جامعة الملك سعود كلية العلوم قسم الرياضيات	الاختبار النهائي مقرر ١٣١ ريض المدة: ٣ ساعات	الفصل الدراسي الثاني الأحد ١١-١١-١٤٤٥هـ يمنع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال الأول: بافتراض أن Ω هي المجموعة الشاملة؛ فأكمل الفراغ باستخدام **رمز واحد** يكون الأنسب من الرموز الآتية:

$$\in, \exists, \subseteq, \emptyset, \Omega, \leq, \Longrightarrow, \Longleftarrow, \forall, \equiv, =, \cup, \cap \ :$$

(٥ درجات: كل فقرة نصف درجة)

١- $\sim(E \to F)$ ... ... $E \wedge \sim$F

٢- لتكن $A=\{1,2\}$، فإن $p(A)$ ... ... $\{1\},\{2\}$

٣- إذا كان f تطبيقا من A إلى B؛ فإن: $f^{-1}(B)$ ... ... A

٤- $x \in A$ ... ... $B \Longrightarrow$ x $\in A$

٥- (يوجد x في A)، تكتب بالترميز الرياضي: $x \in A$ ... ...

٦- يقال أن المجموعتين A وB منفصلتان إذا كان $A \cap B =$ ⋯⋯

٧- لتكن H زمرة جزئية من G؛ فإنها تكتب رياضيا بالشكل G ... H.

٨- إذا كان لدينا تطبيق $f: C \to D$ وكانت المجموعتان غير الخاليتين A وB محتواتين في C فإن:

$$f(A \cup B) = f(A) \text{ ... ... } f(B)$$

٩- $\emptyset' =$ ⋯⋯

١٠- لتكن f علاقة من مجموعة غير خالية A إلى مجموعة غير خالية B بحيث مجموعة تعريف f هي نفسها A؛ فحتى تكون f تطبيقا فلابد أن يتحقق الشرط التالي في f: إذا كان x وy في A بحيث:

$$x = y \text{ ... ... } f(x) = f(y)$$

السؤال الثاني: إذا كانت G هي الزمرة $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ وكان A وB زمرتين جزئيتين منها بحيث |A|=2 و|B|=3 و$|A \cap B| = 1$؛ فأوجد ما يلي:

(٥ درجات: كل فقرة نصف درجة)

١- $A \cap B =$ ⋯.

٢- $|A \cup B| =$ ⋯.

٣- $|A \times B| = \cdots$.

٤- $|A - B| = \cdots$.

٥- $|A \Delta B| = \cdots$.

٦- $|p(\mathbb{Z}_6)| = \cdots$.

٧- ليكن لدينا المجموعة C، إذا كانت $C \approx A$ فإن $|C| = \cdots$.

٨- إذا كانت $D \approx B$ بحيث $|D \cup B| = 5$ فإن $|D \cap B| = \cdots$.

٩- إذا كان f تشاكلا متباينا من A إلى B فإن $|f(A)| = \cdots$.

١٠- إذا كان f تشاكلا من B إلى A فإن $|f^{-1}(A)| = \cdots$.

السؤال الثالث: أجب عن ما يأتي (١٢ درجة: كل فقرة درجتان):

١- متى نقول عن مجموعتين إنهما متكافئتان؟

٢- متى نقول إن $*$ عملية ثنائية على مجموعة S؟

٣- هل تشكل المجموعة $P = \{\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-\}$، تجزئة لمجموعة الأعداد الصحيحة؟ ولماذا؟

٤- متى نقول عن النظام $(G,\star)$ أنه زمرة؟

٥- متى نقول عن النظام $(R,+,\cdot)$ أنه حلقة؟.

٦- هات مثالا على زمرة إبدالية، ومثالا آخر على حلقة إبدالية بمحايد (فيها عنصر الوحدة).

السؤال الرابع: إذا كان لدينا النظام ذو العمليتين $(\mathbb{Z}_9, \oplus, \odot)$، حيث $\mathbb{Z}_9 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$، وعرفنا العمليتين $x \oplus y$ و$x \odot y$ في $\mathbb{Z}_9$ بأنه باقي قسمة جمع وضرب العددين x وy في $\mathbb{Z}$ على العدد 9 (على التوالي)؛ فأجب عما يلي:

١- بالنسبة للعملية $\oplus$، فاحسب ما يلي: $7 \oplus 3$، 3^2، 4^{-1}. (درجة ونصف)

٢- بالنسبة للعملية $\odot$، فاحسب ما يلي: $7 \odot 3$، 3^2، 4^{-1}. (درجة ونصف)

٣- أثبت أن التطبيق f من النظام $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ إلى نفسه والمعرف بالشكل $f(x)=0$ لكل x في $\mathbb{Z}$ يشكل تشاكلا داخليا وأوجد نواته بالنسبة لعملية الجمع. (ثلاث درجات)

السؤال الخامس: أجب عن ما يلي (١٢ درجة: كل فقرة ثلاث درجات):

(أ) لتكن المجموعة $P = \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-\}$، تجزئة للمجموعة $\mathbb{R}^*$، أوجد علاقة التكافؤ على $\mathbb{R}^*$ الناشئة عن هذه التجزئة. ثم أوجد $\bar{1}$.

(ب) لتكن H_1 وH_2 زمرتين جزئيتين من الزمرة G. أثبت أن تقاطعهما زمرة جزئية من G.

(ج) أثبت أن الفترة المفتوحة (0,1) غير قابلة للعد.

(د) إذا كان f تشاكلا متباينا من الزمرة (G,∗) إلى الزمرة (H,∘)، فأثبت أن $ker f = \{e\}$ حيث e هو محايد الزمرة G.

الحل

السؤال الأول: بافتراض أن Ω هي المجموعة الشاملة؛ فأكمل الفراغ باستخدام **رمز واحد** يكون الأنسب من الرموز الآتية:

$$\in, \exists, \subseteq, \emptyset, \Omega, \leq, \Longrightarrow, \Longleftarrow, \forall, \equiv, =, \cup, \cap$$:

(٥ درجات: كل فقرة نصف درجة)

١- $\sim(E \to F) \equiv \; E \wedge \sim F$

٢- لتكن $A=\{1,2\}$، فإن $\{1\},\{2\} \in p(A)$

٣- إذا كان f تطبيقا من A إلى B؛ فإن: $A = f^{-1}(B)$

٤- $x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A$

٥- (يوجد x في A)، تكتب بالترميز الرياضي: $\exists\, x \in A$

٦- يقال أن المجموعتين A وB منفصلتان إذا كان $A \cap B = \emptyset$

٧- لتكن H زمرة جزئية من G؛ فإنها تكتب رياضيا بالشكل $H \leq G$.

٨- إذا كان لدينا تطبيق $f: C \to D$ وكانت المجموعتان غير الخاليتين A وB محتواتين في C فإن:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

٩- $\emptyset' = \Omega$

١٠- لتكن f علاقة من مجموعة غير خالية A إلى مجموعة غير خالية B بحيث مجموعة تعريف f هي نفسها A؛ فحتى تكون f تطبيقا فلابد أن يتحقق الشرط التالي في f: إذا كان x وy في A بحيث:

$$x = y \Longrightarrow f(x) = f(y)$$

السؤال الثاني: إذا كانت G هي الزمرة $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ وكان A وB زمرتين جزئيتين منها بحيث |A|=2 و|B|=3 و$|A \cap B| = 1$؛ فأوجد ما يلي:

(٥ درجات: كل فقرة نصف درجة)

١- $A \cap B = \{0\}$.

٢- $|A \cup B| = 4$.

٣- $|A \times B| = 6$.

٤- $|A - B| = 1$.

٥- $|A \Delta B| = 3$.

٦- $|p(\mathbb{Z}_6)| = 2^6$.

٧- ليكن لدينا المجموعة C، إذا كانت $C \approx A$ فإن $|C| = 2$.

٨- إذا كانت $B \approx D$ بحيث $|D \cup B| = 5$ فإن $|D \cap B| = 1$.

٩- إذا كان f تشاكلا متباينا من A إلى B فإن $|f(A)| = 2$.

١٠- إذا كان f تشاكلا من B إلى A فإن $|f^{-1}(A)| = 3$.

السؤال الثالث: أجب عن ما يأتي (١٢ درجة: كل فقرة درجتان):

١- متى نقول عن مجموعتين إنهما متكافئتان؟

إذا وجد تطبيق تقابل من إحداهما إلى الأخرى.

٢- متى نقول إن $*$ عملية ثنائية على مجموعة S؟

إذا كانت $*$ تطبيقا من $S \times S$ إلى مجموعة جزئية من S.

٣- هل تشكل المجموعة $P = \{\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-\}$، تجزئة لمجموعة الأعداد الصحيحة؟ ولماذا؟

لا، لأن اتحادها لا يساوي مجموعة الأعداد الصحيحة حيث يتبقى العدد صفر فهو لم يذكر هنا.

٤- متى نقول عن النظام $(G,\star)$ أنه زمرة؟

إذا كان مغلقا ودامجا وبه عنصر محايد ولكل عنصر فيه يوجد نظير له.

٥- متى نقول عن النظام $(R,+,\cdot)$ أنه حلقة؟

إذا كان النظام $(R,+)$ زمرة إبدالية، والنظام $(R, \cdot)$ شبه زمرة، وكانت عملية الضرب تتوزع على الجمع من اليمين واليسار.

٦- هات مثالا على زمرة إبدالية، ومثالا آخر على حلقة إبدالية بمحايد (فيها عنصر الوحدة).

الزمرة الإبدالية هي:

$$(\mathbb{Z}, +)$$

الحلقة الإبدلية بمحايد هي

$$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$$

السؤال الرابع: إذا كان لدينا النظام ذو العمليتين $(\mathbb{Z}_9, \oplus, \odot)$، حيث $\mathbb{Z}_9 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$، وعرفنا العمليتين $x \oplus y$ و $x \odot y$ في $\mathbb{Z}_9$ بأنه باقي قسمة جمع وضرب العددين x و y في $\mathbb{Z}$ على العدد 9 (على التوالي)؛ فأجب عما يلي:

١- بالنسبة للعملية $\oplus$، فاحسب ما يلي: $7 \oplus 3$، 3^2، 4^{-1}. (درجة ونصف)

$7 \oplus 3 = 1$، $3^2 = 3 \oplus 3 = 6$، $4^{-1} = 5$.

٢- بالنسبة للعملية $\odot$، فاحسب ما يلي: $7 \odot 3$، 3^2، 4^{-1}. (درجة ونصف)

$7 \odot 3 = 3$، $3^2 = 3 \odot 3 = 0$، $4^{-1} = 7$.

٣- أثبت أن التطبيق f من النظام $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ إلى نفسه والمعرف بالشكل $f(x)=0$ لكل x في $\mathbb{Z}$ يشكل تشاكلا داخليا وأوجد نواته بالنسبة لعملية الجمع. (ثلاث درجات)

داخلي لأنه من النظام إلى نفسه. أما لإثبات أنه تشكل فإنه لكل x و y في $\mathbb{Z}$ فإن:

$$f(x+y) = 0 = 0 + 0 = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = 0 = 00 = f(x)f(y)$$

ولحساب النواة نقول:

$$\ker(f) = \{x \in \mathbb{Z} | f(x) = 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

السؤال الخامس: أجب عن ما يلي (١٢ درجة: كل فقرة ثلاث درجات):

(أ) لتكن المجموعة $P = \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-\}$، تجزئة للمجموعة $\mathbb{R}^*$، أوجد علاقة التكافؤ على $\mathbb{R}^*$ الناشئة عن هذه التجزئة. ثم أوجد $\bar{1}$.

حسب النظرية فإن علاقة التكافؤ التي نريدها هي بالشكل الآتي:

$$R = \{(a,b) | (a,b) \in A \times A \wedge A \in P\}$$

$$=(\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{+})\cup(\mathbb{R}^{-}\times\mathbb{R}^{-})$$

$$\bar{1}=\left\{x\in\mathbb{R}^{*}\middle|xR1\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}^{*}\middle|x\in\mathbb{R}^{+}\right\}=\mathbb{R}^{+}$$

(ب)لتكن H_1 وH_2 زمرتين جزئيتين من الزمرة G. أثبت أن تقاطعهما زمرة جزئية من G.

بداية، تقاطعهما غير خال لاحتواء كل منهما على محايد الزمرة G. الآن لنفرض أن العنصرين x وy يقعان في التقاطع. إذن يقع هذان العنصران في كل من الزمرتين الجزئيتين. ولكن من خصائص الزمر أنها إذا احتوت على عنصر فإنها تحوي نظيره. إذن x وy^{-1} يقعان في كل من الزمرتين الجزئيتين. ولكن من خصائص الزمر الإغلاق بالنسبة للعملية المعرفة عليها. إذن حاصل الضرب xy^{-1} يقع أيضا في كل من الزمرتين وبالتالي يقع في تقاطعهما. إذن تقاطعهما زمرة جزئية من G.

(ج) أثبت أن الفترة المفتوحة (0,1) غير قابلة للعد.

لنفرض أنها قابلة للعد. ولنفرض أن لدينا تطبيق التقابل $f:\mathbb{N}\to(0,1)$ بحيث أن:

$$f(1)=0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$
$$f(2)=0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$
$$f(3)=0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$$
$$\vdots$$

حيث $a_{ij}\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ لكل عددين طبيعيين i وj. الآن خذ العدد

$$y=0.b_1b_1b_1\cdots$$

حيث

$$b_i=1 \qquad \text{إذا كان } a_{ii}\neq 1$$
$$b_i=2 \qquad \text{إذا كان } a_{ii}=1$$

لكل عدد طبيعي i. إذن $y\in(0,1)$. ولأن $b_i\neq a_{ii}$ لكل i؛ فإن العدد y ليس صورة لأي عدد طبيعي. وهذا تناقض مع كون f تقابلا. إذن لا يمكن إيجاد تقابل بين مجموعة الأعداد الطبيعية والفترة (0,1). إذن الفترة المفتوحة (0,1) غير قابلة للعد.

(د) إذا كان f تشاكلا متباينا من الزمرة (G,∗) إلى الزمرة (H,∘)، فأثبت أن $kerf=\{e\}$ حيث e هو محايد الزمرة G.

لنفرض أن التشاكل f متباين، ولنفرض أن $x\in kerf$. بالاستفادة من إحدى النظريات فإننا نعلم أن $f(e)=e'$ حيث e' هو محايد الزمرة H. ولكن حسب تعريف النواة نجد أن:

$$f(x)=e'=f(e)$$

لكن f متباين؛ إذن $x=e$ و$kerf=\{e\}$.