جامعة الملك سعود كلية العلوم قسم الرياضيات	الاختبار الأول مقرر ١٣١ ريض المدة: ٩٠ دقيقة	الفصل الدراسي الأول الأربعاء ٢٢-٣-١٤٤٦هـ يمنع استخدام الآلة الحاسبة

اسم الطالب: الرقم الجامعي:

السؤال الأول:مستخدما الرموز والتعاريف والنظريات التي درستها، أكمل الفراغ، حيث Ω هي المجموعة الشاملة (٥ درجات):

١- $\sim(\forall x \in \mathbb{R}: x+1<5) \equiv \cdots$

٢- $\sim(\exists x \in \Omega \ni x \in A \vee x \notin B) \equiv \cdots$

٣- $\mathrm{A}' = \{\ldots \mid \ldots\}$ (المطلوب تعريف A' رياضيا)

٤- $\sim(A \rightarrow \sim B) \equiv \cdots$

٥- يكون التقرير المركب صائبا منطقيا إذا ....

السؤال الثاني: إذا كانت A وB مجموعتين بحيث $|\mathrm{A}|=2$ و$|\mathrm{B}|=3$ و$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$ و$|\Omega|=10$، فاحسب ما يلي (٥ درجات):

١- $|(\mathrm{A}' \cup \mathrm{B}')'| = \cdots$

٢- $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}'| = \cdots$

٣- $|\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}| = \cdots$

٤- $|\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}| = \cdots$

٥- $|p(\Omega)| = \cdots$

السؤال الثالث:

(أ) باستخدام جداول الصواب، أثبت أنه لأي ثلاثة تقارير A وB وC فإن: (٣ درجات)

$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge (A \wedge C)$$

(ب) أثبت بطرقتين مختلفتين (إحداهما بجداول الانتماء والثانية باستخدام التعاريف) أنه لكل ثلاث مجموعات A وB وC فإن: (٤ درجات)

$$\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$$

(ج) ليكن لدينا مجموعتان منفصلتان A وB، أثبت أن $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. (٣ درجات)

(د) أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أنه لكل عدد صحيح موجب n فإن: (٥ درجات)

$$.2^n < 3^n$$

الحل

السؤال الأول:

١- $\exists x \in \mathbb{R} \ni x + 1 \geq 5$

٢- $\forall x \in \Omega: \sim(x \in A \vee x \notin B) \equiv \forall x \in \Omega: x \notin A \wedge x \in B$

وممكن كتابة $\forall x \in \Omega: x \in A' \wedge x \in B$

٣- $\mathrm{A}' = \{x | x \in \Omega \wedge x \notin A\}$

٤- $A \wedge \sim(\sim\mathrm{B}) \equiv A \wedge \mathrm{B}$

٥- إذا كانت جميع قيم صوابه صائبة

السؤال الثاني:

١- $|(\mathrm{A}' \cup \mathrm{B}')'| = |\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| = 0$

٢- $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}'| = 7$

٣- $|\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}| = 3$

٤- $|\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}| = 5$

٥- $|p(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^{10} = 1024$

السؤال الثالث: (أ)

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	$(A \wedge B) \wedge (A \wedge C)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F	F
F	T	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

نلاحظ التكافؤ من خلال تطابق قيم الصواب في العمودين السابع والثامن.

(ب) أولا - باستخدام جداول الانتماء:

A	B	C	$A\cup B$	$B\cup C$	$A\cup(B\cup C)$	$(A\cup B)\cup C$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

نلاحظ التساوي من خلال تطابق (أو تساوي) العمودين السادس والسابع

ثانيا – باستخدام التعاريف:

$A\cup(B\cup C)=\{x|x\in A\vee x\in B\cup C\}$ (تعريف الاتحاد)

$=\{x|x\in A\vee(x\in B\vee x\in C)\}$ (تعريف الاتحاد)

$=\{x|(x\in A\vee x\in B)\vee x\in C)\}$ (الرابط " أو " تجميعي)

$=\{x|x\in A\cup B\vee x\in C)\}$ (تعريف الاتحاد)

$=(A\cup B)\cup C$ (تعريف الاتحاد)

(ج) ممكن البرهان باستخدام جداول الانتماء وأن المجموعتين منفصلتان كما يلي:

A	B	$A\cup B$	$A\Delta B$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$

نلاحظ التساوي من خلال تطابق (أو تساوي) العمودين الثالث والرابع

وممكن البرهان باستخدام التعاريف كما يلي:

$A\Delta B=\{x|x\in(A-B)\vee x\in(B-A)\}$ (تعريف الفرق التناظري)

$= \{x | x \in A \vee x \in B\}$ (لأن المجموعتين منفصلتان)

$= A \cup B$ (تعريف الاتحاد)

(د) الخطوة الأساسية: $n=1$

$$2^1 = 2 < 3 = 3^1$$

معطى. إذن العبارة صحيحة في حالة $n=1$.

خطوة الاستقراء: نفترض صحة العبارة في حالة $n=k$ أي أن:

$$2^k < 3^k \qquad (١)$$

ثم نحاول إثباتها في حالة $n=k+1$ أي أن:

$$2^{k+1} < 3^{k+1} \qquad (٢)$$

بضرب طرفي المتراجحة (١) في العدد 2 واستخدام قوانين الأسس، نجد أن:

$$2^{k+1} = 2^k(2) < 3^k(2) < 3^k(3) = 3^{k+1}$$

لأن $3 < 2$. إذن المعادلة (٢) صحيحة وبالتالي فالعبارة صائبة لكل عدد صحيح موجب n.