جامعة الملك سعود كلية العلوم قسم الرياضيات	الاختبار الثاني مقرر ١٣١ ريض المدة: ٩٠ دقيقة	الفصل الدراسي الأول الأربعاء ٢٧-٤-١٤٤٦هـ يمنع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال الأول: أجب عن ما يأتي (٥ درجات):

١- متى نقول عن علاقة R على مجموعة A أنها علاقة تخالفية.
٢- متى نقول عن تطبيق أنه تطبيق محايد.
٣- متى نقول عن تطبيقين أنهما متساويان؟
٤- متى نقول عن $P=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ حيث $A_i \subseteq A$ لكل i أنها تجزئة للمجموعة A؟
٥- متى نقول عن المجموعة R أنها تشكل علاقة ثنائية من المجموعة A إلى المجموعة B؟

السؤال الثاني: هات مثالا فقط على ما يأتي: (٥ درجات):

١- هات مثالا على تجزئة لمجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.
٢- هات مثالا على تطبيق ثابت.
٣- هات مثالا على علاقة R على المجموعة $A=\{1,2\}$ بحيث تكون علاقة تناظرية فقط.
٤- هات مثالا على علاقة تكافؤ على المجموعة $A=\{1,2\}$ ويكون فيها $\bar{x}=\{x\}$ لكل $x \in A$.
٥- هات مثالا على مجموعتين غير متكافئتين.

السؤال الثالث: مستخدما التعاريف والنظريات التي درستها، أكمل الفراغ بما يناسبه: (٥ درجات)

١- إذا كانت العلاقة الثنائية R على A تساوي R^{-1} فهذا يعني أن R بالضرورة علاقة .....
٢- المجموعة $P=\{\{1,3\},\{2\}\}$ تشكل ..... للمجموعة $A=\{1,2,3\}$.
٣- إذا كانت R تشكل علاقة تكافؤ على المجموعة A وكان $a,b \in A$، بحيث $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ فإن $\bar{a}$ ..... $\bar{b}$
٤- إذا كان f تطبيقا، فحتى يكون f^{-1} تطبيقا لابد أن يكون .....
٥- إذا كانت A وB مجموعتين وكان $|A|=3$ و$|B|=4$ فإن: ..... $=|A\times B|$.

السؤال الرابع: أثبت ما يلي (١٠ درجات):

(أ) إذا كان $A\times A$ غير خالٍ فإن المجموعة A غير خالية. (درجتان)
(ب)إذا كان لدينا تطبيق $f: C \to D$ وكانت المجموعتان A وB محتواتين في C فإنه : (درجتان)

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$$

(ج) إذا كان $f: A \to D$ تطبيقا غامرا و$g: B \to A$ تطبيقا متباينا؛ فإن $f \circ g$ ليس تطبيقا غامرا بالضرورة. (درجتان)

(د) إذا كان لدينا التطبيق $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بالقاعدة: $f(x)=x+1$، فإن f تقابل. (٤ درجات)

الحل

السؤال الأول:

١- يقال عن علاقة R على مجموعة A أنها علاقة تخالفية إذا كان

$$(x,y)\in R\wedge(y,x)\in R\Rightarrow x=y$$

٢- يقال عن تطبيق أنه تطبيق محايد إذا كان تطبيقا من مجموعة إلى نفسها وبحيث يصور كل عنصر إلى نفسه ($f: A \to A$) وقاعدته f(x)=x لكل x في المجال)

٣- نحتاج ثلاثة شروط: أن يكون لهما المنطلق (النطاق – المجال – مجموعة التعريف) نفسه وأن يكون لهما المستقر (المجال المقابل – النطاق المصاحب) نفسه وأن تكون قيمهما (صورهما أو خيالهما) عند كل عنصر في المجال متساوية.

٤- نقول عن $P=\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$ حيث A_i مجموعة جزئية من A لكل i أنها تجزئة للمجموعة A إذا كان:

$$A_i\neq\emptyset\ \forall i$$

$$A_i\cap A_j=\emptyset\ \forall i\neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$$

٥- إذا كانت $R\subseteq A\times B$.

السؤال الثاني: (المطلوب في هذا السؤال الأمثلة فقط)

١- خذ $P=\{\mathbb{R}^+\}$. تشكل تجزئة على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

٢- بافتراض أن $B = \{1\}, D = \{2\}$ فإن العلاقة f المعرفة من D إلى B بالشكل التالي f(2)=1 تشكل تطبيقا ثابتا.

٣- لدينا A={1,2}، ولتكن R={(1,2),(2,1)} وهي علاقة تناظرية فقط على A.

٤- لتكن R={(1,1),(2,2)} وهي علاقة تكافؤ على A وفيها $\bar{1} = \{1\}$ و$\bar{2} = \{2\}$.

٥- $\mathbb{R}$ و{1} غير متكافئتين.

السؤال الثالث:

١- تناظرية.

٢- تجزئة.

٣- $\bar{a} = \bar{b}$.

٤- تقابلا.

٥- 12.

السؤال الرابع:

(أ) لنفرض أن الضرب الديكارتي A×A غير خال. إذن حسب تعريف ضرب المجموعات فإن هذا يعني وجود عنصر واحد على الأقل x في A بحيث أن (x,x)∈A×A. وبالتالي فإن المجموعة A غير خالية.

(ب) لتكن C={1,2}=D ولتكن A={1} و B={2} وليكن f التطبيق الثابت الذي يرسل كل عنصر في المجال إلى الرقم 2. إذن:

$$f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset \neq \{2\} = f(A) \cap f(B)$$

(ج) لتكن A={1,2}=D و B={2} وليكن f=I التطبيق المحايد على A ولتكن g تطبيقا من B إلى A بحيث g(2)=2. من الواضح أن مدى $f \circ g$ هو:

$$(f \circ g)(B) = f(\{2\}) = \{2\} \neq A$$

وبالتالي التطبيق $f \circ g$ ليس غامرا.

(د) التطبيق غامر لأن لكل عدد حقيقي y في المجال المقابل فإنه صورة للعدد الحقيقي y-1 من المجال لأنه باستخدام تعريف التطبيق وبعض الخصائص الحسابية سنجد أن:

$$f(y-1) = (y-1) + 1 = y$$

كما أنه متباين لأنه بفرض أنه يوجد عددان x وy في المجال بحيث أن $f(x) = f(y)$ فإنه حسب تعريف التطبيق سنجد أن x+1=y+1 وبطرح واحد من الطرفين سنجد أن x=y. إذن هو متباين. وحيث أنه متباين وغامر فهو تقابل.