جامعة الملك سعود كلية العلوم قسم الرياضيات	الاختبار الثاني مقرر ١٣١ ريض المدة: ٩٠ دقيقة	الفصل الدراسي الثاني الأربعاء ٢٢-١٠-١٤٤٥هـ يمنع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال الأول: أجب عن ما يأتي (٨ درجات):

١- متى نقول عن علاقة على مجموعة أنها علاقة ترتيب كلي.
٢- متى نقول عن مجموعة أنها غير قابلة للعد.
٣- متى نقول عن تطبيقين أنهما متساويان؟
٤- متى نقول عن مجموعة أنها تجزئة لمجموعة أخرى؟

السؤال الثاني: (٥ درجات):

١- هات مثالا على تجزئة لمجموعة الأعداد الحقيقية.
٢- هات مثالا على تكافؤ مجموعتين موضحا لماذا هما متكافئتان.
٣- هات مثالا على علاقة ترتيب جزئي وليست علاقة ترتيب كلي مبينا لماذا هي ليست علاقة ترتيب كلي.
٤- هات مثالا على علاقة تكافؤ على مجموعة A يكون فيها $\bar{x} = \{x\}$ حيث $x \in A$.
٥- هات مثالا على مجموعتين غير منتهيتين وغير متكافئتين.

السؤال الثالث: أثبت ما يلي (١٢ درجة):

(أ) إذا كان $A \times B$ خاليا فلابد أن إحدى المجموعتين A أو B خالية.
(ب) إذا كانت R علاقة ثنائية على A بحيث $R=R^{-1}$ فإنها علاقة تناظرية على A.
(ج) إذا كان لدينا تطبيق $f: C \to D$ وكانت المجموعتان A وB محتواتين في C فإن:

$$A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

(د) إن تركيب تطبيقين غامرين هو تطبيق غامر.

(هـ) لتكن A مجموعة غير خالية. إن علاقة تكافؤ المجموعات ≈ هي علاقة تكافؤ على p(A).

(و) إذا كانت R علاقة تكافؤ على A وكان $a,b \in A$، فإن $\bar{a} \neq \bar{b} \Longleftarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$

الحل

السؤال الأول:

١- يقال عن علاقة R على مجموعة A أنها ترتيب كلي إذا كانت انعكاسية وتخالفية ومتعدية وكان

$$\forall x,y\in A: xRy \vee yRx$$

٢- يقال عن مجموعة أنها غير قابلة للعد إذا كانت غير منتهية ولا تكافئ مجموعة الأعداد الطبيعية.

٣- نحتاج ثلاثة شروط: أن يكون لهما المنطلق (النطاق – المجال – مجموعة التعريف) نفسه وأن يكون لهما المستقر (المجال المقابل – النطاق المصاحب) نفسه وأن تكون قيمهما (صورهما أو خيالهما) عند كل عنصر في المجال متساوية.

٤- نقول عن $P=\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$ أنها تجزئة للمجموعة A إذا كان:

$$A_i\neq\emptyset \ \forall i$$

$$A_i\cap A_j=\emptyset \ \forall i\neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$$

السؤال الثاني: (المطلوب في هذا السؤال الأمثلة فقط، والتوضيح أفضل إلا إذا كان منصوصا عليه بالسؤال)

١- خذ $P=\{\mathbb{R}\}$. تشكل تجزئة على مجموعة الأعداد الحقيقية.

٢- بافتراض أن $B = \{1\}, D = \{2\}$ فإن العلاقة f المعرفة من D إلى B بالشكل التالي $f(2)=1$ تشكل تطبيقا تقابلا، وبالتالي فهما متكافئتان.

٣- لتكن $A=\{1,2\}$، ولتكن R هي علاقة الاحتواء $\subseteq$ على $p(A)$ وبالتالي فهي علاقة ترتيب جزئي وليست علاقة ترتيب كلي بسبب أن $\{1\},\{2\} \in p(A)$ ومع ذلك فإن:

$$\{1\} \not\subseteq \{2\} \wedge \{2\} \not\subseteq \{1\}.$$

٤- خذ $A=\{x\}$ ولتكن R هي العلاقة $A\times A$. إذن هي علاقة تكافؤ وفيها $\bar{x} = \{x\}$.

٥- $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$ غير منتهيتين وغير متكافئتين.

السؤال الثالث:

(أ) لنفرض أن الضرب الديكارتي $A\times B$ خال. إذا كان كل من المجموعتين غير خال، فهذا يعني وجود عنصر x في A وy في B مما يعني أن $(x,y)\in A\times B$ حسب تعريف ضرب المجموعات. وبالتالي فإن الضرب $A\times B$ غير خال. وهذا تناقض. إذن لابد أن إحدى المجموعتين خالية.

(ب) إذا كان $(x,y)\in R$ فإن $(y,x)\in R^{-1}$ حسب تعريف العلاقة العكسية. ولكن $R=R^{-1}$. إذن $(y,x)\in R$. وبالتالي فإن R علاقة تناظرية على A.

(ج)

$$f(A)=\{f(x)\in D|x\in A\}\subseteq\{f(x)\in D|x\in B\}=f(B)$$

لأن $A\subseteq B$.

(د) ليكن كل من $f:A\to B$ و$g:B\to C$ تطبيقا غامرا، إذن:

$$(g\circ f)(A)=g\big(f(A)\big)=g(B)=C$$

لأن كلا من f وg تطبيق غامر. وبالتالي فإن $(g\circ f):A\to C$ تطبيق غامر. إذن تركيب تطبيقين غامرين هو تطبيق غامر.

(هـ) بما أن التطبيق المحايد من مجموعة إلى نفسها هو تطبيق تقابل إذن $A\approx A$ لكل A في p(A) وبالتالي فإن العلاقة انعكاسية.

إذا كان $A\approx B$ فإنه يوجد تطبيق تقابل f من A إلى B. لكن f^{-1} سيكون أيضا تطبيقا تقابلا من B إلى A (نظرية). إذن $B\approx A$ والعلاقة تناظرية.

إذا كان $A\approx B$ و$B\approx C$ فإنه يوجد تطبيقان تقابلان $f:A\to B$ و$g:B\to C$. وبما أن تركيب تطبيقين تقابلين هو تقابل؛ إذن $(g\circ f):A\to C$ تطبيق تقابل. وبالتالي فإن $A\approx C$ والعلاقة متعدية. مما سبق يتضح أنها علاقة تكافؤ على p(A).

(و) لنفرض أن $\bar{a}\cap\bar{b}\neq\emptyset$. إذن يوجد $x\in\bar{a}\cap\bar{b}$. وبالتالي فإن $x\in\bar{a}\wedge x\in\bar{b}$ مما يعني أن $\bar{x}=\bar{a}\wedge\bar{x}=\bar{b}$ (نظرية). بالنتيجة $\bar{a}=\bar{b}$ وهذا تناقض مع كون $\bar{a}\neq\bar{b}$. إذن لا مفر من الإقرار بأن $\bar{a}\cap\bar{b}=\emptyset$.