1- إذا كان $z^2 = x^2 + y^2$, أثبتي أن $60|xyz$.

أولا :

من الواضح أنه يكفي إثبات أن $12 | xy$ حيث x , y , z ثلاثي فيثاغورس بدائي. باستخدام مبرهنة (٤،١) لدينا:

$$x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$
$$z = m^2 + n^2$$

حيث $m > n > 0$ و $(m,n) = 1$ و $m \not\equiv n \pmod 2$.

بما أن $m \not\equiv n \pmod 2$ فإن m زوجي أو n زوجي. أي أن $4 | y$.

إذا كان $3 | y$ فإن $3 | xy$. ولكون $(3,4) = 1$ نجد أن $12 | xy$.

لنفرض إذن أن $3 \nmid y$. عندئذ، $3 \nmid m$ و $3 \nmid n$. ونرى أن $m^2 \equiv 1 \pmod 3$ و $n^2 \equiv 1 \pmod 3$. أي أن $m^2 - n^2 \equiv 0 \pmod 3$. وبهذا يكون $3 | (m^2 - n^2)$. أي أن $3 | x$. إذن، $3 | xy$. ويكون $12 | xy$ في هذه الحالة أيضاً □

ثانيا $5|xyz$

من نظرية فيرما الصغرى $m^4 \equiv 1 \pmod 5$ و $n^4 \equiv 1 \pmod 5$ كما أن

$xyz = 2mn(m^4 - n^4) \equiv 0 \pmod 5$

2- أوجدي جميع الأعداد x التي تحقق $\varphi(x) = 6$.

لنفرض $x = p_1^{\alpha_1} \dots . p_n^{\alpha_n}$ و بالتالي $\varphi(x) = p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_1^{\alpha_n - 1}(p_1 - 1) \dots (p_n - 1) = 6$ يعني

$p_i - 1 \leq 6 \to p_i \leq 7 \to p_i \in \{2,3,5,7\}$

اذاكان $p_i = 5$ فان $p_i - 1 = 4$ و لكن $6 \nmid 4$ و بالتالي $p_i \in \{2,3,7\}$ ← $x = 2^a 3^b 7^c$

-1 اذا فرضنا $a, b, c > 0$ فان $\varphi(x) = 2^{a-1} 3^{b-1} 7^{c-1}(2)(6) = 6$ اي ان $2^a 3^{b-1} 7^{c-1} = 1$

اذا $a = 0,$ حل مرفوض

-2 اذا فرضنا $a, b > 0 , c = 0$ فان $x = 2^a 3^b$ و $6 = \varphi(x) = 2^{a-1} 3^{b-1}(2) = 2^a 3^{b-1}$

اذا $a = 1, b = 2$ ← $x = 18$

-3 اذا فرضنا $a, c > 0 , b = 0$ فان $x = 2^a 7^c$ و $6 = \varphi(x) = 2^{a-1} 7^{c-1}(6)$ ← $a = c = 1$

اذا $x = 14$

-4 اذا فرضنا $b, c > 0 , a = 0$ فان $x = 3^b 7^c$ و $6 = \varphi(x) = 3^{b-1} 7^{c-1}(2)(6)$ ← $2k = 1$

و هذا غير ممكن.

-5 اذا فرضنا $a > 0, b = c = 0$ ← $x = 2^a$ ← $\varphi(x) = 2^{a-1} = 6$ و هذا غير ممكن أيضا.

-6 اذا فرضنا $b > 0, a = c = 0$ ← $x = 3^b$ ← $\varphi(x) = 2\,3^{b-1} = 6$ ← $3^{b-1} = 3$ ← $b = 2$ ← $x = 9$

-7 اذا فرضنا $c > 0, a = b = 0$ ← $x = 7^c$ ← $\varphi(x) = 7^{c-1}(6) = 6$ ← $c = 1$ ← $x = 7$

3- برهني وجود ما لانهاية من الأعداد الأولية p التي تحقق $p \equiv 1 \pmod 4$.

الكتاب مبرهنة 3-37

البرهان

لنفرض أن $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ هي جميع الأعداد الأولية التي على الصورة $4k+1$. وليكن $M = (2p_1p_2 \dots p_n)^2 + 1$. بما أن $M > 1$ فإنه يوجد عدد أولي p بحيث $p \mid M$. ونرى أن $M = (2p_1p_2 \dots p_n)^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$. لهذا يكون $(2p_1p_2 \dots p_n)^2$ حل للتطابق $x^2 \equiv -1 \pmod p$. وباستخدام المبرهنة (٣،٣٦) نجد أن $p = 4k+1$. أي أن $p = p_i$ حيث $1 \le i \le n$. ولذا فإن $p \mid (2p_1p_2 \dots p_n)^2$. وبما أن $p \mid M$ فإن $p \mid 1$ وهذا مستحيل. إذن، عدد الأعداد الأولية التي على الصورة $4k+1$ غير منته ◆

4- أثبتي أن $\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d}$

نعلم ان $\sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \frac{n}{d}$ و من تعريف دالة $\sigma(n)$ و هي مجموع قواسم n , فان

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} \frac{n}{d} \rightarrow n \sum_{d|n} \frac{1}{d} = \sigma(n) \rightarrow \sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}$$

<u>حل اخر</u>

دالة $\sigma(n)$ دالة ضربية وكذلك الدالة $\frac{\sigma(n)}{n}$ و بالتالي اذا كان $\sum_{d|n} f(d) = \frac{\sigma(n)}{n}$ فان الدالة $f(d)$ ايضا دالة ضربية

$$n = 1 \rightarrow \frac{\sigma(1)}{1} = 1 = f(1), n = 2 \rightarrow \frac{\sigma(2)}{2} = \frac{3}{2} = f(1) + f(2) = 1 + \frac{1}{2} \rightarrow f(2) = \frac{1}{2}$$

$$n = 4 \rightarrow \frac{\sigma(4)}{4} = \frac{7}{4} = f(1) + f(2) + f(4) = 1 + \frac{1}{2} + f(4) \rightarrow f(4) = \frac{1}{4}$$

و بالاستقراء الرياضي نستنتج $f(n) = \frac{1}{n}$

5- ليكن $r_1, r_2, \dots, r_n$ نظام رواسب تام قياس n. أثبتي أن

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \equiv \frac{(n-1)(n)}{2} \pmod n$$

أي نظام رواسب تام قياس n $r_1, r_2, \dots, r_n$ يطابق $0, 1, 2, \dots, n-1$ و بالتالي

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \equiv \sum_{k=0}^{n-1} k \equiv \frac{(n-1)(n)}{2} \pmod n$$

6- أثبتي أن الأعداد $3, 5, 7$ تكون الثلاثي الوحيد من الأوليات بحيث يكون الفرق بين العدد و سابقه هو 2.

اذا كان $p = 2$ فسنحصل على الثلاثي $2, 4, 6$ و هو ليس ثلاثي أوليات

اذا كان $p = 3$ فسنحصل على ثلاثي الأوليات $3, 5, 7$

و اذا كان $p = 3$ فسنحصل على $3,5,7$

لأي عدد اولي فردي $p > 3$ فان $p = 3k + 2$ أو $p = 3k + 1$

اذا كان $p = 3k + 1$ [أو $p \equiv 1 \pmod 3$] فان $p + 2 = 3k + 3$ و هو ليس عدد أولي

و اذا كان $p = 3k + 2$ فان $p + 4 = 3k + 6$ و هو ليس عدد أولي.

7- أوجدي جميع الأوليات p بحيث يكون العدد $p^2 + 2$ أوليا مع التبرير.

اذا كان $p = 2$ فان $p^2 + 2 = 6$ و هذا ليس عددا أوليا

اذا كان $p = 3$ فان $p^2 + 2 = 11$ و هذا عدد أولي

لأي عدد اولي فردي $p > 3$, اما $p \equiv 1 \pmod 3$ و بالتالي $p^2 + 2 = 3 \equiv 0 \pmod 3$ و بالتالي ليس عددا أوليا

أو اما $p \equiv 2 \pmod 3$ و بالتالي $p^2 + 2 = 6 \equiv 0 \pmod 3$ و بالتالي ليس عددا أوليا

8- استعيني بخوارزمية اقليدس لحساب $[360,525]$.

$$525 = 360(1) + 165$$
$$360 = 165(2) + 30$$
$$165 = 30(5) + 15$$
$$30 = 15(2) + 0$$
$$(525,360) = 15 \rightarrow [525,360] = 12600$$