جامعة الملك سعود	الاختبار النهائي	الفصل الدراسي الأول
كلية العلوم	مقرر ١٣١ ريض	الأحد ٧-٦-١٤٤٦هـ
قسم الرياضيات	المدة: ٣ ساعات	يمنع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال الأول: بافتراض أن Ω هي المجموعة الشاملة؛ فأكمل الفراغ باستخدام **رمز واحد مرة واحدة بحيث يكون الأنسب** من الرموز الآتية:

$\notin, \in, \exists, \subset, \subseteq, <, \emptyset, \Omega, \leq, \Longrightarrow, \Longleftarrow, \forall, \Leftrightarrow, =, \cup, \cap$:

(٥ درجات: كل فقرة نصف درجة)

١- $E \leftrightarrow \mathrm{F} \ldots (E \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow E)$

٢- لتكن $A=\{1,2\}$، فإن $1,2 \ldots p(A)$

٣- إذا كان f تطبيقا متباينا من A إلى B؛ فإن: $|f(A)| \ldots |A|$

٤- $A \cap B' = \emptyset \Longrightarrow A \ldots B$

٥- $x \in A - B : x \in A \quad \ldots$

٦- $\emptyset' \Delta \emptyset = \cdots$

٧- إن نفي التقرير 5≥7 هو 5 … 7.

٨- من خصائص المجموعات أن: $(A \cap B)' = A' \ldots B'$

٩- $A \cap A' = \cdots$

١٠- إذا كان لدينا التطبيق $f: A \longrightarrow B$ وكان $C, D \subseteq A$ فإن:
$C \subseteq D \ldots f(C) \subseteq f(D)$

السؤال الثاني: إذا كانت G هي الزمرة $(\mathbb{Z}_9, +)$ وكان A وB زمرتين جزئيتين منها بحيث أن A زمرة جزئية تافهة و3=|B| ؛ فأوجد ما يلي:

(٣ درجات: كل فقرة نصف درجة)

١- $|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| = \cdots$.

٢- $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = \cdots$.

٣- $|\mathrm{A} \times \mathrm{B}| = \cdots$.

٤- $|\mathrm{A} - \mathrm{B}| = \cdots$.

٥- $|\mathrm{A} \Delta \mathrm{B}| = \cdots$.

٦- $|p(\mathbb{Z}_9)| = \cdots$.

السؤال الثالث: أجب عن ما يأتي:

١- متى نقول عن مجموعة أنها قابلة للعد؟ (درجة)

٢- متى نقول إن R علاقة تناظرية على مجموعة A؟ (درجة)

٣- هل تشكل المجموعة $P = \{(-\infty, 1), (1, \infty)\}$، تجزئة لمجموعة الأعداد الحقيقية؟ ولماذا؟ (درجة)

٤- متى نقول عن النظام $(\mathrm{G}, \star)$ أنه زمرة؟ (درجتان)

٥- متى نقول عن النظام $(\mathrm{F}, +, \cdot)$ أنه حقل؟. (درجتان)

٦- هات مثالا على زمرة إبدالية، ومثالا آخر على حلقة إبدالية بمحايد (فيها عنصر الوحدة). (درجتان)

السؤال الرابع:

(أ) إذا كان لدينا الحلقة $(\mathbb{Z}_9, +,\cdot)$؛ فأجب عما يلي:

١- بالنسبة لعملية الجمع، فاحسب ما يلي: 7+3، 3+3، -4. (درجة ونصف)
٢- بالنسبة لعملية الضرب، فاحسب ما يلي: $(7)(3)$، 3^2، 4^{-1}. (درجة ونصف)
٣- أوجد قيمة x إذاعلمت أن $2x-4=4$. (درجة)

(ب) لتكن لدينا الزمرتان الإبداليتان $G=(\mathbb{R},+)$ و$G'=(\mathbb{R}^*,\cdot)$ ولتكن لدينا الدالة $f\colon G\longrightarrow G'$ المعرفة بالشكل $f(r)=e^r$ وذلك لكل عنصر r في G.
١- أثبت أن f تشاكل. (درجتان)
٢- استخدم نواة هذا التشاكل لإثبات أنه تشاكل متباين. (درجتان)

السؤال الخامس: أجب عن ما يلي:

(أ) إذا كان لدينا التطبيق $f\colon A\longrightarrow B$ وكان $C,D\subseteq A$ فأثبت أن: $f(C)-f(D)\subseteq f(C-D)$. (٤ درجات)

(ب) لتكن $(G,\cdot)$ زمرة و$\emptyset\neq H\subseteq G$ بحيث لكل x وy في H فإن $xy^{-1}\in H$. أثبت أن $(H,\cdot)$ زمرة جزئية من $(G,\cdot)$، أي أن $H\leq G$. (٤ درجات)

(ج) أثبت أن المجموعة $\mathbb{Z}^-$ والمجموعة $\mathbb{N}$ لهما العدد الرئيس نفسه. (٤ درجات)

(د) ليكن لدينا النظام ذو العملية $(G,*)$ حيث $G=\{e,a,b,c\}$ أكمل جدول كيلي الآتي بحيث يكون النظام مغلقا وإبداليا ويكون العنصر e عنصرا محايدا في النظام (٣ درجات)

$*$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

الحل

السؤال الأول: بافتراض أن Ω هي المجموعة الشاملة؛ فأكمل الفراغ باستخدام **رمز واحد** يكون الأنسب من الرموز الآتية:

$:\notin, \in, \exists, \subset, \subseteq, <, \emptyset, \Omega, \leq, \Longrightarrow, \Longleftarrow, \forall, \Longleftrightarrow, =, \cup, \cap$

(٥ درجات: كل فقرة نصف درجة)

١- $(E \to F) \wedge (F \to E) \Longleftrightarrow E \leftrightarrow \mathrm{F}$

٢- لتكن $A=\{1,2\}$، فإن $1,2 \notin p(A)$

٣- إذا كان f تطبيقا متباينا من A إلى B؛ فإن: $|A| = |f(A)|$

٤- $A \cap B' = \emptyset \Longrightarrow A \subseteq B$

٥- $\forall\, x \in A - B : x \in A$

٦- $\emptyset' \Delta \emptyset = \Omega$

٧- إن نفي التقرير 5≥7 هو $5 < 7$.

٨- من خصائص المجموعات أن: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

٩- $A \cap A' = \emptyset$

١٠- إذا كان لدينا التطبيق $f: A \longrightarrow B$ وكان $C, D \subseteq A$ فإن:

$C \subseteq D \Longrightarrow f(C) \subseteq f(D)$

السؤال الثاني: إذا كانت G هي الزمرة $(\mathbb{Z}_9, +)$ وكان A و B زمرتين جزئيتين منها بحيث أن A زمرة جزئية تافهة و3=|B| ؛ فأوجد ما يلي:

(٣ درجات: كل فقرة نصف درجة)

١- $|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| = 1$.

٢- $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = 3$.

٣- $|\mathrm{A} \times \mathrm{B}| = 3$.

٤- $|\mathrm{A} - \mathrm{B}| = 0$.

٥- $|\mathrm{A} \Delta \mathrm{B}| = 2$.

٦- $|p(\mathbb{Z}_9)| = 2^9$.

السؤال الثالث: أجب عن ما يأتي:

١- متى نقول عن مجموعة أنها قابلة للعد؟ (درجة)

إذا كانت منتهية أو تكافئ مجموعة الأعداد الطبيعية.

٢- متى نقول إن R علاقة تناظرية على مجموعة A؟ (درجة)

إذا كان $(x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \in R$ حيث x و y عنصران من المجموعة A.

٣- هل تشكل المجموعة $P = \{(-\infty, 1), (1, \infty)\}$، تجزئة لمجموعة الأعداد الحقيقية؟ ولماذا؟ (درجة)

لا، لأن اتحادها لا يساوي مجموعة الأعداد الحقيقية حيث يتبقى العدد واحد فهو لم يذكر هنا.

٤- متى نقول عن النظام $(G,\star)$ أنه زمرة؟ (درجتان)

إذا كان مغلقا ودامجا وبه عنصر محايد ولكل عنصر فيه يوجد نظير له.

٥- متى نقول عن النظام $(F,+,\cdot)$ أنه حقل؟. (درجتان)

إذا كان النظام $(F,+)$ زمرة إبدالية، والنظام $(F^*,\cdot)$ زمرة إبدالية، وكانت عملية الضرب تتوزع على الجمع من اليمين واليسار.

٦- هات مثالا على زمرة إبدالية، ومثالا آخر على حلقة إبدالية بمحايد (فيها عنصر الوحدة) (درجتان).

مثال على الزمرة الإبدالية: $(\mathbb{Z},+)$

مثال على الحلقة الإبدلية بمحايد: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

السؤال الرابع: (أ) إذا كان لدينا الحلقة $(\mathbb{Z}_9,+,\cdot)$؛ فأجب عما يلي:

١- بالنسبة لعملية الجمع، فاحسب ما يلي: 3+7، 3+3، -4. (درجة ونصف)

3+7=1، $3+3=6$، $-4=5$.

٢- بالنسبة لعملية الضرب، فاحسب ما يلي: (3)(7)، 3^2، 4^{-1}. (درجة ونصف)

(3)(7)=3، $3^2=(3)(3)=0$، $4^{-1}=7$.

٣- أوجد قيمة x إذاعلمت أن $2x-4=4$. (درجة)

$$2x-4=4 \Rightarrow 2x=8$$

لأننا في الحلقة $(\mathbb{Z}_9,+,\cdot)$. ولكن في $\mathbb{Z}_9$ نجد فقط أن $2(4)=8$ ؛ إذن $x=4$.

(ب) لتكن لدينا الزمرتان الإبداليتان $G=(\mathbb{R},+)$ و $G'=(\mathbb{R}^*,\cdot)$ ولتكن لدينا الدالة $f: G \longrightarrow G'$ المعرفة بالشكل $f(r)=e^r$ وذلك لكل عنصر r في G.

١- أثبت أن f تشاكل. (درجتان)

لكل r و s في G فإن:

$$f(r+s)=e^{r+s}=e^r\cdot e^s=f(r)f(s)$$

إذن f تشاكل.

٢- استخدم نواة هذا التشاكل لإثبات أنه تشاكل متباين. (درجتان)

من تعريف النواة نجد أن:

$$kerf=\{x\in\mathbb{R}|f(x)=1\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}|e^x=1\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}|x=\ln(e^x)=\ln(1)=0\}=\{0\}$$

إذن هو تشاكل متباين.

السؤال الخامس: أجب عن ما يلي:

(أ) إذا كان لدينا التطبيق $f:A\longrightarrow B$ وكان $C,D\subseteq A$ فأثبت أن: $f(C)-f(D)\subseteq f(C-D)$. (٤ درجات)

$y\in f(C)-f(D)\Longrightarrow y\in f(C)\wedge y\notin f(D)$ (تعريف الفرق بين مجموعتين)

$\Longrightarrow \exists x\in C\wedge x\notin D\ni f(x)=y$ (تعريف صورة عنصر)

$\Longrightarrow \exists x\in C-D\ni f(x)=y$ (تعريف الفرق بين مجموعتين)

$\Longrightarrow y=f(x)\in f(C-D)$ (تعريف صورة عنصر)

$\Longrightarrow f(C)-f(D)\subseteq f(C-D)$ (تعريف الاحتواء)

(ب) لتكن $(G,\cdot)$ زمرة و $\emptyset\neq H\subseteq G$ بحيث لكل x و y في H فإن $xy^{-1}\in H$. أثبت أن $(H,\cdot)$ زمرة جزئية من $(G,\cdot)$، أي أن $H\leq G$. (٤ درجات)

بداية، المجموعة H ترث التجميع من G لأنها مجموعة جزئية منها. وبما أن H غير خالية فلابد من وجود $x\in H$ وبالتالي فإن $xx^{-1}=e\in H$ حيث e هو محايد G (من المعطى $xy^{-1}\in H$ لكل x و y في H)، وهذا يعني أن H تملك عنصرا محايدا وهو ذاته محايد G. من المعطيات مرة أخرى نجد أنه لكل y في H فإن $ey^{-1}=y^{-1}\in H$ وهذا يعني أن H تحوي نظير كل عنصر من عناصرها. مرة أخرى نجد أن لكل x و y في H فإن x و y^{-1} في H لأن $y^{-1}\in H$. وباستخدام المعطيات فإن

$$x(y^{-1})^{-1}=xy\in H$$

وبالتالي فالنظام مغلق. مما تقدم نجد أن $H\leq G$.

(ج) أثبت أن المجموعة $\mathbb{Z}^-$ والمجموعة $\mathbb{N}$ لهما العدد الرئيس نفسه. (٤ درجات)

عرف العلاقة التالية: $f:\mathbb{Z}^- \longrightarrow \mathbb{N}$ كما يلي: لكل عدد صحيح سالب z فإن $f(z) = -z$. من الواضح أن f تطبيق؛ لأنه بفرض أن $z_1=z_2$ فإن $-z_1=-z_2$ وبالتالي فإن $f(z_1)=f(z_2)$ من تعريف f.

كذلك هو أحادي وذلك بفرض أن $f(z_1)=f(z_2)$ فإن $-z_1=-z_2$ من تعريف f وبالتالي فإن $z_1=z_2$. كذلك

هو غامر لأنه بأخذ أي عدد طبيعي n فهو صورة للعدد الصحيح السالب $-n$. مما تقدم يتضح بأن f تقابل وبالتالي للمجموعتين العدد الرئيس نفسه.

(د) ليكن لدينا النظام ذو العملية $(G,*)$ حيث $G=\{e,a,b,c\}$ أكمل جدول كيلي الآتي بحيث يكون النظام مغلقا وإبداليا ويكون العنصر e عنصرا محايدا في النظام (٣ درجات)

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	e	e
b	b	e	e	e
c	c	e	e	e

ملاحظة: يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة.