جامعة الملك سعود كلية العلوم قسم الرياضيات	الاختبار الثاني مقرر ١٣١ ريض المدة: ٩٠ دقيقة	الفصل الدراسي الثاني الأربعاء ١٨-١٠-١٤٤٦هـ يمنع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال الأول: أجب عن ما يأتي (٥ درجات):

١- متى نقول عن علاقة R على مجموعة A أنها علاقة تكافؤ.
٢- متى نقول عن تطبيق أنه تطبيق ثابت.
٣- متى نقول عن تطبيقين أنهما متساويان؟
٤- متى نقول عن مجموعة P أنها ليست تجزئة للمجموعة A؟
٥- متى نقول عن المجموعة R أنها تشكل علاقة ثنائية من المجموعة A إلى المجموعة B؟

السؤال الثاني: هات مثالا فقط على ما يأتي: (٥ درجات):

١- هات مثالا على تجزئتين مختلفتين لمجموعة الأعداد الصحيحة.
٢- هات مثالا على تطبيق محايد.
٣- هات مثالا على علاقة R على مجموعة الأعداد الحقيقية بحيث تكون R علاقة تناظرية ولكنها ليست انعكاسية ولا متعدية ولا تخالفية.
٤- هات مثالا على علاقة ترتيب جزئي ولكنها ليست علاقة ترتيب كلي.
٥- هات مثالا على مجموعتين غير منتهيتين وفي الوقت ذاته غير متكافئتين.

السؤال الثالث: أثبت ما يلي (١٥ درجة):

(أ) إذا كانت A وB و C مجموعات غير خالية فإن:
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$
(٣ درجات)

(ب)إذا كانت A مجموعة غير خالية وكانت R علاقة تكافؤ فيها فإن:
$$aRb \wedge bRc \Longrightarrow \bar{a} = \bar{c}$$
(درجتان)

(ج) ليكن n عددا طبيعيا ولنعرف علاقة R على $\mathbb{Z}$ كما يلي:
$$xRy \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \ni x - y = qn$$
فإن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{Z}$. (٣ درجات)

(د) ليكن لدينا التطبيقان $g: A \longrightarrow B$ و $f: B \longrightarrow C$. إذا كان كل من التطبيقين f و g تقابلا، فإن $f \circ g$ تقابل. (٣ درجات)

(هـ) إن المجموعة $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ قابلة للعد. (٤ درجات)

الحل

السؤال الأول:

١- يقال عن علاقة R على مجموعة A أنها علاقة تكافؤ إذا كانت انعكاسية وتناظرية ومتعدية.
٢- يقال عن تطبيق $f: A \to B$ أنه تطبيق ثابت إذا كان $f(A) = \{b_o\}$ حيث b_o عنصر محدد من المجموعة B.
٣- نحتاج ثلاثة شروط: أن يكون لهما المنطلق (النطاق – المجال – مجموعة التعريف) نفسه وأن يكون لهما المستقر (المجال المقابل – النطاق المصاحب) نفسه وأن تكون قيمهما (صورهما أو خيالهما) عند كل عنصر في المجال متساوية.
٤- نقول عن $P=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ حيث A_i مجموعة جزئية من A لكل i أنها ليست تجزئة للمجموعة A إذا كان إحدى المجموعات A_i خالية أو يوجد $i\neq j$ بحيث $A_i\cap A_j\neq\emptyset$ أو اتحاد جميع عناصر P لا يعطي A.
٥- إذا كانت $R\subseteq A\times B$.

السؤال الثاني: (المطلوب في هذا السؤال الأمثلة فقط دون التبرير)

١- خذ $P=\{\mathbb{Z}\}$ و $P=\{\mathbb{Z}^+,\{0\},\mathbb{Z}^-\}$.
٢- بافتراض أن $B=\{1\}$ فإن العلاقة f المعرفة من B إلى نفسها بالشكل التالي $f(1)=1$ تشكل تطبيقا محايدا.
٣- خذ $R=\{(1,2),(2,1)\}$ وهي علاقة تناظرية على $\mathbb{R}$ ولكنها ليست انعكاسية لأن (1,1) لا ينتمي للعلاقة، وهي ليست متعدية لأن كون (1,2) و(2,1) ينتميان للعلاقة لم يؤد إلى أن (1,1) تنتمي للعلاقة، وهي ليست تخالفية لأن كون (1,2) و(2,1) ينتميان للعلاقة لم يؤد إلى تساوي العددين 1 و2.
٤- لتكن P مجموعة جميع المجموعات الجزئية للمجموعة $A=\{1,2\}$. إن علاقة الاحتواء مع إمكانية المساواة ($\subseteq$) هي علاقة ترتيب جزئي وليس كلي.
٥- $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$ غير متكافئتين وغير منتهيتين.

السؤال الثالث:

(أ) البرهان:

$A\times(B\cup C)=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\cup C\}$

تعريف ضرب المجموعات

$=\{(x,y)|x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)\}$

تعريف الاتحاد

$=\{(x,y)|(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\}$

الرابط "و" يتوزع على الرابط "أو"

$=\{(x,y)|(x,y)\in A\times B\vee(x,y)\in A\times C\}$

تعريف ضرب المجموعات

$=A\times B\cup A\times C$

تعريف الاتحاد

(ب) باستخدام العلاقتين $aRb \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$ و $bRc \Leftrightarrow \bar{b} = \bar{c}$ (نظرية) نجد أن $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c}$.

(ج) العلاقة انعكاسية لأن $x - x = 0 = 0n$ وبالتالي فإن xRx لكل عدد صحيح x.

العلاقة تناظرية لأنه حسب تعريف العلاقة وباستخدام خواص حسابية

$$xRy \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \ni x - y = qn$$

$$\Leftrightarrow \exists - q \in \mathbb{Z} \ni y - x = (-q)n$$

$$\Leftrightarrow yRx$$

حسب تعريف العلاقة مرة أخرى وبالتالي فهي تناظرية. كذلك فإن العلاقة متعدية لأنه حسب تعريف العلاقة واستخدام الخواص الحسابية نجد أن

$$xRy \wedge yRz \Leftrightarrow \exists q, q' \in \mathbb{Z} \ni x - y = qn \wedge y - z = q'n$$

$$\Rightarrow \exists q + q' \in \mathbb{Z} \ni x - z = (x - y) + (y - z) = (q + q')n$$

$$\Rightarrow xRz$$

حسب تعريف العلاقة، وبالتالي فإن العلاقة متعدية. وبما أن العلاقة انعاكسية وتناظرية ومتعدية فهي علاقة تكافؤ في مجموعة الأعداد الصحيحة.

(د) بما أن f تطبيق تقابل فإن f^{-1} تطبيق تقابل (نظرية) وحيث أن تركيب تقابلين هو تقابل فإن $f^{-1} \circ (f \circ g)$ هو تقابل أيضا، ولكن عملية تركيب التطبيقات تجميعية، وبالتالي فإن:

$$f^{-1} \circ (f \circ g) = (f^{-1} \circ f) \circ g = I_B \circ g$$

حسب تعريف التطبيق المحايد. ولكن حسب تعريف تساوي تطبيقين فإن $I_B \circ g = g$ لأن لهما المجال نفسه ولهما المجال المقابل نفسه كما أن لكل $a \in A$ وحسب تعريف تركيب التطبيقات والتطبيق المحايد فإن:

$$(I_B \circ g)(a) = I_B(g(a)) = g(a)$$

وبالتالي فإن التطبيق g تقابل.

(هـ) عرف العلاقة $f: A \longrightarrow \mathbb{N}$ كما يلي: $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$. إن f تطبيق لأن بفرض $\frac{1}{m} = \frac{1}{n}$ فباستخدام خواص حسابية نجد أن $n = m$. أي أن $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{m}\right)$ حسب تعريف التطبيق. وهو تطبيق متباين لأنه حسب تعريف التطبيق وباستخدام خواص حسابية

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{m}\right) \Longrightarrow\ n = m \Longrightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{m}$$

وهو غامر لأنه بفرض أنه يوجد عدد طبيعي n في المجال المقابل فإن $\frac{1}{n}$ موجود بالمجال بحيث أن $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ وذلك حسب تعريف التطبيق. وحيث أنه متباين وغامر فهو تقابل وبالتالي فإن A تكافئ مجموعة الأعداد الطبيعية وبالتالي فهي قابلة للعد.