جامعة الملك سعود / كلية العلوم / قسم الرياضيات — الزمن: ثلاث ساعات

الاختبار النهائي

السنة: 1445 هـ — الفصل الثاني — المقرر: 431 ريض

ملحوظة: كل الرسوم المقدمة والمطلوبة، هي رسوم بسيطة

السؤال الأول: (11 درجة)

ليكن $G=(V,E)$ رسما و $\overline{G}$ متممه ولكل رأسين $u,\ v\in V$، نرمز للمسافة في الرسم G بين u و v بالرمز $d_G(u,v)$.

(١). إذا كان G رسما غير مترابط فأثبت أن لكل رأسين $u,\ v\in V$، $d_{\overline{G}}(u,v)\leq 2$. واستنتج أن $\overline{G}$ رسم مترابط.

(٢). جد جميع الأشجار T بحيث تكون $\overline{T}$ شجرة أيضا.

(٣). أثبت أن المتتالية $(7,6,5,4,4,3,2,1)$ رسمية وجد تجسيدان لها ليسا متماثلان.

(٤). أثبت العبارات التالية:

ا. إذا كان G رسما مستويا مترابطا عدد رؤوسه ν وعدد أضلاعه $e\geq 3$، فإن $e\leq 3\nu-6$.

ب. استنتج أن K_5 رسم غير مستو.

ج. إذا كان G رسما مترابطا مستويا فإنه يوجد في G رأس x بحيث $deg(x)\leq 5$.

د. إذا كان G رسما مستويا فإن $\chi(G)\leq 5$.

السؤال الثاني: (7 درجات)

(١). ليكن $G=(V,E)$ رسماً، أثبت أن: $\chi(G)=2$ إذا وفقط إذا كان G رسماً ثنائي التجزئة.

(٢). ليكن $C_p=(V,E)$ دورة، أثبت أن: p عدد صحيح فردي إذا وفقط إذا كان $\chi(C_p)=3$

(٣). ليكن $G=(V=X\cup Y,E)$ رسما مترابطا و ثنائي التجزئة ، حيث $X=\{x_1,...,x_n\}$ و $Y=\{y_1,...,y_m\}$ و $p=n+m$. وليكن $a\neq b\in V$ و $ab\notin E$، نعتبر الرسم $H=(V,E\cup\{ab\})=G+ab$.

ا. أثبت أن: $\chi(H)\in\{2,3\}$.

ب. أثبت أن: ($a\neq b\in X$ أو $a\neq b\in Y$) إذا وفقط إذا كان $\chi(H)=3$

ج. هل أن العبارة في السؤال السابق (٣). ب. صحيحة إذا كان $G=(V=X\cup Y,E)$ رسما ثنائي التجزئة و غير مترابطا؟ أثبت إجابتك.

السؤال الثالث: (11 درجة)

(١). جد معامل $x^2y^5z^4$ في مفكوك $(x+y+z)^{11}$ وجد عدد حدوده.

(٢). ليكن n و k، عددان صحيحان ، حيث $1\leq k\leq (n-1)$.

ا. أثبت أن: $\binom{n}{k}=\frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$.

ب. استنتج أن القيمة $\binom{2n}{n}$ هو عدد زوجي

(٣). جد عدد تبادل حروف الكلمة $NONHOMOGENEOUS$ في كل من الحالات التالية:

ا. O لا يجاور O.

ب. لا يظهر O على يسار N.

ج. تكون الأحرف M,H,G متجاورة.

(٤). جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة في الحالات التالية:

ا. $x_1+x_2+x_3+x_4=17$ إذا كان $x_1\geq -3,\ x_2>2,\ x_3\geq 2,\ x_4\geq 1$.

ب. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=27$ إذا كان $x_1+x_2=13$ و $x_k\geq 0$ لكل $1\leq k\leq 5$.

ج. $x_1+x_2+x_3=15$ إذا كان $0\leq x_1\leq 5,\ 0\leq x_2\leq 6,\ 0\leq x_3\leq 9$.

السؤال الرابع: (11 درجة)

(١). **جد عدد الأعداد الصحيحة** n، $1 \le n \le 2000$، **بحيث** $2 \nmid n, 3 \nmid n, 5 \nmid n$.

(٢). **بإستخدام الدوال المولدة، جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة** $X_1 + X_2 + X_3 = 14$ **بحيث** $0 \le X_3 \le 3,\ 0 \le X_2 \le 6, 1 \le X_1 \le 9$.

(٣). **أوجد معامل** x^9 **في مفكوك** $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4$.

(٤). **جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة** $X_1 + 2X_2 + 5X_3 = 20$ **بحيث** $X_i \ge 0$ **لكل** $i \in \{1, 2, 3\}$.

(٥). **أوجد صيغة مختصرة للدالة المولدة للمتتالية** (n^2).