جامعة الملك سعود كلية العلوم قسم الرياضيات	الاختبار النهائي مقرر ١٣١ ريض المدة: ٣ ساعات	الفصل الدراسي الأول الأحد ٢٠-١١-١٤٤٦هـ يمنع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال الأول: بافتراض أن Ω هي المجموعة الشاملة؛ فأكمل الفراغ باستخدام **رمز واحد مرة واحدة بحيث يكون الأنسب** من الرموز الآتية:

$\vee, \in, \exists, \subset, \subseteq, <, \emptyset, \Omega, \leq, \Longrightarrow, \Longleftarrow, \forall, \wedge, =, \cup, \cap$:

(٣ درجات: كل فقرة نصف درجة)

١- في التقارير: نكتب A أو B بالشكل $A \ldots B$

٢- لتكن $A=\{1,2\}$، فإن $\{1,2\} \ldots p(A)$

٣- إذا كان f تطبيقا متباينا من A إلى B؛ فإن: $|A| \ldots |f(A)|$

٤- لتوضيح أن S حلقة جزئية فعلية من R؛ نكتب S … R.

٥- من خصائص المجموعات أن: $(A \cap B)' = A' \ldots B'$

٦- إذا كان التقرير $A \longrightarrow B$ صائبا منطقيا فإن $A \ldots B$.

السؤال الثاني: أجب عن ما يأتي: (٦ درجات: كل فقرة درجة)

١- إذا كانت S وT مجموعتين فمتى نقول إن العدد الرئيس للمجموعة S أقل من العدد الرئيس للمجموعة T؟

٢- متى نقول إن R علاقة تخالفية على مجموعة A؟

٣- هل تشكل المجموعة $P = \{(-\infty, 1], [1, \infty)\}$، تجزئة لمجموعة الأعداد الحقيقية؟ ولماذا؟

٤- انف التقرير الآتي: $\forall x \in A: x > 5$.

٥- متى نقول عن النظام (F,+,·) أنه حقل؟.

٦- هات مثالا على زمرة إبدالية، ومثالا آخر على حلقة إبدالية بدون محايد (ليس فيها عنصر الوحدة).

السؤال الثالث: (أ) إذا كان لدينا الحقل $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$؛ فأجب عما يلي:

١- بالنسبة لعملية الجمع، فاحسب ما يلي: 6+3، -4. (درجة)

٢- بالنسبة لعملية الضرب، فاحسب ما يلي: (6)(3)، 4^{-1}. (درجة)

(ب) لتكن لدينا الزمرتان الإبداليتان $G=(\mathbb{R},+)$ و$G'=(\mathbb{R}^*,\cdot)$ مع عمليتي الجمع والضرب المعروفتين على الأعداد الحقيقية، ولتكن لدينا الدالة $f: G \longrightarrow G'$ المعرفة بالشكل $f(r) = e^r$ وذلك لكل عنصر r في G.

١- أثبت أن f تشاكل. (درجتان)

٢- استنتج أن $e^0 = 1$ باستخدام هذا التشاكل. (درجة)

٣- استخدم نواة هذا التشاكل لإثبات أنه تشاكل متباين. (درجة)

(ج) إذا كانت G زمرة إبدالية رتبتها 4 وكانت H زمرة جزئية فعلية وغير تافهة من G، فما هي رتبتها؟ (درجة)

السؤال الرابع: أجب عن ما يلي: (٢٤ درجة: كل فقرة ثلاث درجات):

(أ) إذا كان $a, b \in A \neq \emptyset$ وكانت R علاقة تكافؤ على A وكان $\bar{a} \subseteq \bar{b}$، فأثبت أن $\bar{a} = \bar{b}$.

(ب) أثبت أن النظام $(D,+,\cdot)$ لا يشكل حلقة حيث D هي مجموعة الأعداد الفردية مع عمليتي الجمع والضرب المعروفتين.

(ج) إذا كانت S مجموعة (سواء منتهية أو غير منتهية) فأثبت أن $|S|<|P(S)|$.

(د) إذا كان f تماثلا من الزمرة $(G,*)$ إلى الزمرة $(H,\circ)$، فأثبت أنه إذا كانت G إبدالية فإن H إبدالية أيضا.

(ذ) أثبت أن التقريرين: $E \leftrightarrow F$ و$(E \to F) \wedge (F \to E)$ متكافئان.

(ر) مستخدما الاستقراء الرياضي، أثبت أن التقرير: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ لكل عدد طبيعي $n \geq 1$.

(ز) أثبت أن النظام $(S_3,\circ)$ زمرة، حيث "$\circ$" هي عملية تركيب التطبيقات، ثم بين أنها غير إبدالية.

(س) مستخدما طريقة الوقوع في تناقض، أثبت أن الجذر التكعيبي للعدد سبعة هو عدد غير نسبي.

الحل

السؤال الأول:

(٣ درجات: كل فقرة نصف درجة)

١- في التقارير: نكتب A أو B بالشكل $A \vee B$

٢- لتكن $A=\{1,2\}$، فإن $\{1,2\} \in p(A)$

٣- إذا كان f تطبيقا متباينا من A إلى B؛ فإن: $|A| = |f(A)|$

٤- لتوضيح أن S زمرة جزئية فعلية من R؛ نكتب $S < R$.

٥- من خصائص المجموعات أن: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

٦- إذا كان التقرير $B \longrightarrow A$ صائبا منطقيا فإن $B \Longrightarrow A$.

السؤال الثاني: أجب عن ما يأتي: (٦ درجات: كل فقرة درجة)

١- إذا كانت S وT مجموعتين فمتى نقول إن العدد الرئيس للمجموعة S أقل من العدد الرئيس للمجموعة T؟

إذا كانت S تكافئ مجموعة جزئية من T بينما T لا تكافئ أي مجموعة جزئية من S.

٢- متى نقول إن R علاقة تخالفية على مجموعة A؟

إذا كان $(x,y),(y,x) \in R \Longrightarrow x = y$ حيث x وy عنصران من المجموعة A.

٣- هل تشكل المجموعة $P = \{(-\infty,1],[1,\infty)\}$، تجزئة لمجموعة الأعداد الحقيقية؟ ولماذا؟

لا، لأن تقاطعهما ليس خاليا حيث يتبقى العدد واحد في التقاطع.

٤- انف التقرير الآتي: $\forall x \in A : x > 5$.

$\exists x \in A \ni x \leq 5$.

٥- متى نقول عن النظام $(F,+,\cdot)$ أنه حقل؟.

إذا كان النظام $(F,+)$ زمرة إبدالية، والنظام $(F^*,\cdot)$ زمرة إبدالية، وكانت عملية الضرب تتوزع على الجمع من اليمين واليسار.

٦- هات مثالا على زمرة إبدالية، ومثالا آخر على حلقة إبدالية بدون محايد (ليس فيها عنصر الوحدة).

الأمثلة لا نهائية، لكن أي مثالين صحيحين يصلحان:

مثال الزمرة الإبدالية هي: $(\mathbb{Z}, +)$

مثال الحلقة الإبدلية بدون محايد هي: $(2\mathbb{Z}, +,\cdot)$ (أو يقال مجموعة الأعداد الزوجية مع عملية الجمع والضرب في عدد المعروفتين على مجموعة الأعداد الصحيحة)

السؤال الثالث: (أ) إذا كان لدينا الحقل $(\mathbb{Z}_7, +,\cdot)$؛ فأجب عما يلي:

١- بالنسبة لعملية الجمع، فاحسب ما يلي: 3+6، -4. (درجة)

3+6=2، $-4 = 3$.

٢- بالنسبة لعملية الضرب، فاحسب ما يلي: (3)(6)، 4^{-1}. (درجة)

(3)(6)=4، $4^{-1} = 2$.

(ب) لتكن لدينا الزمرتان الإبداليتان $G=(\mathbb{R},+)$ و $G'=(\mathbb{R}^*,\cdot)$ مع عمليتي الجمع والضرب المعروفتين على الأعداد الحقيقية، ولتكن لدينا الدالة $f: G \longrightarrow G'$ المعرفة بالشكل $f(r) = e^r$ وذلك لكل عنصر r في G.

١- أثبت أن f تشاكل. (درجتان)

لكل r و s في G فإن:

$$f(r+s) = e^{r+s} = e^r \cdot e^s = f(r)f(s)$$

إذن f تشاكل.

٢- استنتج أن $e^0 = 1$ باستخدام هذا التشاكل. (درجة)

من خصائص التشاكل أن صورة محايد الزمرة G هو محايد الزمرة G' (برهان النظرية (٥-٦))؛ أي أن f(0)=1 وبالتالي:

$$1 = f(0) = e^0$$

٣- استخدم نواة هذا التشاكل لإثبات أنه تشاكل متباين. (درجة)

من تعريف النواة نجد أن:

$$\begin{aligned} kerf &= \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | e^x = 1\} \end{aligned}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} | x = \ln(e^x) = \ln(1) = 0\} = \{0\}$$

إذن هو تشاكل متباين.

(ج) إذا كانت G زمرة إبدالية رتبتها 4 وكانت H زمرة جزئية فعلية وغير تافهة من G، فما هي رتبتها؟ (درجة)

باستخدام نظرية لاغرانج فإن رتبة H تقسم رتبة G، وبالتالي رتبة H هي أحد قواسم العدد 4. ولكن H زمرة جزئية فعلية وبالتالي لا يمكن أن تكون رتبتها 4 وحيث أنها غير تافهة فلا يمكن أن تكون رتبتها العدد 1. إذن لابد أن تكون رتبتها العدد 2.

السؤال الرابع: أجب عن ما يلي (٢٤ درجة: كل فقرة ثلاث درجات):

(أ) إذا كان $a, b \in A \neq \emptyset$ وكانت R علاقة تكافؤ على A وكان $\bar{a} \subseteq \bar{b}$، فأثبت أن $\bar{a} = \bar{b}$.

نعلم أن $a \in \bar{a}$، وحيث أن $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ فإن $a \in \bar{b}$، وبالتالي فإن $\bar{a} = \bar{b}$ (نظرية).

(ب) أثبت أن النظام (D,+,·) لا يشكل حلقة حيث D هي مجموعة الأعداد الفردية مع عمليتي الجمع والضرب المعروفتين.

النظام غير مغلق مع عملية الجمع، فحاصل جمع أي عددين فرديين هو عدد زوجي (سبب آخر وهو عدم وجود العنصر المحايد الجمعي وهو الصفر).

(ج) إذا كانت S مجموعة (سواء منتهية أو غير منتهية) فأثبت أن |S|<|P(S)|.

بداية إذا كانت S مجموعة خالية فإن $P(S) = \{\emptyset\}$ وبالتالي $0 = |S| < |P(S)| = 1$ والعلاقة صحيحة. الآن لنفرض أن S غير خالية وأنه يوجد تقابل $f: S \to P(S)$ ولنفرض أن $A = \{x \in S | x \notin f(x)\}$.

إذن A مجموعة جزئية من S وبالتالي تنتمي إلى P(S). وحيث أن f تقابل فلابد من وجود $s \in S$ بحيث $f(s) = A$. الآن أمامنا حالتان، الأولى أن $s \in A$ وهذا يؤدي بدوره إلى $s \notin f(s) = A$ حسب تعريف A. وهذا تناقض. الثانية أن $s \notin A$ وهذا يؤدي بدوره إلى $s \in f(s) = A$ حسب تعريف A. وهذا تناقض أيضا. إذن لا مخرج من هذا التناقض إلا بالقبول أنه لا يوجد تقابل بين S وP(S). وبالتالي فإن $|S| \neq |P(S)|$. الآن لدينا أن التطبيق $g: S \to P(S)$ المعرف كما يلي $g(s) = \{s\}$ لكل $s \in S$ وهو تطبيق متباين لأنه بفرض أن $s_1, s_2 \in S$ بحيث أن $g(s_1) = g(s_2)$ فإن هذا يؤدي إلى $\{s_1\} = \{s_2\}$ وبالتالي فإن $s_1 = s_2$. إذن g متباين. وبالتالي فإن |S|<|P(S)|.

(د) إذا كان f تماثلا من الزمرة (G,∗) إلى الزمرة (H,∘)، فأثبت أنه إذا كانت G إبدالية فإن H إبدالية أيضا.

بما أن f تماثل، إذن لكل $x', y' \in H$. فإنه يوجد $x, y \in G$ بحيث $f(x) = x'$ و $f(y) = y'$.
باستخدام خواص التماثل نجد أن:

$$x' \circ y' = f(x) \circ f(y) = f(x * y) = f(y * x)$$

لأن الزمرة G إبدالية. وباستخدام التماثل مرة أخرى نجد أن:

$$f(y * x) = f(y) \circ f(x) = y' \circ x'$$

إذن الزمرة H إبدالية.

(ذ) أثبت أن التقريرين: $E \leftrightarrow F$ و $(E \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow E)$ متكافئان.

E	F	$E \rightarrow F$	$F \rightarrow E$	$E \leftrightarrow F$	$(E \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow E)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

نلاحظ تطابق قيم الصواب في العمودين الخامس والسادس

(ر) مستخدما الاستقراء الرياضي، أثبت أن التقرير: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ لكل عدد طبيعي $n \geq 1$.

الخطوة الأساسية: $n=1$

$$1 = 1^2$$

إذن العبارة صحيحة في حالة $n=1$.

خطوة الاستقراء: نفترض صحة العبارة في حالة $n=k$ أي أن:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad (١)$$

ثم نحاول إثباتها في حالة $n=k+1$ أي أن:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2 \qquad (٢)$$

باستخدام صحة العبارة في حالة $n=k$، وإضافة $2(k + 1) - 1$ إلى طرفي المعادلة (١) فإنها تصبح كما يلي:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2(k + 1) - 1) = k^2 + 2(k + 1) - 1$$

$$= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

إذن المعادلة (٢) صحيحة وبالتالي فالعبارة صائبة لكل عدد طبيعي $n \geq 1$.

(ز) أثبت أن النظام $(S_3,\circ)$ زمرة، حيث "$\circ$" هي عملية تركيب التطبيقات، ثم بين أنها غير إبدالية.

أولا: النظام مغلق لأن تركيب تقابلين هو تقابل (نظرية). ثانيا: عملية تركيب التطبيقات عملية تجميعية (نظرية). ثالثا: يوجد عنصر محايد و هو التطبيق المطابق (المحايد) I_S. رابعا: لكل عنصر نظير لأن العلاقة العكسية لتطبيق التقابل هي في الواقع تطبيق تقابل (نظرية).

كونها غير إبدالية لأنه بفرض أن:

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\ \&\ g=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

فإنه باستخدام تعريف تركيب التطبيقات نجد أن:

$$f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=g\circ f$$

(س) مستخدما طريقة الوقوع في تناقض، أثبت أن الجذر التكعيبي للعدد سبعة هو عدد غير نسبي.

لنفرض أن الجذر التكعيبي للعدد سبعة هو عدد نسبي. إذن يمكن كتابته على شكل كسر في أبسط صورة كما يلي:

$$\sqrt[3]{7}=\frac{a}{b}$$

حيث a و b عددان صحيحان غير صفريين والقاسم المشترك الأكبر لهما هو العدد واحد (لأن الكسر في أبسط صورة فرضا). بتكعيب الطرفين نحصل على ما يلي:

$$7=\frac{a^3}{b^3}$$

وباستخدام خواص الكسور يصبح لدينا أن

$$b^3=\frac{a^3}{7}$$

وبالتالي فإن العدد سبعة يقسم مكعب العدد a. وحيث أن سبعة عدد أولي فهو لابد أن يقسم a نفسها. إذن يمكن كتابة a بالشكل $a=7c$ حيث c عدد صحيح غير صفري. إذن يصبح لدينا بعد التعويض في المعادلة أعلاه ثم الاختصار

$$b^3=\frac{7^3c^3}{7}=7^2c^3$$

وباستخدام خواص الكسور نجد أن:

$$\frac{b^3}{7}=7c^3$$

وبالتالي فإن العدد سبعة يقسم مكعب العدد b. وحيث أن سبعة عدد أولي فهو لابد أن يقسم b نفسها. إذن فإن العدد سبعة يقسم كلا من العددين a وb، وهذا يتناقض مع الفرض بأن القاسم المشترك الأكبر لهما هو العدد واحد. سبب هذا التناقض هو افتراضنا بأن الجذر التكعيبي للعدد سبعة عدد نسبي. إذن فإن الجذر التكعيبي للعدد سبعة هو عدد غير نسبي.