111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1445 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

الجزء الأول (7 درجات):

(1) جد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = (x-1)^2$ على الفترة $[1,4]$. [3]

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = (x-1)^2$ و $[a,b] = [1,4]$

$$(4-1)\,(c-1)^2 = \int_1^4 (x-1)^2\,dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^4$$

$$3(c-1)^2 = \frac{(4-1)^3}{3} - \frac{(1-1)^3}{3} = \frac{3^3}{3} - 0 = 9$$

$$(c-1)^2 = 3 \implies c-1 = \pm\sqrt{3} \implies c = 1 \pm \sqrt{3}$$

لاحظ أن $c = 1+\sqrt{3} \in (1,4)$ بينما $c = 1-\sqrt{3} \notin (1,4)$

قيمة c المطلوبة هي $1+\sqrt{3}$.

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x) = \int_{\ln|x|}^{e^x} \sqrt{t^2+5}\,dt$. [2]

الحل : $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\ln|x|}^{e^x} \sqrt{t^2+5}\,dt$

$$F'(x) = \sqrt{(e^x)^2+5}\;(e^x) - \sqrt{(\ln|x|)^2+5}\;\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= e^x\,\sqrt{e^{2x}+5} - \frac{\sqrt{\ln^2|x|+5}}{x}$$

(3) جد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = \sinh^{-1}(3^x) + \ln|\tanh(4x)|$. [2]

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(3^x)^2}}\;(3^x\ln 3) + \frac{sech^2(4x)\,(4)}{\tanh(4x)}$$

$$= \frac{3^x \ln 3}{\sqrt{1+3^{2x}}} + \frac{4\, sech^2(4x)}{\tanh(4x)}$$

الجزء الثاني (14 درجة) : أحسب التكاملات التالية :

(1) $\int \frac{2}{\sqrt{-x^2-6x}}\, dx$. [3]

الحل : باستخدام الإكمال إلى مربع كامل

$$\int \frac{2}{\sqrt{-x^2-6x}}\, dx = \int \frac{2}{\sqrt{-(x^2+6x+9)+9}}\, dx$$

$$= 2\int \frac{1}{\sqrt{9-(x^2+6x+9)}}\, dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{(3)^2-(x+3)^2}}\, dx = \ 2\ \sin^{-1}\left(\frac{x+3}{3}\right) + c$$

باستخدام القانون $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\, dx = \sin^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$ حيث $a > 0$

(2) $\int x^2\ \cosh x\, dx$. [3]

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = \cosh x\, dx \\ du = 2x\, dx & v = \sinh x \end{array}$$

$$\int x^2\ \cosh x\, dx = x^2\ \sinh x - \int 2x\ \sinh x\, dx$$

باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ مرة أخرى

$$\begin{array}{ll} u = 2x & dv = \sinh x\, dx \\ du = 2\, dx & v = \cosh x \end{array}$$

$$\int x^2\ \cosh x\, dx = x^2\ \sinh x - \left[2x\ \cosh x - \int 2\cosh x\, dx\right]$$

$$= x^2\ \sinh x - 2x\ \cosh x + 2\int \cosh x\, dx$$

$$= x^2\ \sinh x - 2x\ \cosh x + 2\sinh x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx \quad (3)$$ [3] .

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

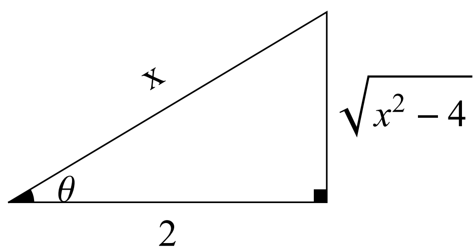
ضع $\cos\theta = \frac{2}{x} \implies \sec\theta = \frac{x}{2} \implies x = 2\sec\theta$

$$dx = 2\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta$$

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4\sec^2\theta - 4} = \sqrt{4\left(\sec^2\theta - 1\right)} = \sqrt{4\tan^2\theta} = 2\tan\theta$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{2\sec\theta\,\tan\theta}{(2\sec\theta)^2\,2\tan\theta}\,d\theta = \int \frac{\sec\theta}{4\sec^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\,\sin\theta + c$$



من المثلث نجد أن : $\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + c$$

$$\int \frac{4x^2-x+12}{x^3+4x}\,dx \quad (4)$$ [3] .

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{4x^2-x+12}{x^3+4x} = \frac{4x^2-x+12}{x\left(x^2+4\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\frac{4x^2-x+12}{x\left(x^2+4\right)} = \frac{A\left(x^2+4\right)}{x\left(x^2+4\right)} + \frac{(Bx+C)\,x}{\left(x^2+4\right)x}$$

$$4x^2-x+12 = A(x^2+4) + (Bx+C)x$$

$$4x^2-x+12 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$$

$$4x^2-x+12 = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lcl} A+B=4 & \longrightarrow & (1) \\ C=-1 & \longrightarrow & (2) \\ 4A=12 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (2) نجد أن : $C=-1$

من المعادلة (3) نجد أن : $A=3$

من المعادلة (1) نجد أن : $B=1 \quad 3+B=4 \implies$

$$\int \frac{4x^2-x+12}{x^3+4x}\,dx = \int \left(\frac{3}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}\right)\,dx$$

$$= 3\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{(x)^2+(2)^2}\,dx$$

$$= 3\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$. [2]

الحل : $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}\,dx$

باستخدام التعويض $x=u^6$ ، أي أن $u=x^{\frac{1}{6}}$

$$dx = 6u^5\,du$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{6u^5}{(u^6)^{\frac{1}{2}}+(u^6)^{\frac{1}{3}}}\,du = \int \frac{6u^5}{u^3+u^2}\,du$$

$$= \int \frac{6u^5}{u^2(1+u)}\,du = 6\int \frac{u^3}{u+1}\,du$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$6\int \frac{u^3}{u+1}\,du = 6\int \left(u^2-u+1+\frac{-1}{u+1}\right)\,du$$

$$= 6\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u-\ln|u+1|\right)+c = 2u^3-3u^2+6u-6\ln|u-1|+c$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}} = 2\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 - 3\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2 + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln|x^{\frac{1}{6}}-1| + c$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln|x^{\frac{1}{6}}-1| + c$$

الجزء الثالث (19 درجة) :

(1) احسب $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x}+5x}{e^{2x}+2x+1}$. [2]

الحل : $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x}+5x}{e^{2x}+2x+1}$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x}+5}{e^{2x}\,(2)+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x}+5}{2e^{2x}+2}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x}}{2e^{2x}\,(2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x}}{4e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4e^{x}} = 0$$

إذاً $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x}+5x}{e^{2x}+2x+1} = 0$

(2) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^{3}}\,dx$ متقارباً أم متباعداً . [2]

الحل :

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^{3}}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \frac{1}{(2x-1)^{3}}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}\int_{1}^{t} (2x-1)^{-3}(2)\,dx\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}\left[\frac{(2x-1)^{-2}}{-2}\right]_{1}^{t}\right) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2(2x-1)^{2}}\right]_{1}^{t}\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2(2t-1)^{2}} - \frac{1}{-2(2(1)-1)^{2}}\right]\right) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2(2t-1)^{2}} + \frac{1}{2}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[0+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

التكامل المعتل متقارب .

(3) أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y=-x^{2}$ و $y=x^{2}+1$ و $x=-1$ و $x=2$ ،
وجد مساحتها . [3]

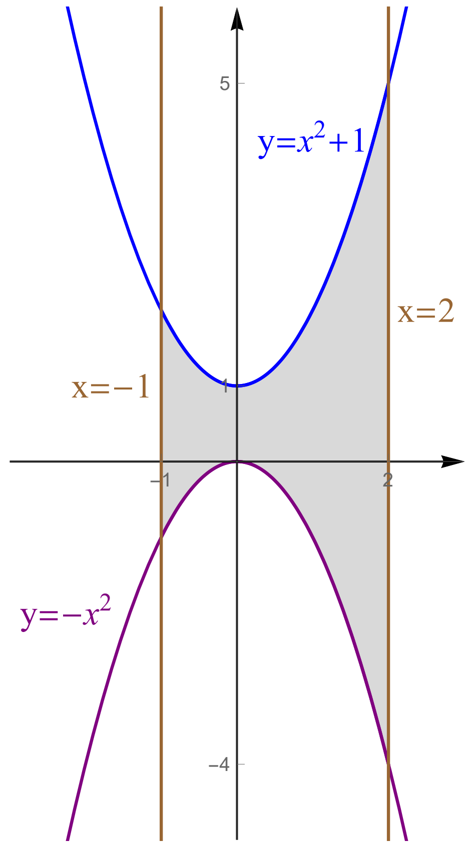
الحل :

المنحنى $y=x^{2}+1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,1)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y=-x^{2}$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأسفل .

المنحنى $x = -1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(-1,0)$.

المنحنى $x = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2,0)$.



$$\mathrm{A} = \int_{-1}^{2} \left[(x^2+1) - (-x^2)\right]\,dx = \int_{-1}^{2} (2x^2+1)\,dx = \left[2\,\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2}$$

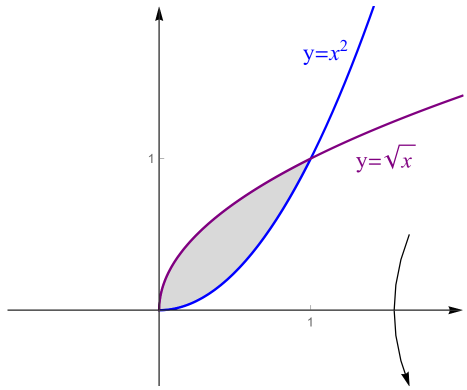
$$= \left(2\left(\frac{8}{3}\right) + 2\right) - \left(2\left(\frac{-1}{3}\right) - 1\right) = \frac{16}{3} + 2 + \frac{2}{3} + 1 = \frac{18}{3} + 3 = 6 + 3 = 9$$

(4) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ ، ثم جد حجم الجسم الناتج من دوران هذه المنطقة حول محور x . [3]

الحل :

$y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .

$y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي للقطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ وفتحته لليمين .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$:

$$x^2 = \sqrt{x} \implies x^4 = x \implies x^4 - x = 0 \implies x(x^3 - 1) = 0 \implies x = 0\,,\; x = 1$$

باستخدام طريقة الوردات :

$$\mathrm{V} = \pi \int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - (x^2)^2\right]\, dx = \pi \int_0^1 (x - x^4)]\, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{0}{5}\right)\right] = \pi \left(\frac{5}{10} - \frac{2}{10}\right) = \frac{3\pi}{10}$$

(5) جد طول المنحنى $y = 2 + \cosh x$ من $x = 0$ إلى $x = \ln 2$. [3]

الحل :

$$y' = 0 + \sinh x = \sinh x$$

$$\mathrm{L} = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + (\sinh x)^2}\, dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{\cosh^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} |\cosh x|\, dx = \int_0^{\ln 2} \cosh x\, dx = [\sinh x]_0^{\ln 2} = \sinh(\ln 2) - \sinh(0)$$

$$= \sinh(\ln 2) - 0 = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

(6) حول المعادلة القطبية $r = 8\cos\theta + 6\sin\theta$ إلى معادلة كارتيزية . [2]

الحل :

$$r = 8\cos\theta + 6\sin\theta \implies r^2 = 8(r\cos\theta) + 6(r\sin\theta) \implies x^2 + y^2 = 8x + 6y$$

$$\implies x^2 - 8x + y^2 - 6y = 0 \implies (x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) = 16 + 9$$

$$\implies (x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2$$

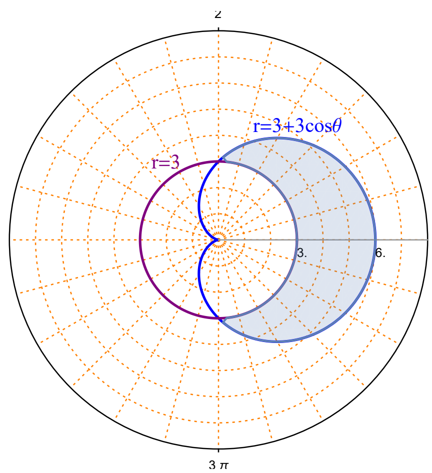
تمثل دائرة مركزها النقطة $(4,3)$ ونصف قطرها 5 .

(7) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 3 + 3\cos\theta$ وخارج المنحنى $r = 3$ وجد مساحتها. [3]

الحل :

المنحنى $r = 3 + 3\cos\theta$ يمثل منحنى قلبي رأسه إلى اليمين ومتناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 3$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 3 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 3 + 3\cos\theta$ مع المنحنى $r = 3$:

$$3 + 3\cos\theta = 3 \implies 3\cos\theta = 0 \implies \cos\theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2} \ , \ \theta = \frac{3\pi}{2}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(3+3\cos\theta)^2 - (3)^2\right] d\theta\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[9 + 18\cos\theta + 9\cos^2\theta - 9\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[18\cos\theta + 9\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(18\cos\theta + \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$

$$= \left[18\sin\theta + \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(18\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{9}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{9}{4}\sin(\pi)\right) - \left(18\sin(0) + \frac{9}{2}(0) + \frac{9}{4}\sin(0)\right)$$

$$= \left(18(1) + \frac{9\pi}{4} + \frac{9}{4}(0)\right) - \left(18(0) + 0 + \frac{9}{4}(0)\right) = 18 + \frac{9\pi}{4}$$