السؤال الأول (2+1+2)

أ) عرف الزمرة الدورية ثم اثبت ان كل زمره دوريه تكون ابداليه.

ب) أثبت أن أي زمرة منتهية من الرتبة p حيث أن p عدد أولي هي زمرة إبداليه.

ت) لتكن G زمرة، $S = \{aba^{-1}b^{-1} : a, b \in G\}$. يعرف المبدل للمجموعة G كالتالي: $C = span\ (S)$. أثبت أن G/C زمرة إبداليه.

السؤال الثاني (2+2)

أ) اذا كانت G زمرة وكانت $H \leq G$ وكان $x \in G$ فاثبت ان $xHx^{-1} \leq G$

ب) اذا كانت G زمرة وكانت $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$ فاثبت انه : اذا كان $HK \leq G$ فإن $HK \trianglelefteq G$.

السؤال الثالث (1+1+1+2)

أ) اكتب نص (مبرهنة كايلي).

ب) عرف زمرة سيلو الجزئية -p *(Sylow p-Subgroup)* .

ت) أعط مثال لزمرة G تحوي على زمرة سيلو جزئية -3.*(Sylow 3-Subgroup.)*

ث) أوجد جميع زمر سيلو الجزئية -p من S_3.

السؤال الرابع (1+1+2)

أ) عرف مركز الزمرة $Z(G)$ لاي زمره G .

ب) أثبت أن $G \trianglelefteq Z(G)$.

ت) اذا كانت G زمره غير ابداليه بحيث ان $|G| = pq$ حيث أن p, q عددين اوليين، فاثبت ان مركز الزمرة هو المركز التافه.

السؤال الخامس (1+2+3)

أ) عرف التشاكل بين زمرتين.

ب) اثبت ان أي تشاكل زمر $\varphi : G \to G'$ بحيث ان $|G|$ اولي اما ان يكون تشاكلا تافها او داله احاديه.

ت) لتكن $\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z}_p\}$ $G = GL(2,\mathbb{Z}_p) =$ وليكن $\varphi : G \to \mathbb{Z}_p^*$ تطبيقا بحيث $\varphi(A) = \det(A)$.

1) اثبت ان φ تشاكل.
2) اوجد $\ker(\varphi)$ ثم استنتج اذا كان φ احاديا ام لا.
3) اذا كانت $p = 3$ وكانت $N = \{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\} \in G$ فأوجد $|< N >|$.

السؤال السادس (1+3+3)

أ) متى نقول عن زمره G انها بسيطة.

ب) اذكر نص كلا من النظريات الاتيه:

1) مبرهنة كوشي.

2) مبرهنة سيلو الأولى.

3) مبرهنة سيلو الثالثة.

ت) برهن بالتفصيل انه لا توجد زمره بسيطة رتبتها 56.

السؤال السابع (12 درجات)

اثبت صحة او خطا كل من ما يلي

1) اذا كانت G زمره وكان $H \leq G$ بحيث ان $(G : H) = 2$ فان $H \trianglelefteq G$. ( )

2) اذا كانت $(4, 8, 10) \in Z_{12} \times Z_{60} \times Z_{24}$ فان $|(4, 8, 10)| = 60$. ( )

3) اذا كانت G زمره بحيث ان $|G| = p^r$, $r \in Z^+$, p عدد اولي , فان G زمره غير بسيطة.( )

4) إذا كانت G زمرة بحيث أن $|G| = n$ ، فإنه لأي عدد m يقسم n يوجد زمرة جزئية $H \leq G$ رتبتها $|H| = m$. ( )

5) $Z_3 \times Z_5 \times Z_7 \cong Z_{105}$ ( )

6) اذا كان $\varphi : G \to G'$ تشاكلا وكانت $H \trianglelefteq G$ فان ان $\varphi(H) \trianglelefteq G'$ ( )