_{yy} = 6x \qquad f_{xy} = 6y$$

$$G(x,y) = f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = (6x)\cdot(6x) - (6y)^2$$

$$= 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2)$$

$\underline{G(1,0)=36>0}$ وكما أن $f_{xx}(1,0)=6>0$ فإن $f(1,0)=-1$ قيمة صغرى محلية

$\underline{G(-1,0)=36>0}$: ،، $f_{xx}(-1,0)=-6<0$ فإن $f(-1,0)=3$ قيمة عظمى محلية

$\underline{G(0,1)=-36<0}$: $(0,1,1)$ نقطة سرجية

$\underline{G(0,-1)=-36<0}$: $(0,-1,1)$ نقطة سرجية .

<u>مثال 2</u> : أوجد القيم القصوى المحلية والنقاط السرجية للدالة :

$$f(x,y)=x^3+y^3-6xy+2$$

الجواب: النقاط الحرجة:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 6y = 0 \\ f_y = 3y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 6y \\ 3y^2 = 6x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2y \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{2} \quad (1) \\ y^2 = 2x \quad (2) \end{cases}$$

نعوض (1) في (2):

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = 2x$$

$$\frac{x^4}{4} = 2x$$

$$x^4 = 8x$$

$$X^4 - 8X = 0$$

$$X(X^3 - 8) = 0 \Rightarrow X = 2 \text{ أو } X = 0$$

بالتعويض في (1) نجد أن النقاط الحرجة هي :

$$(2,2) \quad ، \quad (0,0)$$

$f_{xx} = 6x$

$f_{yy} = 6y$ $\qquad G(x,y) = (6x)\cdot(6y) - (-6)^2$

$f_{xy} = -6$ $\qquad = 36xy - 36$

$$= 36(xy-1)$$

$G(0,0)=-36<0$: $(0,0,2)$ نقطة سرجية

$G(2,2)=108>0$ وبما أن $f_{xx}(2,2)=12>0$ فإن $f(2,2)=-6$ قيمة صغرى محلية.

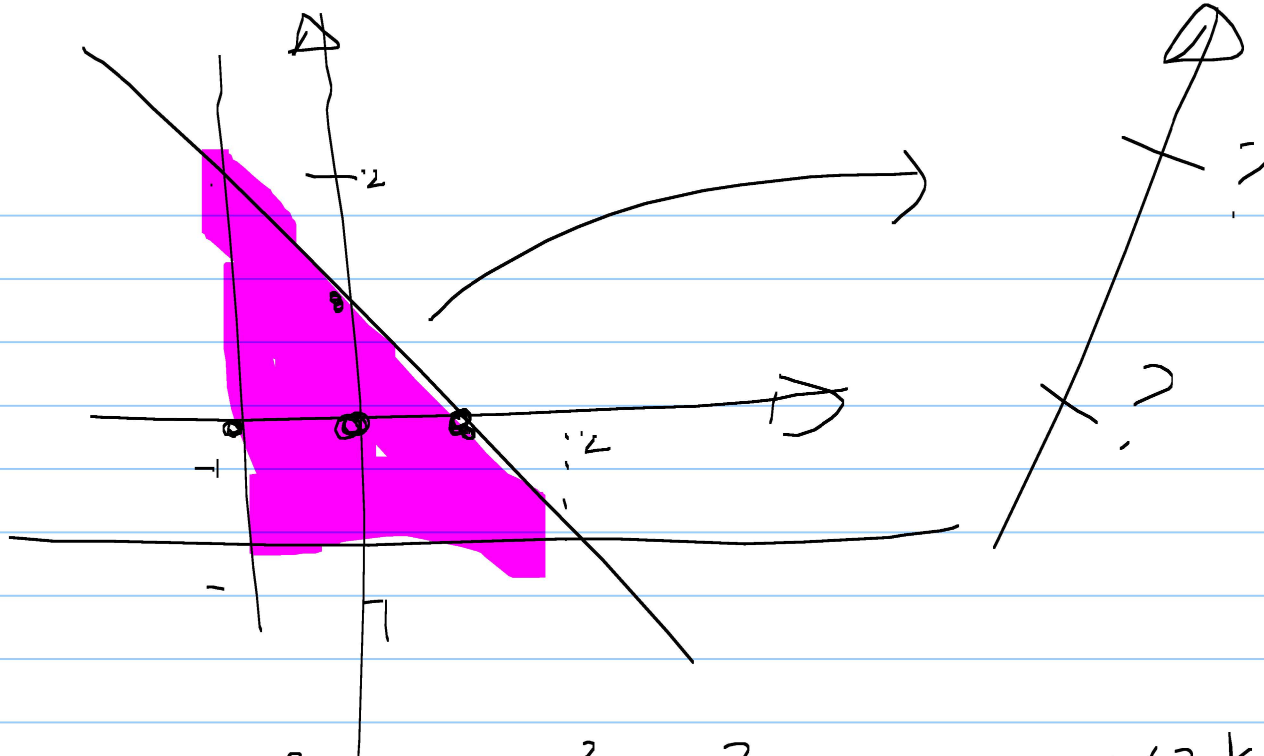
Note Title 2/17/2022

القيم القصوى المطلقة :

نظرية : إذا كانت f دالة متصلة على منطقة مغلقة ومحدودة فإن f تدرك قيمها القصوى على هذه المنطقة .

أمثلة : $\boxed{1}$ أوجد القيم القصوى (المطلقة) للدالة $f(x,y)=x^3+y^2+1$ على المنطقة المحدودة بالمستقيمات

$x+y=1$ ، $x=-1$ ، $y=-1$.



① داخل المثلث:

$$f(x,y) = x^3 + y^2 + 1$$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 = 0 \\ f_y = 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$$

النقطة الحرجة هي: $(0,0)$ وتنتمي للداخل

. المثال

② على المستقيم $x=-1$ مع $-1 \le y \le 2$

$$f = \cancel{-x} + y^2 \cancel{+1} = y^2$$

$$f' = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \in [-1, 2]$$

النقطة الحرجة هي $(-1, 0)$

③ على المستقيم $y=-1$ مع $-1 \le x \le 2$

$$f = x^3 + (-1)^2 + 1 = x^3 + 2$$

$$f' = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \in [-1, 2]$$

النقطة الحرجة هي $(0,-1)$

④ حال المستقيم $x+y=1$ مع $-1 \leq x \leq 2$

$$f = x^3 + (1-x)^2 + 1$$

$$f' = 3x^2 - 2(1-x) = 3x^2 + 2x - 2 = 0 \ ?$$

$$\Delta = 4 - 4\times 3(-2) = 28 = 7\times 4 > 0$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$\times \quad \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \notin [-1, 2]$ لان

$\checkmark \quad \frac{-1+\sqrt{7}}{3} \in [-1, 2] \Rightarrow y = 1 - \frac{-1+\sqrt{7}}{3} = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$

(x,y)	$(0,0)$	$(-1,0)$	$(0,-1)$	$\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$	$(-1,-1)$	$(-1,2)$	$(2,-1)$		
$f(x,y)$	1	0	2	1,…	1	4	10		

$x^3 + y^2 + 1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5 \quad \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 1 \quad \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{8}{8} \quad \frac{11}{8}$

القيمة العظمى لـ م هي : 10

و " الصغرى لـ م هي : 0

Note Title 2/20/2022

القيم القصوى المقيدة :

مضاريب لاجرانج : لإيجاد القيم القصوى

للدالة $f(x,y,z)$ تحت القيد : $g(x,y,z)=0$

نوجد حلول معادلات لاجرانج :

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ f_z = \lambda g_z \end{cases}$$

مع $g(x,y,z)=0$

مثال 1. أوجد القيم القصوى للدالة

$f(x,y)=2x+y+3$ على المنطقة: $2x^2+y^2=3$

الجواب: معادلات لاجرانج:

$$f(x,y)=2x+y+3$$

القيد: $g(x,y)=2x^2+y^2-3=0$

معادلات لاجرانج:

$$\begin{cases} f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 4\lambda x & (1) \\ 1 = 2\lambda y & (2) \end{cases}$$

$$2x^2 + y^2 = 3 \quad (3)$$

نلاحظ أن $\lambda \neq 0$ ، $x \neq 0$ ، $y \neq 0$:

$$\frac{(1)}{(2)} : \quad \frac{2}{1} = \frac{4\cancel{\lambda}x}{2\cancel{\lambda}y} \qquad 2 = \frac{2x}{y} \qquad 2y = 2x$$

$$\boxed{y = x}$$

نعوض في (3) فنجد :

$$2x^2 + x^2 = 3$$

$$3x^2 = \cancel{3}$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

ومنه : $x = 1 \Rightarrow y = 1$

$x = -1 \Rightarrow y = -1$

النقاط الحرجة هي $(-1,-1)$ و $(1,1)$

$f(-1,-1) = 0$: القيمة الصغرى لـ f.

$f(1,1) = 6$: " العظمى لـ f.

مثال ٢. أوجد القيمة القصوى (محددا نوعها)

للدالة $f(x,y)=2x^2+y^2+3$ على المستقيم $x+y=1$

الحل:

نضع. $g(x,y)=x+y-1$

معادلات لاجرانج:

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = \lambda \quad (1) \\ 2y = \lambda \quad (2) \end{cases}$$

$x+y=1 \quad (3)$

$① = ② \Rightarrow 4x = 2y \Leftrightarrow \boxed{y = 2x}$

$x = \frac{1}{3} \Leftarrow x + 2x = 1$: نعوض في ③ فنجد

$y = 2/3 \Leftarrow x = \frac{1}{3}$

النقطة الحرجة الوحيدة هي $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{33}{9}$

لكن $(1,0)$ تنتمي للقيد : $f(1,0) = 5$

ومنه نستنتج أن $\frac{33}{9} = f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ قيمة صغرى للدالة f.

<u>مثال 3.</u> أوجد القيم القصوى للدالة:

$$f(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$$

على السطح:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 29$$

<u>الحل:</u> نضع:

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 29$$

<u>معادلات لاجرانج</u>:

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ f_z = \lambda g_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x & (1) \\ 3 = 2\lambda y & (2) \\ 4 = 2\lambda z & (3) \end{cases} \qquad x^2+y^2+z^2 = 29 \quad (4)$$

نلاحظ أن $\lambda \neq 0$ ، $x \neq 0$ ، $y \neq 0$ ، $z \neq 0$

$$\frac{(1)}{(2)} : \frac{2}{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}x}$$

$$\frac{(1)}{(3)} : \frac{1}{2} = \frac{x}{z} \Rightarrow \boxed{z = 2x}$$

نعوض في (4) فنجد :

$$x^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 + (2x)^2 = 29$$

$$x^2 + \frac{9}{4}x^2 + 4x^2 = 29$$

$$4x^2 + 9x^2 + 16x^2 = 29 \times 4$$

$$\cancel{29}x^2 = \cancel{29} \times 4$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}(\pm 2) = \pm 3 \\ z = 2(\pm 2) = \pm 4 \end{cases}$$

النقاط الحرجة هي: $(2, 3, 4)$ و $(-2, -3, -4)$

القيمة العظمى : $f(2,3,4) = 29$

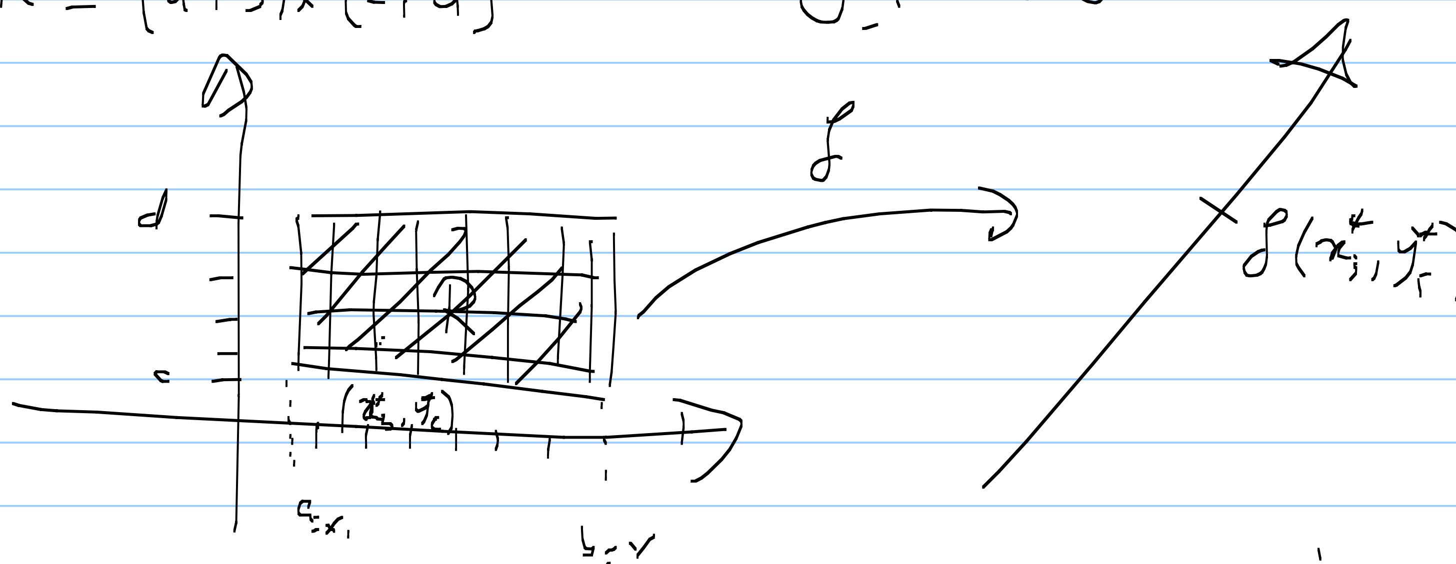
القيمة الصغرى : $f(-2,-3,-4) = -29$

Note Title 2/27/2022

التكامل الثنائي :

تعريف : لتكن f دالة في (x,y) معرفة على

مستطيل : $R = [a,b] \times [c,d]$



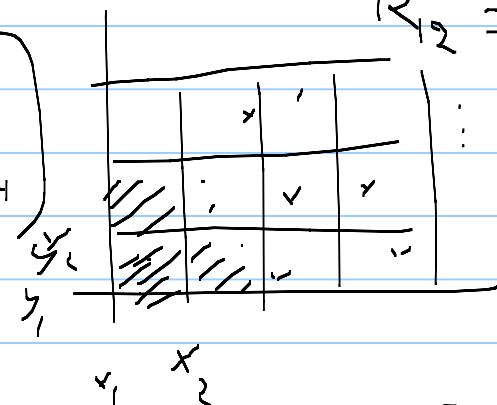
نجزئ المستطيل R الى مستطيلات جزئية R_{ij}

$a = x_1 , x_2 , \ldots \ldots b = x_n$ $\qquad$ $R_{11} = [x_1 , x_2] \times [y_1 , y_2]$

$c = y_1 , y_2 , \ldots \ldots d = y_m$ $\qquad$ $R_{21} = [x_2 , x_3] \times [y_1 , y_2]$

$R_{12} = [x_1 , x_2] \times [y_2 , y_3]$

$$R_{ij} = [x_i , x_{i+1}] \times [y_j , y_{j+1}]$$



$R_{56} = [x_5 , x_6] \times [y_6 , y_7]$

مساحة R_{ij} هي :

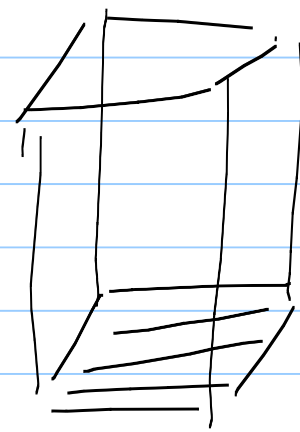
$$A(R_{ij}) = \Delta_{ij}$$

$$= (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$$

في كل R_{ij} نختار (عشوائيا) نقطة (x_i^*, y_j^*)

<u>ليكن المجموع</u>: (مجموع ريمان):

$$\sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} f(x_i^*, y_j^*)\,\Delta_{ij}$$



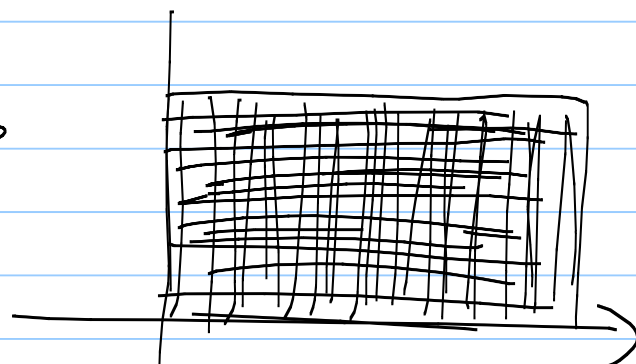
<u>تعريف</u>: نقول أن الدالة f قابلة للتكامل على المستطيل R إذا كانت النهاية التالية موجودة لكل التجزئات الممكنة وكل الاختيارات

المحسكة النقطة (x_i^*, y_j^*) :

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ m \to +\infty \\ \max(\delta_{ij}) \to 0}} \sum_{i,j} f(x_i^*, y_j^*) \Delta_{ij}$$

حيث δ_{ij} : قطر R_{ij}

$\delta_{ij} \to 0$



تعريف: النهاية السابقة (إذا كانت موجودة) نرمز لها ب

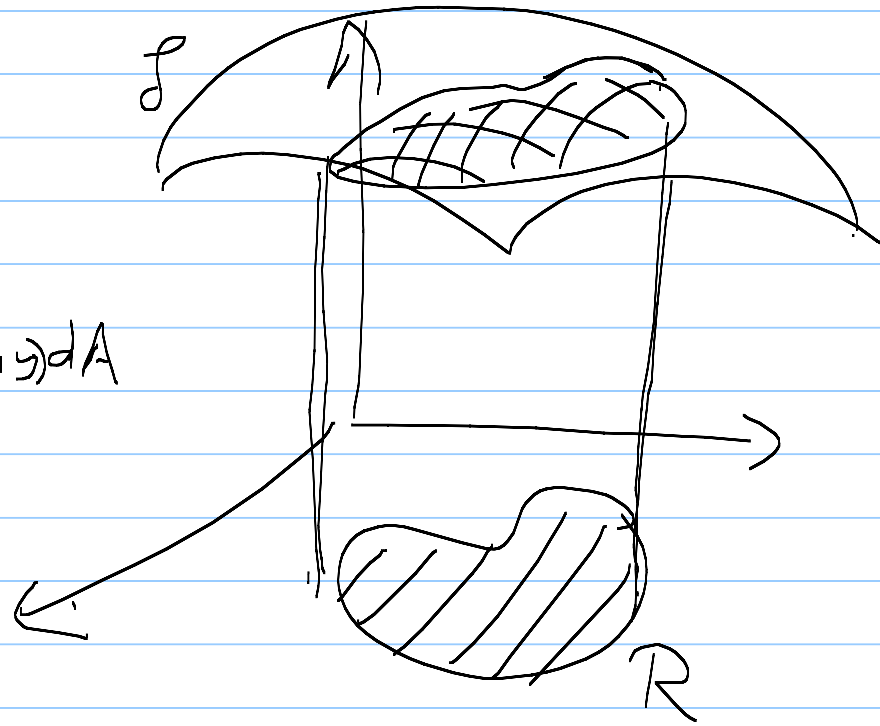
$$\iint_R f(x,y)\, dA$$

حيث dA عنصر المساحة.

ملاحظة: التكامل $\iint_R f(x,y)\, dA$ يمثل حجم الجسم المحدود من الأسفل بالمنطقة R

ومن الأعلى يسقفه f :

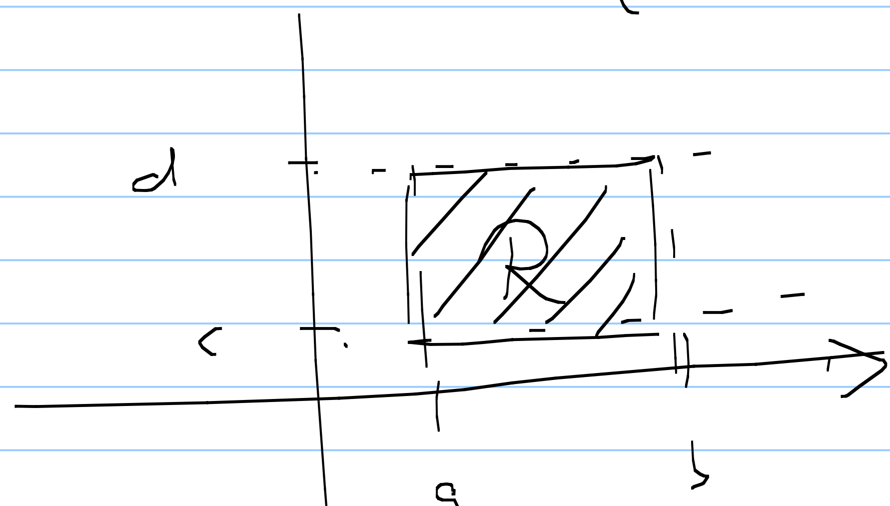
$$\iint_R f(x,y)\,dA$$



حساب التكامل الثنائي:

I) إذا كانت R مستطيل:

$$R = [a,b] \times [c,d] = \left\{ (x,y) : \begin{array}{c} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\}$$



فإن:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

مثال : احسب قيمة التكامل :

$$I = \iint_R (1+4xy)\,dA$$

حيث R المستطيل : $R = [0,1] \times [0,2]$

$$I = \int_0^2 \left[\int_0^1 (1+4xy)\,dx \right] dy$$

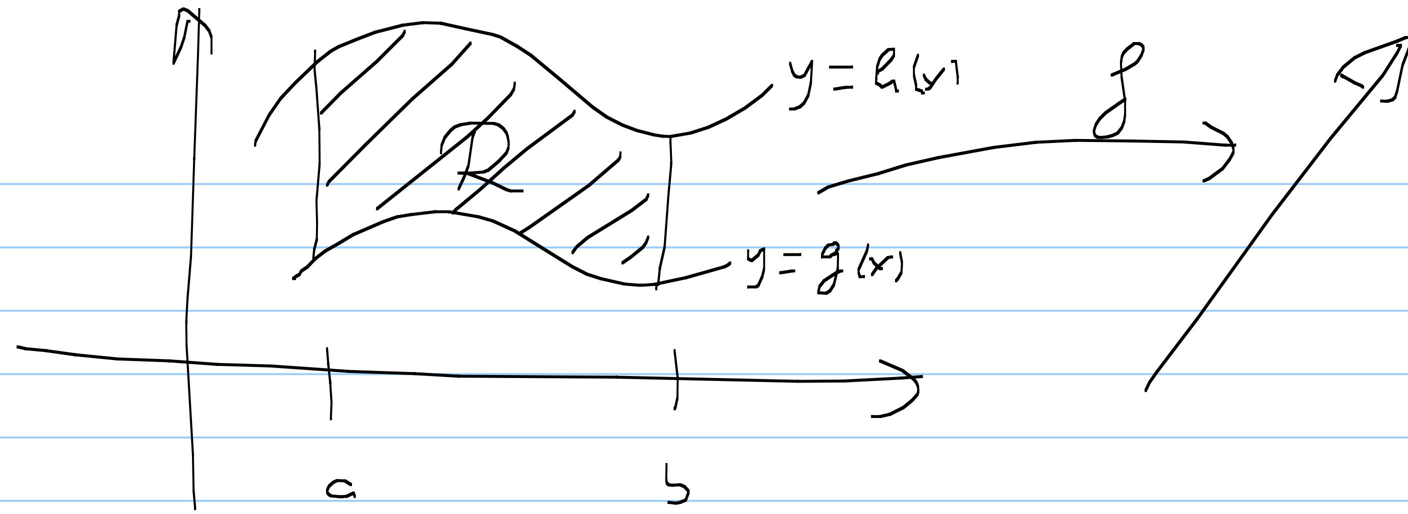
$$= \int_0^2 \left[x + 2x^2 y \Big|_{x=0}^{x=1} \right] dy$$

$$= \int_0^2 \left[(1 + 2y) - (0 + 0) \right] dy$$

$$= y + y^2 \Big|_0^2 = (2+4) - (0+0) = 6.$$

الحالة 2 : إذا كانت R من الشكل :

$$R = \left\{ (x, y) : \begin{array}{c} a \le x \le b \\ g(x) \le y \le h(x) \end{array} \right\}$$



فإن :

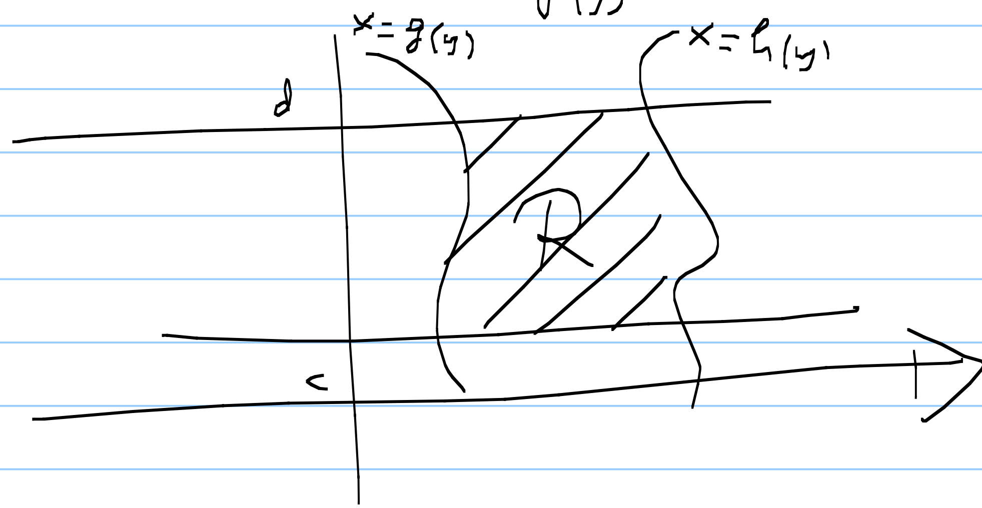
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

أمثلة : **(3 حالات)** إذا كانت R من الشكل

ثانياً:

$$R = \{(x,y) : g(y) \le x \le h(y),\ c \le y \le d\}$$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$



أمثلة:

1. احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_0^1 \int_0^x xy \, dy \, dx$$

$g(x) = 0$

$h(x) = x$

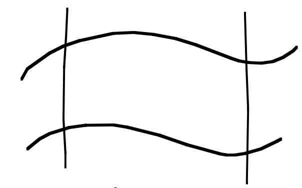
$$= \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=x} \right] dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2} \, dx = \frac{x^4}{8} \Big|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

2. احسب قيمة التكامل:

$$I = \iint_R xy \, dA$$

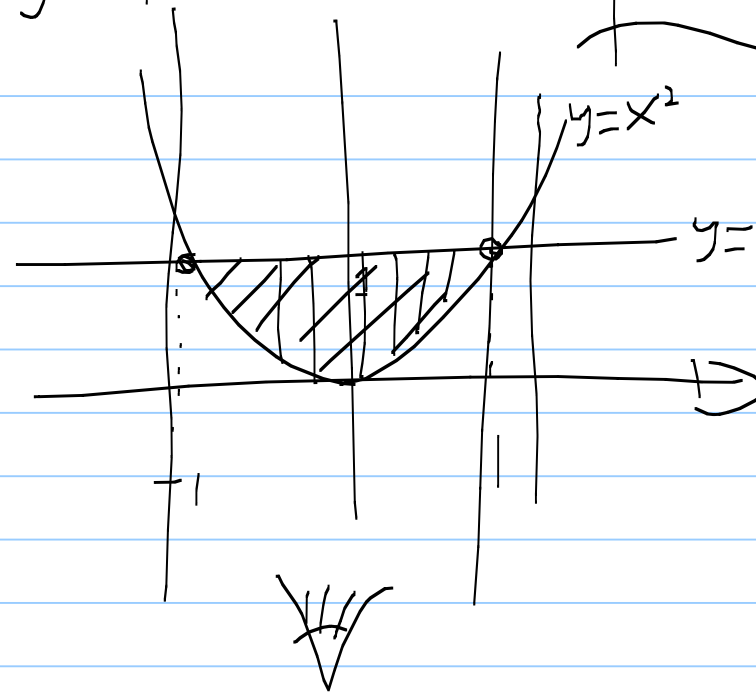
حيث R: المنطقة المحدودة بالمنحنيين:

$y = x^2$ و $y = 1$



$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$$

الحل :



$$x^2 = 1 \iff x = \pm 1$$

$$R : \begin{array}{l} -1 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 1 \end{array}$$

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{1} xy \, dy \right) dx = \int_{-1}^{1} x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=x^2}^{y=1}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[x - x^5\right]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6}\right|_{-1}^{1} = 0$$

Note Title 3/6/2022

حساب المساحات :

حجم الجسم المحدود من الأعلى بالمنحني f ومن الأسفل بالمنطقة R $= \iint_R f(x,y)\, dA$

حالة خاصة : f ثابتة وتساوي 1

$$f(x,y)=1 \quad \forall (x,y)\in R$$

في هذه الحالة :

الحجم هو : $1 \times$ (مساحة R)

لدينا :

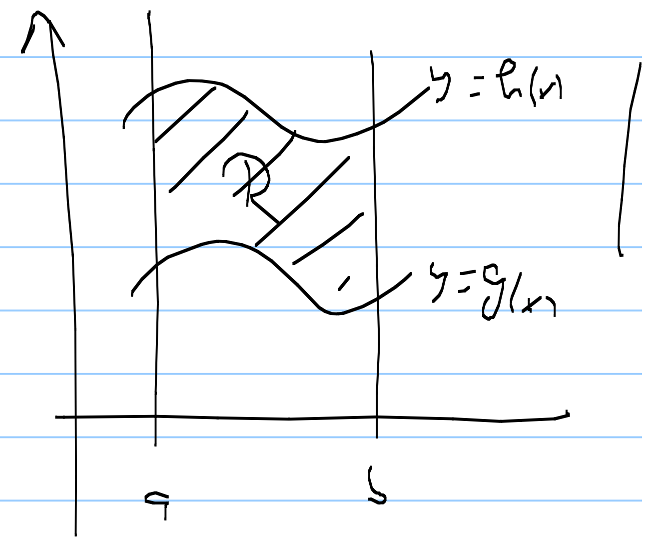
$$\boxed{A(R) = \iint_R dA}$$

مثال : إذا كانت R من الشكل :

$$R: \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq h(x) \end{array}$$

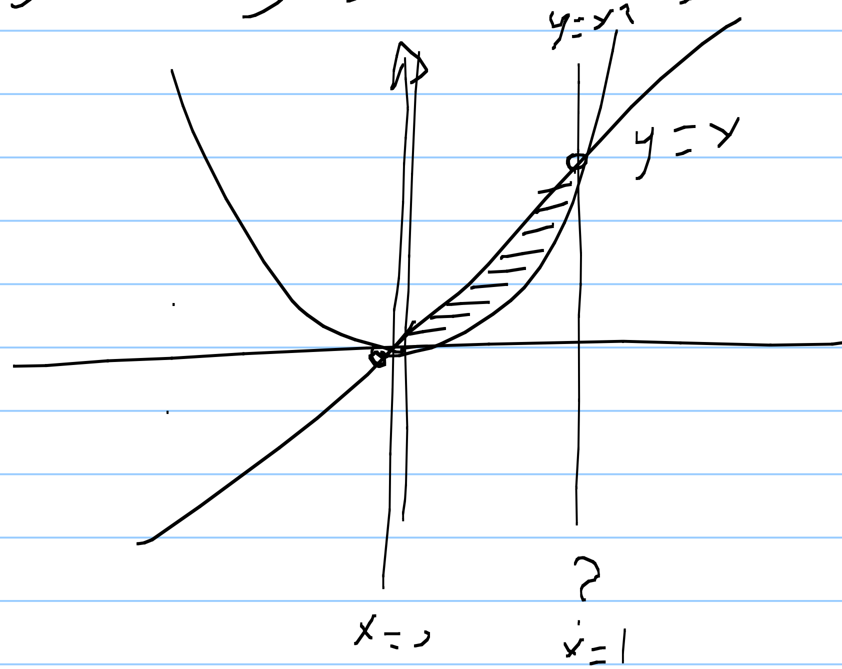
فإن :

$$A(R) = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} dy\,dx$$

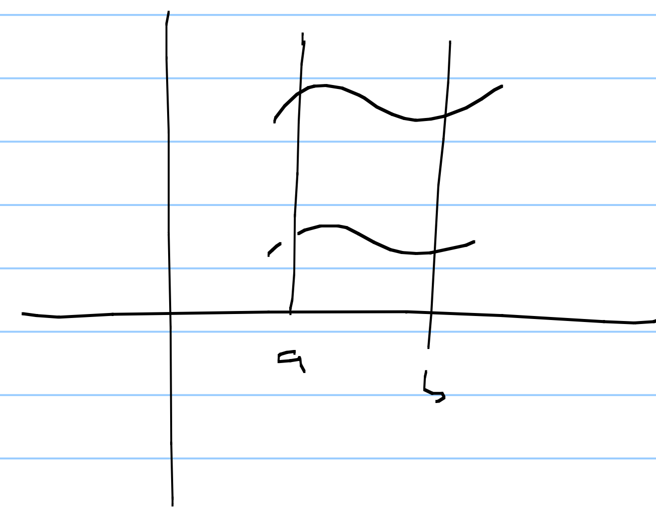


$$= \int_a^b y \Big|_{g(x)}^{h(x)} dx = \int_a^b \left(h(x) - g(x) \right) dx \quad (*)$$

تطبيقات : (I) احسب مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x$ و $y = x^2$.



الجواب :



نقاط التقاطع:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$$

$x^2 = x \iff x^2 - x = 0$

$\iff x(x-1) = 0$

$\iff x = 1$ أو $x = 0$

$0 \le x \le 1$

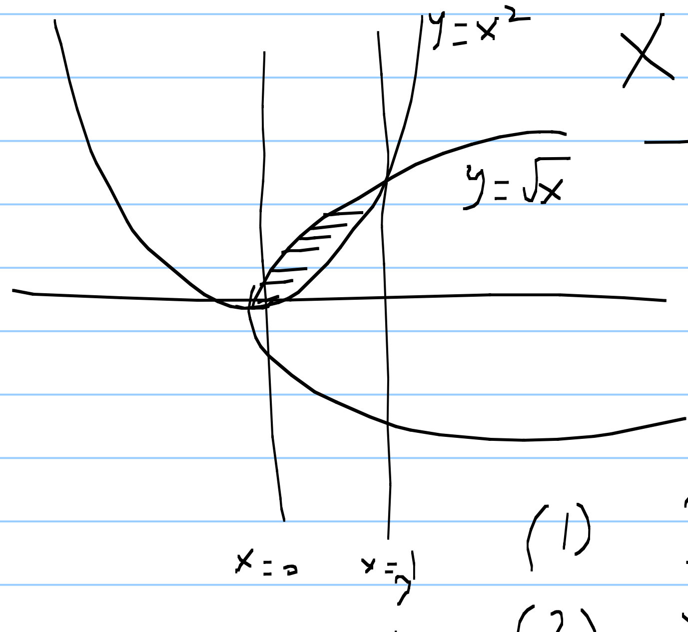
$x^2 \le y \le x$

$$A(R) = \int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

نستخدم $(*)$:

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

② احسب مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيين



$y=x^2$ و $\underline{x=y^2}$ → $y=\pm\sqrt{x}$

<u>نقاط التقاطع</u> :

(1) $y=x^2$

(2) $x=y^2$

نعوض (1) في (2) :

$$x=[x^2]^2$$

$$x = x^4 \iff x^4 - x = 0$$

$$\iff x(x^3 - 1) = 0 \iff x = 1 \text{ or } x = 0$$

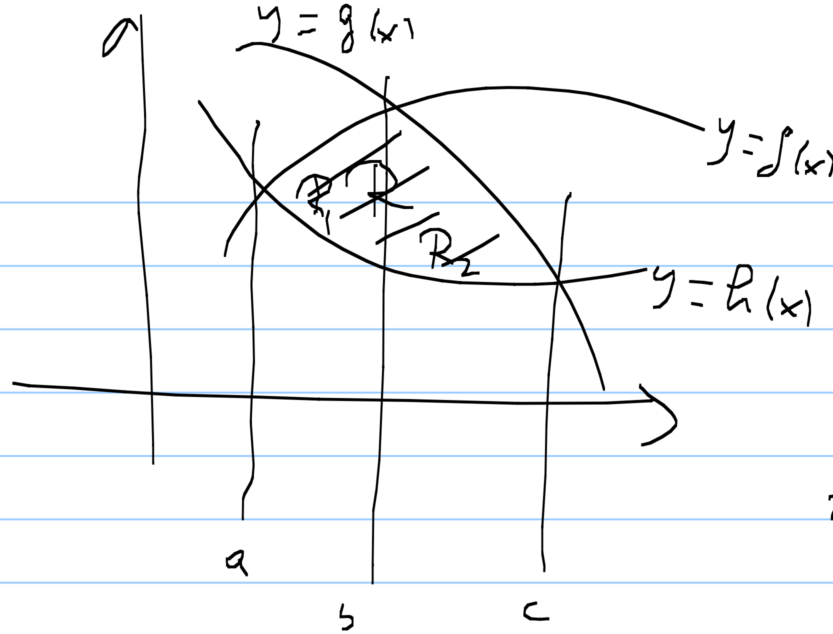
$$R: \quad 0 \le x \le 1$$

$$x^2 \le y \le \sqrt{x}$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3} x^{3/2}$$

$$A(R) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

ملاحظة :

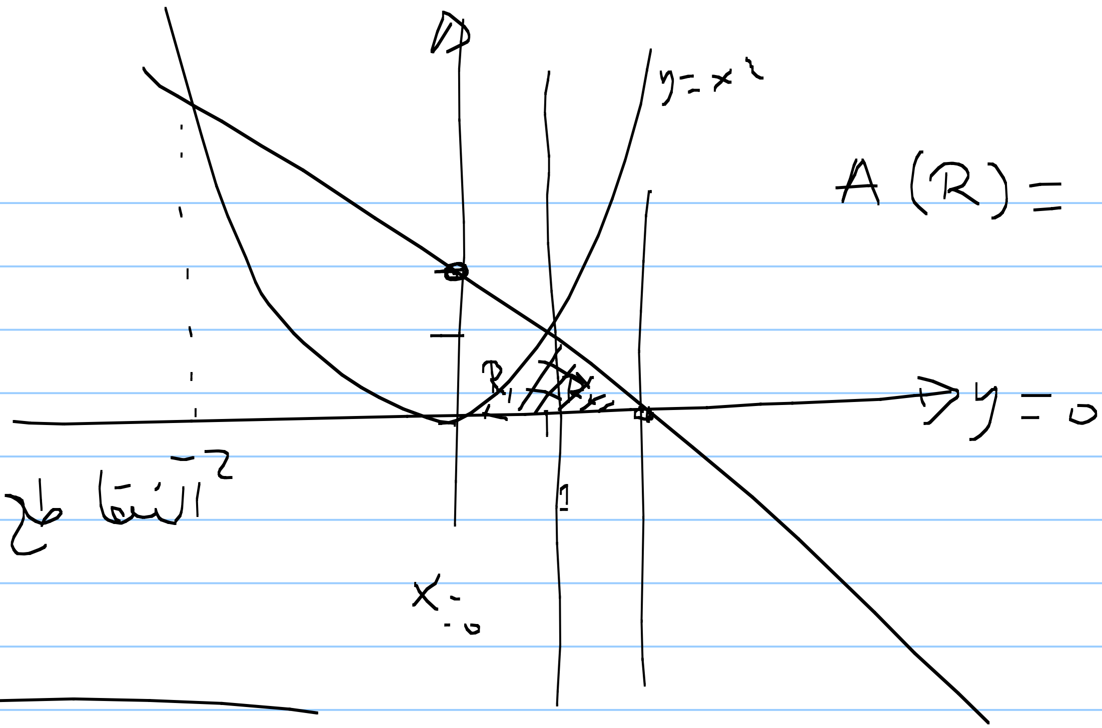


$$A(R) = A(R_1) + A(R_2)$$

$$A(R) = \int_a^b \big(f(x) - h(x)\big)\,dx + \int_b^c \big(g(x) - h(x)\big)\,dx$$

مثال : احسب مساحة المنطقة المحدودة

بالمنحنيات : $y = 0$, $y = x^2$, $x + y = 2$



$$A(R) = A(R_1) + A(R_2)$$

التقاطع : $y = x^2$

$x + y = 2$

$x = 1 \quad x = 2 \qquad x + y = 2 \rightarrow y = 2 - x$

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad (*)$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\underline{x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)}$$

$(*) \begin{cases} + \; -b & + \; -1 \\ \times \; c & \times \; -2 \end{cases}$

$\underline{x = 1, -2}$

جذور المعادلة $(*)$

2

$ax^2+bx+c=0$

$x^2+x-2=0$

$\boxed{\Delta = b^2-4ac}$

$\Delta = (1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9 > 0$

$x = \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1\pm 3}{2} = -2, 1$

$\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{7}x + 1$

$\frac{5}{7}$

$\frac{3}{2}$

$\Delta>0 \longrightarrow \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta=0 \longrightarrow \dfrac{-b}{2a}$

$\Delta<0 \longrightarrow$ X جواب ندارد

$ax^2+bx+c=$

R_1: $0 \leq x \leq 1$
$\quad 0 \leq y \leq x^2$

R_2: $1 \leq x \leq 2$
$\quad 0 \leq y \leq 2-x$

$$A(R_1) = \int_0^1 (x^2 - 0)\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1/3$$

$$A(R_2) = \int_1^2 (2-x)\,dx = 2x - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2$$

$$= \left(2.2 - \frac{2^2}{2}\right) - \left(2.1 - \frac{1^2}{2}\right)$$

$$= 2 - 3/2$$

$$= 1/2.$$

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 5/6.$$

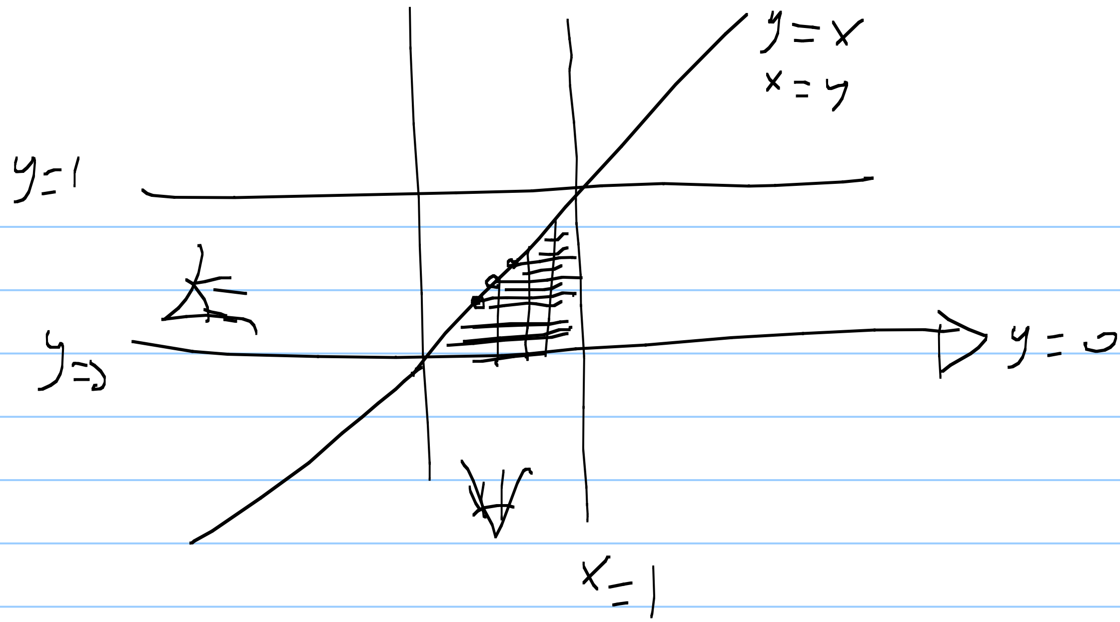
Note Title 3/8/2022

عكس ترتيب تكامل ثنائي

مثال : احسب قيمة التكامل :

$$I = \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy$$

$$R: \quad \begin{aligned} y \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{aligned} \qquad ①$$



②

$$R: \quad \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{array}$$

③

$$I = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} \, dy \, dx$$

④

$$= \int_0^1 e^{x^2} \cdot y \Big|_0^x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2} \underline{2x\,dx}$$

$u = x^2 \quad du = 2x\,dx$

$\int e^u\,du = e^u$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

(حل سابق) $I = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 y \sin x \, dy\, dx$. <u>تمرين 1</u>

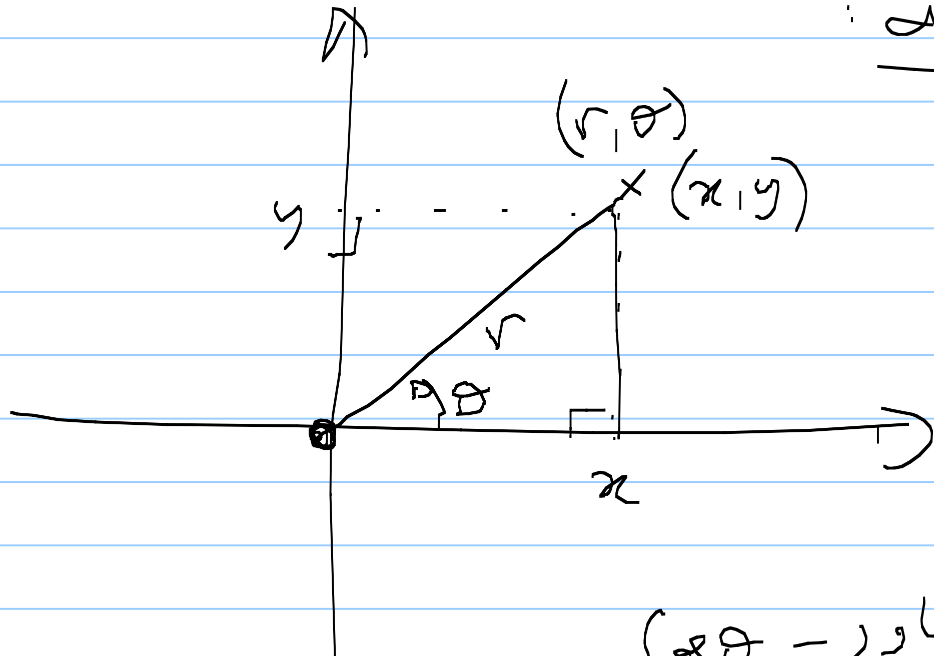
تمرين 2 :

$$I = \int_0^{\pi} \int_y^{\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx \, dy$$

Note Title 3/10/2022

التكامل الثنائي في الإحداثيات القطبية :

الإحداثيات القطبية :



$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{r} \Rightarrow \boxed{x = r\cos\theta}$$

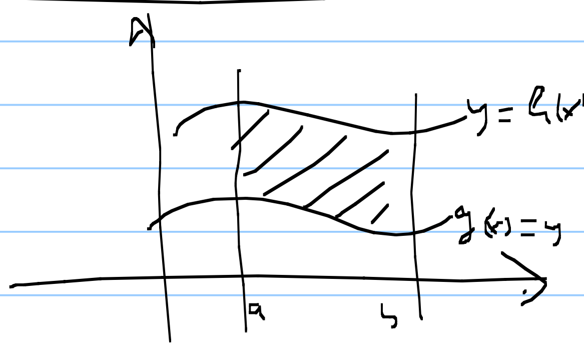
$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = r\sin\theta}$$

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2(\overbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}^{=1}) = r^2$$

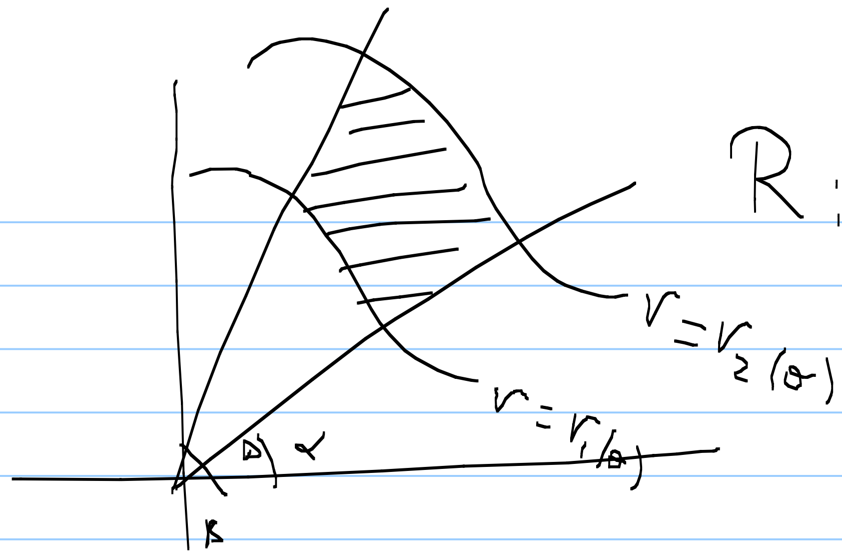
$$\boxed{\begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ \hline x^2 + y^2 = r^2 \end{array}}$$

الملخص :



(x, y)

$$R : \left(\begin{array}{c} a \le x \le b \\ g(x) \le y \le h(x) \end{array} \right)$$



$$R: \left(\begin{array}{c} \alpha \le \theta \le \beta \\ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta) \end{array}\right)$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\boxed{?}\,dr\,d\theta$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right. \qquad dx\,dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr\,d\theta$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$dx\,dy = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} dr\,d\theta$$

$$dx\,dy = (r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)\,dr\,d\theta$$

$$\boxed{dx\,dy = r\,dr\,d\theta}$$

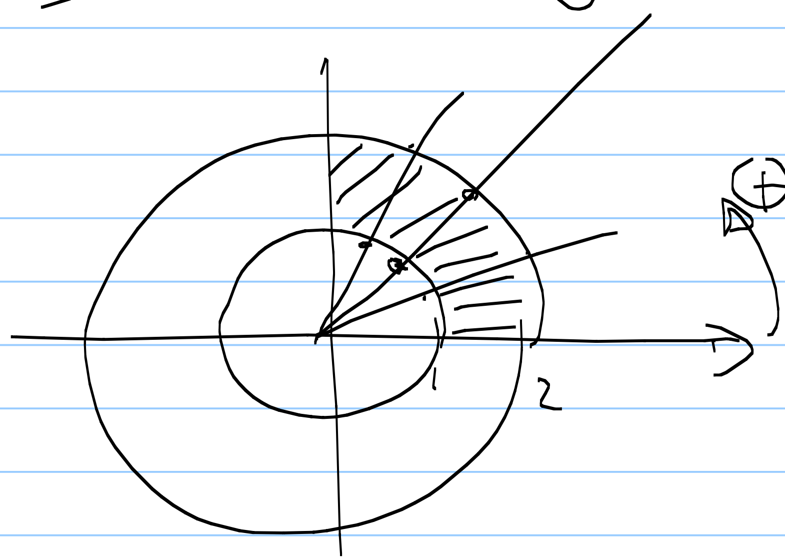
$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta}$$

أمثلة: [1] احسب التكامل:

$$I = \iint_R xy \, dA$$

حيث R المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحدودة بالدائرتين $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$

الجواب:



$$1 \le r \le 2$$

$$0 \le \theta \le \pi/2$$

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 r\cos\theta \cdot r\sin\theta \; \underline{\underline{r}}\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_1^2 \cos\theta \cdot \sin\theta \; r^3\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot \sin\theta \left.\frac{r^4}{4}\right|_1^2 d\theta$$

$$= \frac{15}{4}\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin\theta}_{u} \cdot \underbrace{\cos\theta\, d\theta}_{du}$$

$$\int u\, du = \frac{u^2}{2}$$

$$= \frac{15}{4} \frac{\sin^2\theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{15}{8}\left(\sin^2 \tfrac{\pi}{2} - \sin^2 0\right) = \frac{15}{8}$$

<u>مثال</u>: احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dy\, dx$$

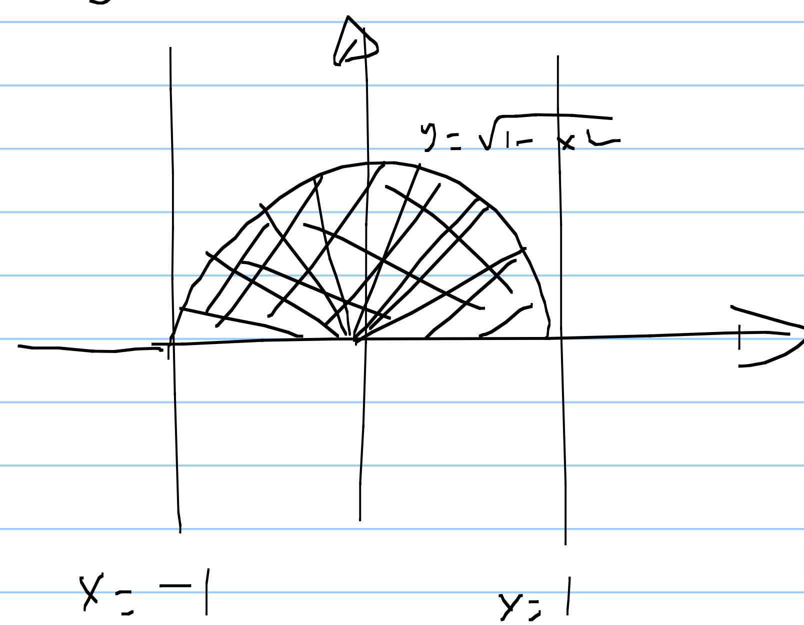
$R:\ -1 \leq x \leq 1$

$\quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$

$y = \sqrt{1-x^2}$

$y^2 = 1 - x^2$

$x^2 + y^2 = 1$



$$R: \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$
$$0 \leq r \leq 1$$

$$2^{3/2} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^1 \sqrt{\underbrace{1+r^2}_{u}}\ \underbrace{2r\,dr}_{du}\,d\theta$$

$$u = 1+r^2$$
$$du = 2r\,dr$$
$$\int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}\,du$$
$$= \frac{2}{3}u^{3/2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^{\pi} \frac{\cancel{2}}{3}(1+r^2)^{3/2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left[2^{3/2}-1\right]d\theta = \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)\int_0^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\,\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{(2\sqrt{2}-1)\pi}{3}$$

Note Title 3/20/2022

التكامل الثلاثي:

تعريف: لتكن f دالة في (x,y,z) معرفة على متوازي مستطيلات Q. نجزئ Q إلى متوازيات مستطيلات جزئية Q_i

حيث $i=1,\dots,n$.

في كل Q_i نختار نقطة (x_i,y_i,z_i).

وليكن V_i حجم Q_i و d_i قطر Q_i (المسافة بين أبعد نقطتين في Q)

وليكن المجموع (مجموع ريمان):

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(x_i,y_i,z_i)}_{1} \cdot \underbrace{V_i}_{3}$$

$+$

تعريف: إذا كانت النهاية التالية موجودة: نقول أن
f قابلة للتكامل على Q:

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \max \delta_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) V_i$$

ملاحظة 1. النهاية موجودة تعني أنها موجودة ومساوية لكل التجزئات الممكنة وكل الاختيارات الممكنة للنقاط (x_i, y_i, z_i)

ملاحظة 2: إذا كانت Q مجموعة مغلقة ومحدودة في الفضاء وكانت f دالة متصلة على Q فإن f قابلة للتكامل على Q.

ملاحظة 3 : إذا كانت f قابلة للتكامل على Q فإننا نرمز لقيمة التكامل بـ :

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dV$$

حيث dV : عنصر الحجم

مبرهنة : لتكن f و g دوال في (x,y,z) قابلة للتكامل على Q فإن :

$$(1) \quad \iiint_Q (f \pm g)(x,y,z)\,dV = \iiint_Q f(x,y,z)\,dV \pm \iiint_Q g(x,y,z)\,dV$$

$$(2) \quad \iiint_Q c\,f(x,y,z)\,dV = c\iiint_Q f(x,y,z)\,dV$$

حيث c عدد حقيقي.

(3) إذا كانت $Q = Q_1 \cup Q_2$ حيث $Q_1 \cap Q_2$ محتوى في حد كل من Q_1 و Q_2 فإن:

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dV = \iiint_{Q_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint_{Q_2} f(x,y,z)\,dV$$

طرق حساب التكامل الثلاثي:

I إذا كانت Q متوازي مستطيلات:

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} a_1 \leq x \leq b_1 \\ a_2 \leq y \leq b_2 \\ a_3 \leq z \leq b_3 \end{array} \right\}$$

فإن :

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

$$= \ldots$$

<u>مثال</u> : احسب قيمة التكامل :

$$I = \iiint_Q 64xyz\, dV$$

حيث Q : المكعب $[0,1]^3$.

$$I = 64\int_0^1\int_0^1\int_0^1 xyz\,dx\,dy\,dz$$

$$= 64\int_0^1\int_0^1 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 yz\,dy\,dz$$

$$= 32\int_0^1\int_0^1 yz\,dy\,dz$$

$$= 32\int_0^1 \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 z\,dz$$

$$= 16\int_0^1 z\,dz$$

$$= 16 \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= 8 .$$

$\boxed{2}$ إذا كانت:

$$Q = \left\{ (x,y,z) : \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \\ h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y) \end{array} \right\}$$

فإن:

$$\iiint_Q f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

مثال: احسب قيمة التكامل: $I = \int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} (y+z)\, dz\, dy\, dx$

$$Q : \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq z \leq xy \end{array} \right\}$$

$$I = \int_0^1 \int_0^x \left(yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{z=xy} dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x \left(xy^2 + \frac{x^2 y^2}{2} \right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 x \frac{y^3}{3} + \frac{x^2 y^3}{6} \Big|_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\left(\frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{6} \right) - (0 + 0) \right] dx$$

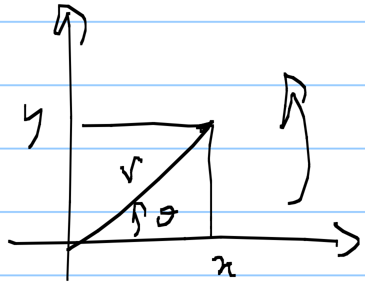
$$= \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{36} \Big|_0^1$$

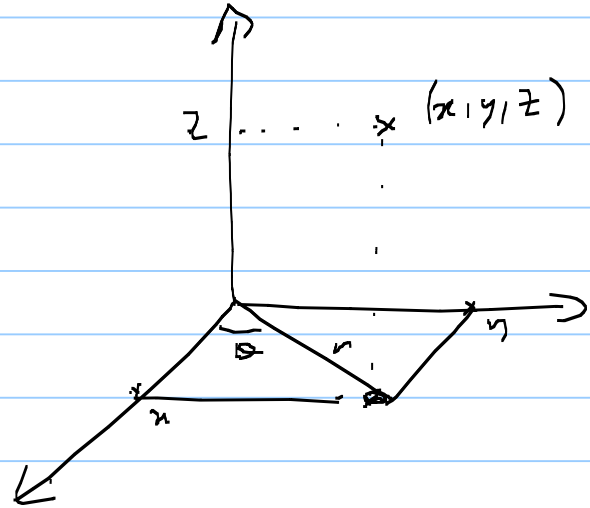
$$= 1/15 + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{36+15}{15 \times 36} = \frac{51}{15 \times 36}$$

Note Title 3/22/2022

التكامل الثلاثي في الاحداثيات الاسطوانية :





الاحداثيات (r,θ,z) : الاحداثيات الاسطوانية

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ x^2+y^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dV = \iiint_Q f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,\underline{\underline{r}}\,dz\,dr\,d\theta$$

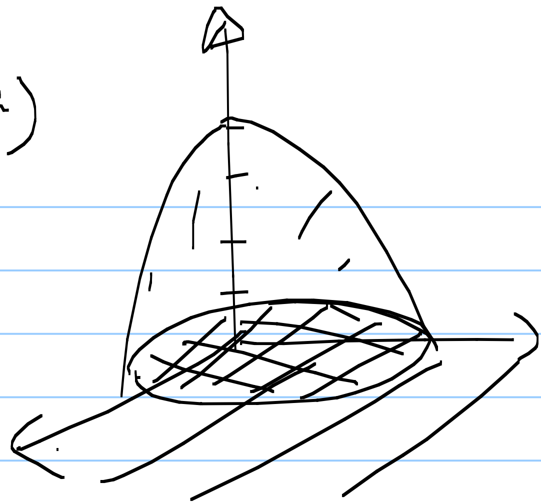
حجم الجسم Q هو:

$$V(Q) = \iiint_Q 1 \,.\, dV$$

<u>مثال</u>: احسب حجم الجسم المحدود من الأعلى بالسطح المكافئ $z = 4 - x^2 - y^2$ ومن الأسفل بالمستوى $z = 0$.

$Z = 4 - (x^2 + y^2)$

$= 4 - r^2$



الجواب:

$Q: \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le Z \le 4 - r^2 \end{cases}$

التقاطع $\begin{cases} Z = 0 \\ Z = 4 - r^2 \end{cases}$

$4 = r^2 \Rightarrow \underline{r = 2}$

$V = \iiint_Q 1 \cdot dV$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} 1 \cdot \underline{r \, dz \, dr} \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r \cdot Z \Big|_0^{4-r^2} dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r(4-r^2)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r - r^3)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2r^2 - \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (8-4)\, d\theta = 4 \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 4 \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} = 8\pi$$

$R: 0 \leq r \leq 2$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

طريقة 2.

$z = 4 - r^2$

$$V = \iint_R (4 - r^2)\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)\, \underline{\underline{r}}\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r(4 - r^2)\, dr\, d\theta$$

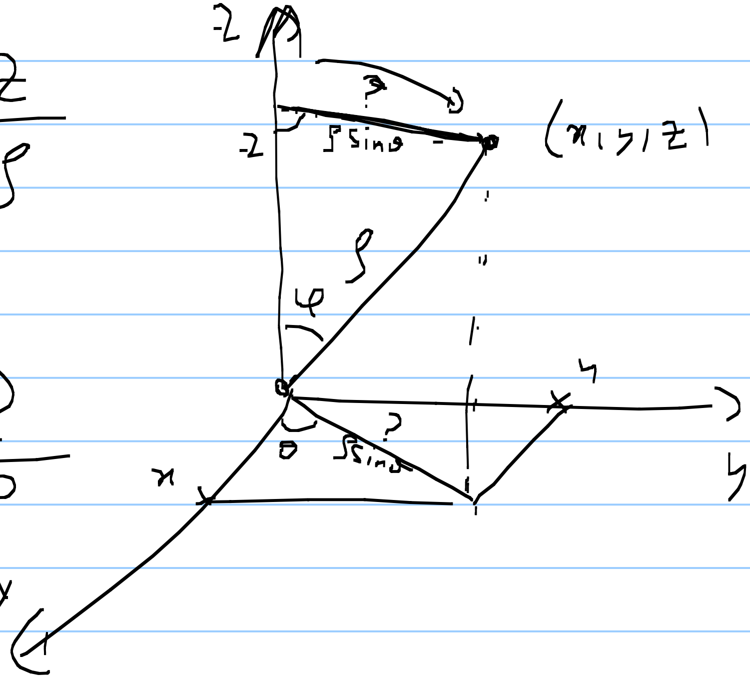
الاحداثيات الكروية:

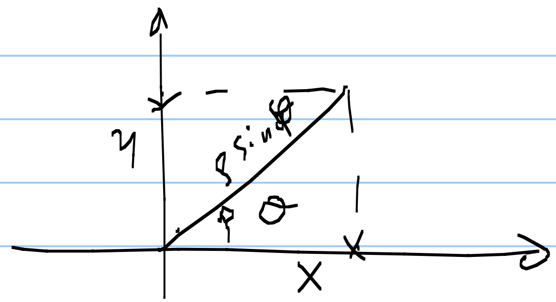
$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{z}{\rho}$$

$$\boxed{z = \rho \cos\varphi}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{?}{\rho}$$

$$? = \rho \sin\theta$$





$$\cos\theta = \frac{X}{\rho \sin\varphi}$$

$$\boxed{X = \rho \sin\varphi \cdot \cos\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{\rho\sin\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \rho\sin\varphi \cdot \sin\theta}$$

الإحداثيات (ρ, φ, θ) : الإحداثيات الكروية.

$\rho \geq 0$

$\theta \in \mathbb{R}$

$\varphi \in [0, \pi]$

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi \cdot \cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi \cdot \sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \underline{\rho^2\sin^2\varphi}\cos^2\theta + \underline{\rho^2\sin^2\varphi} \cdot \sin^2\theta + \rho^2\cos^2\varphi$$

$$= \rho^2 \sin^2\varphi \, (\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1}) + \rho^2 \cos^2\varphi$$

$$= \rho^2 \sin^2\varphi + \rho^2 \cos^2\varphi$$

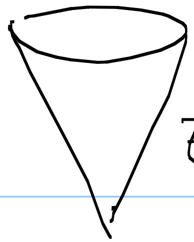
$$= \rho^2 (\underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{=1})$$

$$= \rho^2$$

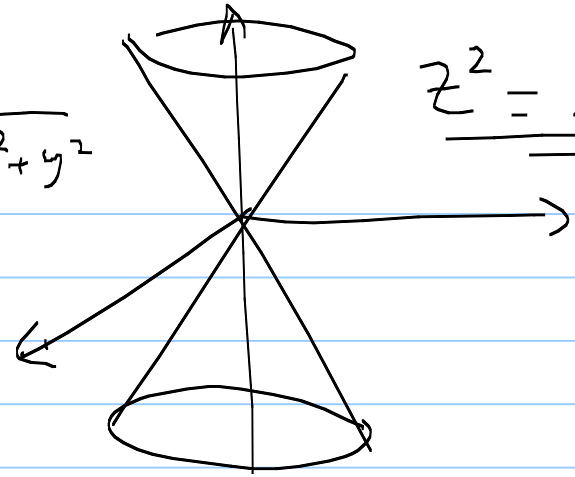
$$\iiint_Q f(x,y,z)\, dV = \iiint_Q f(\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \cdot \sin\theta, \rho \cos\varphi)\, \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

أمثلة: $\boxed{1}$ احسب حجم الجسم الواقع داخل كل من

الكرة $x^2+y^2+z^2=1$ والمخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$



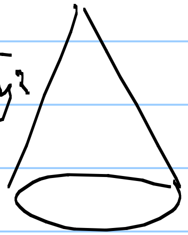
$z=\sqrt{x^2+y^2}$



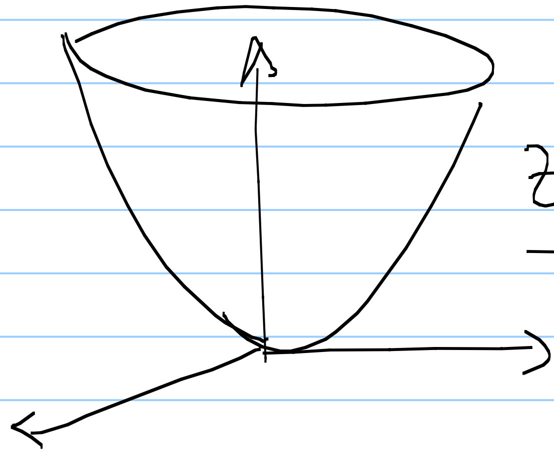
$z^2=x^2+y^2$

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

$z=-\sqrt{x^2+y^2}$



$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$



$z=x^2+y^2$

$$z=\sqrt{a(x^2+y^2)} \qquad a>0$$

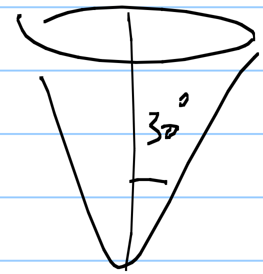
$$\cancel{\rho}\cos\varphi=\sqrt{a(\rho^2\sin^2\varphi\cdot\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\theta)}$$

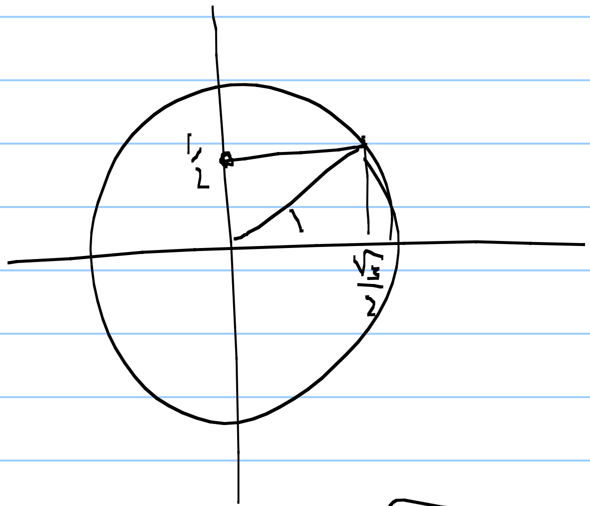
$$=\sqrt{a\rho^2\sin^2\varphi}$$

$$= \sqrt{a}\,\cancel{\rho}\,\sin\varphi$$

$$\boxed{\sqrt{a} = \cot\varphi} \quad \text{gl} \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{a}} = \tan\varphi} \ \checkmark$$

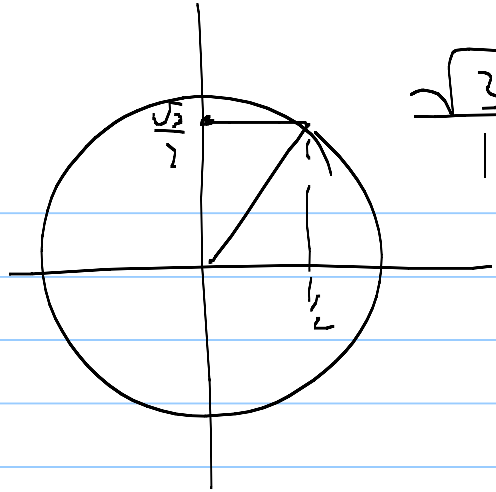
$$z = \sqrt{3(x^2+y^2)} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\varphi$$





$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \tan\varphi \Longrightarrow \varphi = \pi/6$$

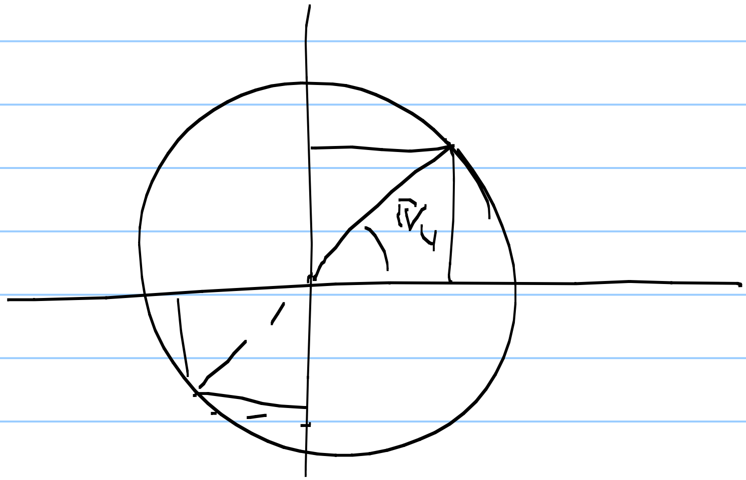
$$z = \sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)} \qquad \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \tan\varphi$$



$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \tan\varphi \qquad \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \tan\varphi \Rightarrow \varphi = \pi/3$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} = \tan\varphi \Rightarrow \boxed{\varphi = \pi/4}$$



$$z = \sqrt{7(x^2+y^2)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}} = \tan\varphi$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \checkmark$$

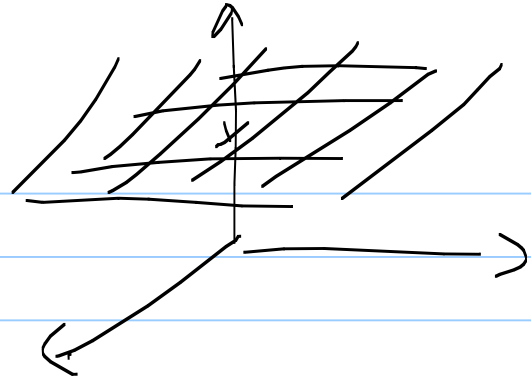
$$\boxed{\rho = 1} \qquad \boxed{x^2+y^2+z^2=1}$$

كرة مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها 1

$$z = 1$$

$$\rho \cos\varphi = 1$$

$$\rho = \frac{1}{\cos\varphi} = \sec\varphi$$



$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z$$

$$\rho^{\cancel{2}} = 2\cancel{\rho}\cos\varphi$$

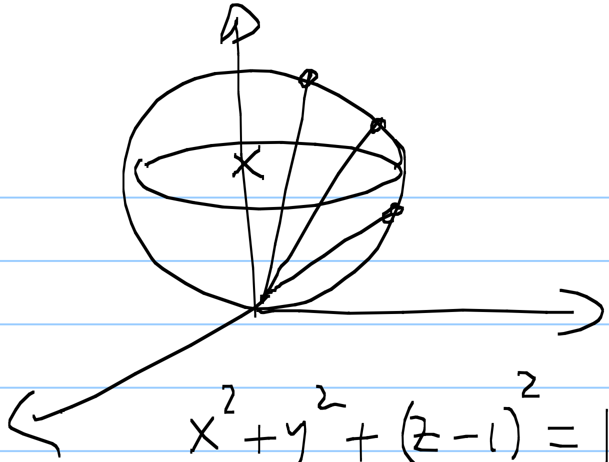
$$\rho = 2\cos\varphi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$$

$$x^2 + y^2 + \underbrace{z^2 - 2z + 1} = 0 + 1$$

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

كرة مركزها $(0,0,1)$ ونصف قطرها 1

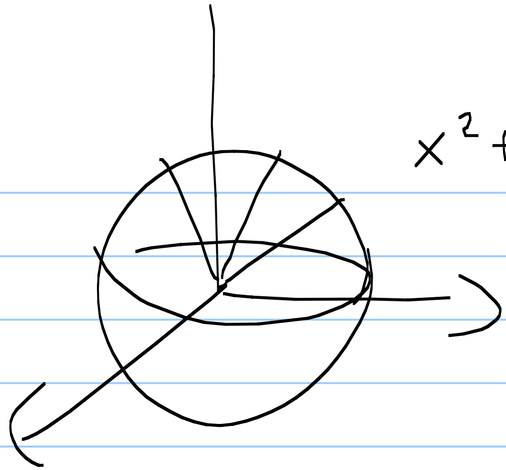


$$x^2+y^2+(z-1)^2=1$$

أو $x^2+y^2+z^2=2z$

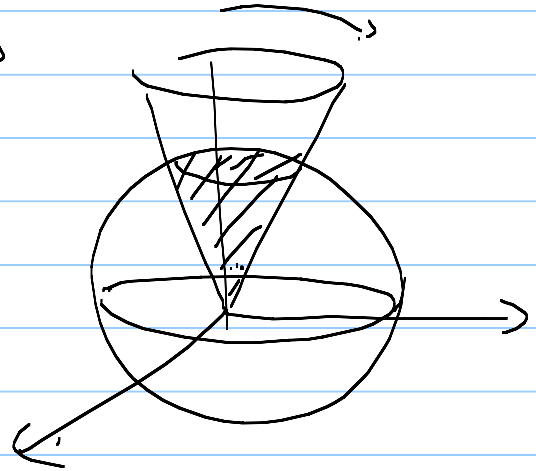
معادلتها في الإحداثيات الكروية

هي: $\rho = 2\cos\phi$

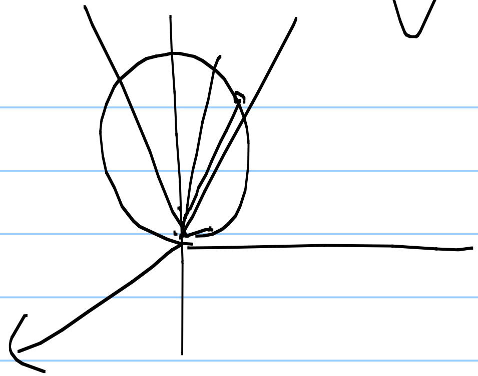


$$x^2+y^2+z^2=1$$

$$\rho=1$$



المثال:



$$V = \iiint_Q 1 \cdot dV \qquad Q: \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 \cdot \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} -\cos\varphi \Big|_0^{\pi/4} d\theta$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\cos\pi/4 - \cos 0\right)d\theta$$

$\cos\pi/4 = \sin\pi/4$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 0 = 1$

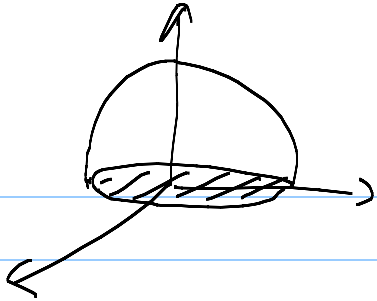
$$= -1/3\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)d\theta$$

$$= \frac{\left(1 - 1/\sqrt{2}\right)}{3}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{\left(1 - 1/\sqrt{2}\right)}{3}\,\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

مثال 2. احسب قيمة التكامل $I = \iiint_Q \sqrt{1 + (x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV$

حيث Q الجسم المحدود من الأعلى بالكرة $x^2+y^2+z^2=1$ ومن الأسفل بالمستوى $z=0$.



الجواب :

$0 \le \rho \le 1$

$0 \le \varphi \le \pi/2$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \sqrt{1+\rho^3}\,\rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{2}{3}\left(1+\rho^3\right)^{3/2}\Big|_0^1 \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)\int_0^{2\pi} -\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= 2/9\left(2\sqrt{2}-1\right).(1-0).2\pi$$

$$= \frac{4\pi}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

بالتعويض :

$u = 1+\rho^3$

$du = 3\rho^2 d\rho$

$\int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3} u^{3/2}$

Note Title 3/29/2022

المتسلسلات العددية:

المتتاليات (المتتابعات) العددية:

تعريف: متتالية عددية هي: $f : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$n \longmapsto f(n) = x_n \,,\ a_n \,, \ldots$$

ونكتب: $\{a_n\}_{n\geq 0}$ أو $(a_n)_{n\geq 0}$ ، أو $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ...

أمثلة: $\boxed{1}$ $\{1\}_{n\geq 0}$

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$\vdots$$
$$a_n = 1$$
$$\vdots$$

$$\{1\}_{n\geq 0} = \{1, 1, 1, 1, \ldots\}$$

$\boxed{2}$ $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\right\}$$

$\boxed{3}$ $\left\{e^{n^2}\right\}_{n\geq 0}$

$$\left\{e^{n^2}\right\}_{n\geq 0} = \left\{1, e, e^4, e^9, \ldots\right\}$$

$\boxed{4}$ $\left\{(-1)^n\right\}_{n\geq 0}$

$$\left\{(-1)^n\right\}_{n\geq 0} = \left\{1, -1, 1, -1, 1, \ldots\right\}$$

<u>تعريف</u>: نقول أن المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة ونهايتها العدد L

إذا: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$

أمثلة: $\boxed{1}$ $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$: متتالية متقاربة ونهايتها 0 .

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

$\boxed{2}$ $\left\{\frac{2n+1}{3n+1}\right\}_{n\geq 0}$

$a_0=1$

$a_1=3/4$

$a_2=5/7$

$\vdots$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{3x+1}\overset{\text{لوبيتال}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3}=2/3.$$

إذاً: $\left\{\frac{2n+1}{3n+1}\right\}$ متقاربة ونهايتها $\frac{2}{3}$.

$\boxed{3}$ $\left\{\frac{n^2}{3n+1}\right\}_{n\geq 0}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3x+1}\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{\text{لوبيتال}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{3} = +\infty$$

إذاً $\left\{\frac{n^2}{3n+1}\right\}$ ليست متقاربة (نقول أنها متباعدة).

$\boxed{4}$ $\{(-1)^n\}_{n \geq 0}$ متباعدة لأن:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ زوجي} \\ -1 & n \text{ فردي} \end{cases}$$

<u>أي أن:</u> $\lim_{n \to +\infty} (-1)^n$ غير موجودة.

<u>المتسلسلات العددية:</u>

<u>تعريف:</u> لتكن $\{a_n\}_{n \geq 0}$ متتالية عددية. المجموع:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

يسمى المتسلسلة العددية ذات الحد العام a_n.

أمثلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2/\ln n = \frac{4}{\ln 2} + \frac{9}{\ln 3} + \frac{16}{\ln 4} + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

تعريف : لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة عددية ونعرف المتتالية

المرافقة للمتسلسلة $\{S_n\}_{n\geq 1}$:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\vdots$$

تعريف: نقول أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ومجموعها العدد L إذا كانت $\{S_n\}_{n\geq 1}$ متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} S_n = L$

$$\left(L = \lim_{n\to+\infty} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)$$

ونقول أن $\sum a_n$ متباعدة إذا كانت $\{S_n\}$ متباعدة.

مثال: (المتسلسلات الهندسية)

وهي متسلسلة من الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n$$

(r: أساس المتسلسلة الهندسية)

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n + \dots$$

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ متسلسلة هندسية متقاربة لأن $r = \frac{1}{2}$ $(a=1)$

$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{2^{n-1}}$

$$\frac{3(-1)^n}{2^{n-1}} = \frac{6(-1)^n}{2^n}$$

$$= 6 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

هندسية متقاربة لأن $r = -1/2$ $\quad \underline{a = 6}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ليست هندسية

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ ولتكن $\{S_n\}$ المتتالية المرافقة.

$$S_0 = a$$

$$S_1 = a + ar$$

$$S_2 = a + ar + ar^2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^n$$

$$\vdots$$

$$S_n = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{\cdots} + \cancel{ar^{n-1}} + \cancel{ar^n}$$

$$r\,S_n = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{\cdots} + \cancel{ar^n} + ar^{n+1}$$

$$S_n - rS_n = a - ar^{n+1}$$

$$\boxed{(1-r)S_n = a(1-r^{n+1})} \quad (1)$$

$$\sum a1^n = a+a+a+\cdots = \pm\infty$$ إذا $r=1$

متباعدة

$$(1) \Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$ إذا $r \neq 1$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} \infty \text{ أو غير موجود} & |r|>1 \\ \dfrac{a}{1-r} & |r|<1 \end{cases}$$

إذا $r=-1$ متباعدة $\sum a(-1)^n$:
(اختبار الحد العام)

مبرهنة: المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$
متقاربة إذا وفقط إذا $-1<r<1$

وفي حالة التقارب: $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$

أمثلة: حدد فيما إذا كانت المتسلسلة الهندسية
متقاربة أم متباعدة واحسب المجموع في حالة التقارب:

$\boxed{1}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (هندسية $r=\frac{1}{2}$) متقاربة

$r = \frac{1}{2} \quad a = 1$

ومجموعها :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 .$$

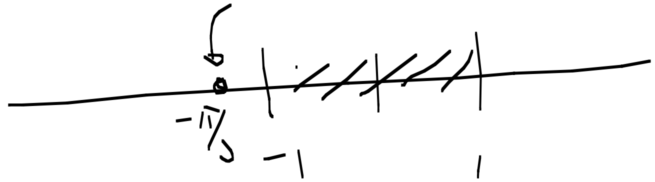
$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots\cdots = 2 \right)$$ أي أن :

$\boxed{2}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ هندسية لأنها $r = \pi/4$ $(a=1)$

متقاربة ومجموعها :

$$\sum \left(\frac{\pi}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\pi/4} = \frac{4}{4-\pi}$$

$\boxed{3}$ $\sum \left(\frac{-\pi}{3}\right)^n$ هندسية لأنها $r = -\pi/3$

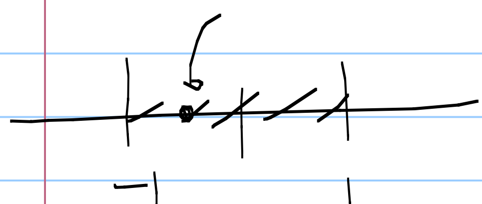


متباعدة

$\boxed{4}$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ هندسية لأنها $r=-\frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2}$

$$\frac{(-1)^n}{2^n \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$



متقاربة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{3/2} = \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{3} - \left[\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{12}$$ المجموع :

خواص المتسلسلات العددية + اختبار الحد العام

مبرهنة: إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ متسلسلتين عدديتين متقاربتين فإن:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \underline{c \in \mathbb{R}}$$

اختبار الحد العام: إذا كانت $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$ فإن $\sum a_n$ متباعدة.

أو: $\left(\text{إذا كانت } \sum a_n \text{ متقاربة فإن } \lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \right)$

أمثلة: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1+\cdots\cdots$

وبما أن النهاية $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n$ غير موجودة

فإن $\sum (-1)^n$ متباعدة (باستخدام اختبار الحد العام)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

لكن $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة (البرهان لاحقاً.)

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4n+7}$ متباعدة لأن:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{4n+7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{4x+7}$$

لوبيتال
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{4} = 1/2 \neq 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{3n+1}$$ متباعدة لأن: $\boxed{4}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{3n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}{n\left(3+1/n\right)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\cancel{n}\left(3+\frac{1}{n}\right)} = 1/3 \neq 0$$

$\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^2} \to 0$

$$\sum \frac{\sqrt{n^2+n+1}+\left(5n+7\right)}{3n+1} \quad \frac{6}{3}$$

$$\frac{n\sqrt{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+n\left(5+\frac{7}{n}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\frac{\cancel{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+5+\frac{7}{n}\right]}{\cancel{n}\left(3+\frac{1}{n}\right)}$$

Note Title 4/5/2022

المتسلسلات ذوات الحدود الموجبة:

تعريف: المتسلسلة $\sum a_n$ ذات حدود موجبة إذا:

$$\forall n: \quad a_n \geq 0$$

اختبار المقارنة: لتكن $\sum a_n$ و $\sum b_n$ ذواتا حدود موجبة

بحيث: $\quad a_n \leq b_n \quad \forall n$

أ. إذا $\sum b_n$ متقاربة فإن $\sum a_n$ متقاربة.

ب. إذا $\sum a_n$ متباعدة فإن $\sum b_n$ متباعدة.

مثال: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7+2^n}$

عندنا : $2^n + 7 \geq 2^n$

ومنه : $\frac{1}{7+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$

وبما أن $\sum \frac{1}{2^n}$ متقاربة (هندسية أساسها $\frac{1}{2}$)

فإن $\sum \frac{1}{7+2^n}$ متقاربة (باستخدام اختبار المقارنة)

<u>اختبار التكامل</u>: لتكن $\sum_n a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة

حيث $a_n = f(n)$ و f دالة موجبة ومتصلة ومتناقصة

على فترة من الشكل $[k, +\infty)$ ، إذاً :

$\sum a_n$ متقاربة إذا وفقط إذا : $\int_{k}^{+\infty} f(x)\,dx$ متقارب

<u>مثال:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots\cdots$$

نلاحظ أن الدالة $f : [1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة :

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

* موجبة على $[1,+\infty)$.

* متصلة على $[1,+\infty)$.

* متناقصة على $[1,+\infty)$: $\left(f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0\right)$

التكامل المعتل : $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$

$$= \lim_{N \to +\infty} \int_1^N \frac{dx}{x} = \lim_{N \to +\infty} \ln x \Big|_1^N$$

$$= \lim_{N \to +\infty} (\ln N - \ln 1)$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \ln N = +\infty$$

إذاً: التكامل المعتل متباعد.

ومنه نستنتج أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة (باستخدام اختبار التكامل)

تمرين: اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n^2}$

P-series (تعميم المتسلسلة التوافقية $\sum \frac{1}{n}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$ حيث P عدد حقيقي.

ملاحظة: إذا $P<0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to+\infty} n^{-p} = +\infty$

أي أن $\sum \frac{1}{n^p}$ متباعدة (اختبار الحد العام)

مثال: $\sum n^4 = \sum \frac{1}{n^{-4}}$ متباعدة لأن $P=-4<0$

الآن: نفرض أن $P>0$.

لتكن $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x^p}$$

* f موجبة على $[1, +\infty[$.

* f متصلة " .

* f متناقصة " .

$$\left(f'(x) = \left(\frac{1}{x^p}\right)' = -\frac{p x^{p-1}}{x^{2p}} < 0 \right)$$

إذاً : $\sum \frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ تحقق شروط اختبار التكامل .

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{N \to +\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^p} = \lim_{N \to +\infty} \int_1^N x^{-p}\,dx$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^N$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \left[\frac{N^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right]$$

$$= \begin{cases} \infty \quad \text{متباعدة} & -p+1>0 \\ \text{متباعدة} & -p+1=0 \\ = \frac{1}{-p+1} \quad \text{متقاربة} & -p+1<0 \end{cases}$$

<u>نتيجة:</u> المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^p}$ متقاربة إذا وفقط إذا $p>1$.

<u>مثال:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة $(p = 1/2 < 1)$

$$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$$ متقاربة $(P = 3/2 > 1)$

$$\sum \frac{1}{n^{2/3}}$$ متباعدة $(P = 2/3 < 1)$

$$\sum \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$ متقاربة $(P = 2 > 1)$

<u>اختبار مقارنة النهاية:</u>

لتكن $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متسلسلتين ذواتا حدود موجبة

ولنفرض أن $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$.

إذا : $\sum a_n$ متقاربة $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ متقاربة .

مثال : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+3n+1}}$

المسودة :

إذا $n \to +\infty$ فإن :

$$\begin{cases} n^2+3n+1 \sim n^2 \\ \sqrt{n^2+3n+1} \sim \sqrt{n^2} \\ n\sqrt{n^2+3n+1} \sim n\sqrt{n^2} = n^2 \\ \dfrac{1}{n\sqrt{n^2+3n+1}} \sim \dfrac{1}{n^2} \end{cases}$$

نقارن بالمتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n\sqrt{n^2+3n+1}}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n\sqrt{n^2+3n+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n\sqrt{n^2\left[1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right]}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}} = 1 \neq 0$$

وبما أن $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة $(p=2>1)$ فإن $\sum \frac{1}{n\sqrt{n^2+3n+1}}$

كذلك متقاربة (اختبار مقارنة النهايات).

اختبار النسبة: لتكن $\sum a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة. ولنضع:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

أ. إذا $0 \leq L < 1$ فإن $\sum a_n$ متقاربة.

ب. إذا $L > 1$ فإن $\sum a_n$ متباعدة.

جـ. إذا $L = 1$ يفشل الاختبار.

أمثلة: [1] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ $(0! = 1)$

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$(n+1)! = (n+1).\underbrace{n.(n-1)(n-2)\ldots 4.3.2.1}$$

$$\boxed{(n+1)! = (n+1)n!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}.n!}{2^n.(n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{2^n}.2.\cancel{n!}}{\cancel{2^n}(n+1)\cancel{n!}} = 0$$

وبالتالي $\sum \frac{2^n}{n!}$ متقاربة.

$$\boxed{2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+2}}{\frac{2^n}{n+1}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)}{2^n (n+2)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{2^n} \cdot 2 (n+1)}{\cancel{2^n} (n+2)}$$

$$= \lim_{\cancel{x} \to +\infty} \frac{2(x+1)}{x+2} \underset{\text{لوبيتال}}{=} 2 > 1$$

$\Leftarrow \sum \frac{2^n}{n+1}$ متباعدة .

$\boxed{3}$ $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$$a_n = \frac{\ln n}{n}$$

$$a_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}{\frac{\ln n}{n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n \ln(n+1)}{(n+1) \ln n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

(لأن النهايتين موجودتان)

$$= \left(\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1}\right) \cdot \left(\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

يفشل اختبار النسبة.

نستخدم اختبار التكامل: $x \in [3, +\infty)$: $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

* f موجبة على $[3, +\infty)$

* f متصلة على $[3, +\infty)$.

* f متناقصة على $[3, +\infty)$.

$$\left(f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0 \quad \underline{\underline{\forall x \geq 3}} \right)$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{N\to+\infty} \int_3^N \frac{\ln x}{x}\, dx \qquad \left(u = \ln x \quad du = \frac{1}{x}dx \qquad \int u\, du = \frac{u^2}{2} \right)$$

$$= \lim_{N\to+\infty} (\ln x)^2 \Big|_3^N$$

$$= \lim_{N\to+\infty} (\ln N)^2 - (\ln 3)^2$$

$$= +\infty$$

$\Leftarrow \sum \frac{\ln n}{n}$ متباعدة (اختبار التكامل)

تمرين : $\sum n e^{-n^2}$

$\sum a_n$ $\qquad$ $a_n \geq 0$

① اختبار الحد العام $\lim_{n \to +\infty} a_n$

- 0
  - اختبار النسبة
    - $0 \leq l < 1$ تقارب
    - $l = 1$?
    - $l > 1$ تباعد
- $\neq 0$: $\sum a_n$ متباعدة

اختبار التناوب: لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ متسلسلة متناوبة حيث $a_n \geq 0$ لكل n.

إذا كانت $\{a_n\}$ متناقصة و $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ فإن $\sum (-1)^n a_n$ متقاربة.

أمثلة: كل المتسلسلات المتناوبة التالية متقاربة (باستخدام اختبار التناوب):

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad a_n = \frac{1}{n}$

$\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \right.$ و $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ متناقصة $\left.\right)$.

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ $\qquad a_n = \frac{1}{2^n}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ و $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ متناقصة

$$\left(\left(\frac{1}{2^x}\right)' = \left(2^{-x}\right)' = -\ln 2 \cdot 2^{-x} < 0\right)$$

$\boxed{3}$ $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \qquad a_n = \frac{1}{\ln n}$$

$\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$ متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$

$$\left(\left(\frac{1}{\ln x}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x(\ln x)^2} < 0 \quad \forall\ x \geq 2\right)$$

التقارب والتقارب الشرطي:

تعريف: لتكن $\sum a_n$ متسلسلة عددية. نقول أن $\sum a_n$ متقاربة

تقاربا مطلقا إذا كانت $\sum |a_n|$ متقاربة

أما: إذا كانت $\sum a_n$ متقاربة و $\sum |a_n|$ متباعدة فنقول
أن $\sum a_n$ متقاربة تقاربا شرطيا.

أمثلة:

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة (اختبار التناوب)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة (توافقية $p=1$)

إذاً: $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة تقاربا شرطيا.

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ متقاربة (اختبار التناوب)

$\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة $\left(P = 2 > 1 \right)$

إذاً $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ متقاربة تقاربا مطلقا.

Note Title 12/7/2021

متسلسلات القوى:

وهي كل متسلسلة من الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

حيث $a_n \in \mathbb{R}$ و c عدد ثابت

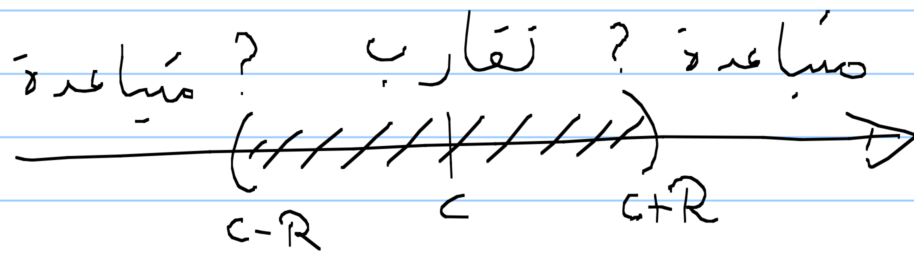
وتدعى متسلسلة قوى في $x-c$

مثال: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$: متسلسلة قوى في x

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \cdots$$

نلاحظ أن $\sum a_n(x-c)^n$ متقاربة القيمة $x=c$

يوجد عدد $R>0$ بحيث:



هذا العدد يسمى نصف قطر التقارب.

مثال 1. أوجد نصف قطر التقارب وفترة التقارب للمتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$$

نستخدم اختبار النسبة:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{x^n}{2^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot 2^n}{x^n\cdot 2^{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\cancel{x^n}\cdot x\cdot \cancel{2^n}}{\cancel{x^n}\cdot \cancel{2^n}\cdot 2}\right| = \frac{|x|}{2}$$

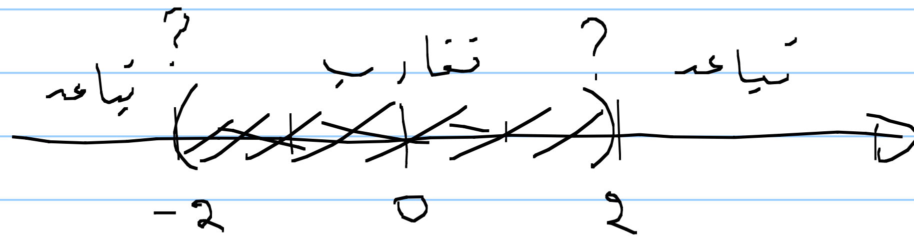
حسب اختبار النسبة: $\sum \frac{x^n}{2^n}$ متقاربة إذا $\frac{|x|}{2} < 1$

ومتباعدة إذا $\frac{|x|}{2} > 1$

ويفشل الاختبار إذا $\frac{|x|}{2} = 1$

$\sum a_n (x-c)^n$

$\underline{c=0}$



$|x| = 2$

$x = \pm 2$

$$\frac{|X|}{2} < 1 \iff |X| < 2 \iff -2 < X < 2$$

$$-2 < X - 0 < 2$$

إذاً : نصف قطر التقارب : $\boxed{R = 2}$

إذا $X = 2$: $\sum \frac{2^n}{2^n} = \sum 1$: متباعدة

إذا $X = -2$: $\sum \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum (-1)^n$: متباعدة

اختبار الحد العام

إذاً فترة التقارب هي : $(-2, 2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \boxed{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\sqrt{n}\ \cancel{(x-1)^{n+1}}}{\sqrt{n+1}\ \cancel{(x-1)^{n}}} \right|$$

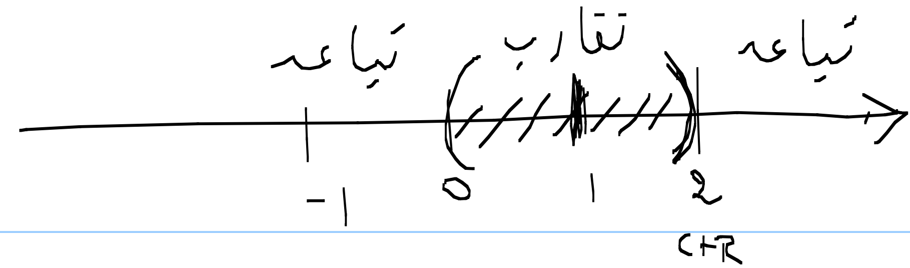
$$= |x-1| \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$$

$$= |x-1|$$

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}} = 1 \right)$$

$|x-1| < 1$ إذا متقاربة $\sum_{n=1} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

إذا : $\boxed{R=1}$

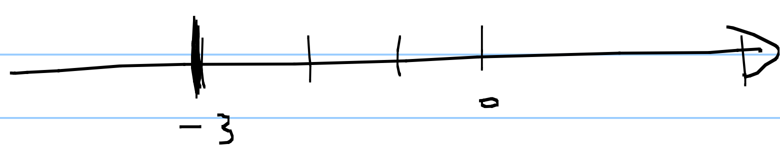


إذا $x=0$: $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ متقاربة (اختبار التناوب) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0 \quad \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \right)$

إذا $x=2$: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة $\left(p=\frac{1}{2} : \sum \frac{1}{n^p} \right)$

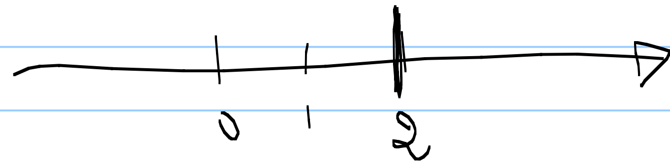
إذا فترة التقارب هي: $[0, 2)$

مثال: (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$



$$\sum \frac{1}{n\ln n} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n\ln n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+1}}{n\ln n} \quad 2$$

× التكامل ✓



مثال :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim \left| \frac{x^{n+1} \cdot n!}{x^n \cdot (n+1)!} \right| \qquad \boxed{(n+1)! = (n+1)n!}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\cancel{x^n} \cdot x \cdot \cancel{n!}}{\cancel{x^n}(n+1)\cancel{n!}} \right| = 0 < 1 \quad \forall x$$

إذا : $R=+\infty$ وفترة التقارب هي $\mathbb{R}$

$$\sum n!\,x^n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = \lim\left|\frac{(n+1)\cancel{n!}\cdot\cancel{x^n}\cdot x}{\cancel{n!}\,\cancel{x^n}}\right|$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(n+1)|x| = \begin{cases}+\infty & x\neq 0 \quad >1 \quad \forall x\neq 0\\ 0 & x=0 \quad <1 \quad x=0\end{cases}$$

إذا $R=0$ وفترة التقارب هي $\{0\}$

تمثيل الدوال على شكل متسلسلات قوى:

$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n$ متقاربة إذا $|r|<1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = \frac{a}{1-r}$$

إذا $r=x$, $a=1$ حيث $-1<x<1$ فإن:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\boxed{1+x+x^2+x^3+\cdots = \frac{1}{1-x} \quad \forall\ -1<x<1}$$

نظرية: لتكن $\sum a_n(x-c)^n$ و R نصف قطر التقارب

نعرف الدالة:

$$f : (c-R, c+R) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sum a_n (x-c)^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

① إذاً f قابلة للاشتقاق على $(c-R, c+R)$ ومشتقتها:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$$

② ج) قابلية التكامل ودالتها الأصلية هي:

$$\int_c^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} \qquad c-R < x < c+R$$

مثال:

① $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\forall x: -1 < x < 1$$

في ① نبدل x بـ $-x$:

② $$\frac{1}{1+x} = \sum (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$-1 < x < 1$$

مثال 2 | اكتب الدالة $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ على شكل متسلسلة قوى في x.

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\left[0 - 1 + 2x - 3x^2 + \cdots\right]$$

$$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1} \qquad \underline{-1 < x < 1}$$

مثال: اكتب الدالة $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ على شكل متسلسلة قوى في x.

ثم استنتج شكل الدالة $g(x)=\tan^{-1}x$.

② $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad -1<x<1$

نعوض x^2 بدلاً من x في ②:

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad \forall x: \ |x|<1$$

$$=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\cdots$$

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \underline{-1 < x < 1}$$

Note Title 12/9/2021

أمثلة :

1) أكتب الدالة $\ln x$ على شكل متسلسلة قوى في $x-1$

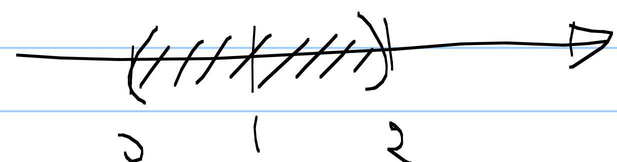
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1$$

نضع : $t = 1 - x \Longrightarrow \boxed{x = 1 - t}$

$$\frac{1}{t} = 1 + (1-t) + (1-t)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (1-t)^n \qquad -1 < 1-t < 1$$

$$-1 < t-1 < 1$$

$$\boxed{0 < t < 2}$$



$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^x (1-t)^n \, dt \qquad \forall\ 0 < x < 2$$

$$\ln t \Big|_1^x = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \Big|_1^x \qquad \sum (x-c)^n$$

$$\cancel{\sum (c-x)^n}$$

$$\underbrace{\ln x - \ln 1}_{=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1}\left[(1-x)^{n+1} - \overbrace{(1-1)^{n+1}}^{=0}\right]$$

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n+1}(1-x)^{n+1} \qquad (-1)^{n+2} = (-1)^n \cdot \overbrace{(-1)^2}^{=1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}(x-1)^{n+1} \qquad = (-1)^n$$

$$\boxed{\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1} \quad \forall\ 0 < x < 2}$$

$f(x) = \frac{1}{2x+3}$ اكتب الدالة $\boxed{2}$

$$\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3\left[\frac{2}{3}x+1\right]} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u+1} \qquad u = \frac{2}{3}x$$

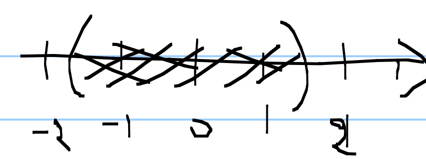
$$\frac{1}{u+1} = \sum (-1)^n u^n \quad 2$$

$$\frac{1}{1-u} = \sum u^n \quad 1$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n \qquad -1 < u < 1$$

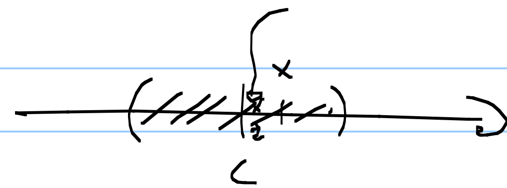
$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}x\right)^n \qquad -1 < \frac{2}{3}x < 1$$

$$\boxed{\frac{1}{2x+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}} x^n \qquad -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}}$$



نظرية 1. إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق $n+1$ مرة

في جوار النقطة c.



إذا كانت x نقطة في هذا الجوار $(x \neq c)$ فإنه يوجد عدد z بين x و c

بحيث:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

حيث: كثيرة حدود تايلور:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^{n}$$

باقي تايلور:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

$n \longrightarrow +\infty$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + 0 \quad \boxed{?}$$

نظرية ٢. لتكن f دالة قابلة للاشتقاق عدد غير منتهٍ من المرات في جوار النقطة c. إذا كانت:

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$$

فإن:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

المتسلسلة في النظرية ٢: تسمى متسلسلة تايلور للدالة f عند c.

وعندما $c=0$: تسمى متسلسلة ماكلوران

أمثلة:

$\boxed{1}$ أكتب الدالة $f(x)=e^x$ على شكل متسلسلة قوى في x.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
0	e^x	$e^0=1$	$\frac{1}{0!}=1$
1	e^x	1	$\frac{1}{1!}=1$
2	e^x	1	$\frac{1}{2!}$
3	e^x	1	$\frac{1}{3!}$
4	e^x	1	$\frac{1}{4!}$

$f^{(0)}$

$(0!=1)$

نفرض أن باقي تايلور يؤول للصفر لذا :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= 1 + 1 . x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R}}$$

2) أكتب الدالة $f(x) = \sin x$ على شكل متسلسلة قوى في x.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
0	$\sin x$	0	0
1	$\cos x$	1	$\frac{1}{1!}$
2	$-\sin x$	0	0
3	$-\cos x$	-1	$-\frac{1}{3!}$
4	$\sin x$	0	0
5			

على اعتبار أن باقي تايلور يؤول لصفر:

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + 0$$

$$- \frac{1}{7!}x^7 + 0 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$$