111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1437 - 1438 هـ
حل الاختبار الفصلي الأول
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (3 درجات) :

استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل $\int_1^2 (6x-5)\,dx$

الحل :

$$f(x) = 6x - 5 \,,\, [a,b] = [1,2]$$

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = 1 + k\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x = \sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[6\left(1+\frac{k}{n}\right)-5\right]\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{n}+\frac{6k}{n^2}-\frac{5}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6k}{n^2}+\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{6k}{n^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$$

$$= \frac{6}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{6}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n}\,(n) = 3\,\frac{n(n+1)}{n^2} + 1$$

$$\int_1^2 (6x-5)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(3\,\frac{n(n+1)}{n^2}+1\right) = 3(1)+1 = 4$$

السؤال الثاني (3 درجات) :

أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة $[-1,8]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $[a,b] = [-1,8]$

$$(8-(-1))\,\sqrt{c+1} = \int_{-1}^{8} \sqrt{x+1}\,dx = \int_{-1}^{8} (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$9\sqrt{c+1} = \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{8} = \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{8}$$

$$9\sqrt{c+1} = \frac{2}{3}\left[(8+1)^{\frac{3}{2}} - (-1+1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}\,[27-0] = 18$$

$$9\sqrt{c+1} = 18 \implies \sqrt{c+1} = 2 \implies c+1 = 4 \implies c = 3 \in (-1, 8)$$

السؤال الثالث (3 درجات) :

إذا كانت $F(x) = \int_{\cos x}^{1+\sin x} \sqrt{2+t}\,dt$ فأوجد $F'(0)$

الحل :

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{1+\sin x} \sqrt{2+t}\,dt$$

$$= \sqrt{2+(1+\sin x)}\,\cos x - \sqrt{2+\cos x}\,(-\sin x)$$

$$F'(x) = \cos x\sqrt{3+\sin x} + \sin x\sqrt{2+\cos x}$$

$$F'(0) = \cos(0)\,\sqrt{3+\sin(0)} + \sin(0)\,\sqrt{2+\cos(0)}$$

$$F'(0) = (1)\,\sqrt{3+0} + (0)\,\sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

السؤال الرابع (6 درجات) : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$y = \sqrt{x}\,\ln(\cos x)$ (1)

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\ln(\cos x) + \sqrt{x}\,\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\ln(\cos x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\,\tan x$$

$y = 5^{\ln x}$ (2)

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 5^{\ln x}\,\frac{1}{x}\,\ln 5$$

$y = \left(1+x^2\right)^{\sin x}$ (3)

الحل :

ضع $\ln|y| = \ln\left|\left(1+x^2\right)^{\sin x}\right| = \sin x\ \ln(1+x^2)$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = \cos x\ \ln(1+x^2) + \sin x\ \frac{2x}{1+x^2}$$

$$y' = y\ \left(\cos x\ \ln(1+x^2) + \sin x\ \frac{2x}{1+x^2}\right)$$

$$y' = \left(1+x^2\right)^{\sin x}\left(\cos x\ \ln(1+x^2) + \sin x\ \frac{2x}{1+x^2}\right)$$

السؤال الخامس (10 درجات) : أحسب التكاملات التالية

$$\int_2^4 \frac{2x-3}{\sqrt{x}}\,dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int_2^4 \frac{2x-3}{\sqrt{x}}\,dx = \int_2^4 \frac{2x-3}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_2^4 x^{-\frac{1}{2}}(2x-3)\,dx$$

$$= \int_2^4 \left(2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}}\right)\,dx = 2\int_2^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx - 3\int_2^4 x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^4 - 3\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_2^4 = \frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_2^4 - 6\left[\sqrt{x}\right]_2^4$$

$$= \frac{4}{3}\left[(4)^{\frac{3}{2}} - (2)^{\frac{3}{2}}\right] - 6[\sqrt{4}-\sqrt{2}] = \frac{4}{3}\left(8-2\sqrt{2}\right) - 6(2-\sqrt{2})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+(\sin x)^2}\,dx$$

$$= \left[\tan^{-1}(\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tan^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \tan^{-1}(\sin(0))$$

$$= \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 x\,\sqrt{8+x^2}\,dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int_0^1 x\,\sqrt{8+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(8+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\ (2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\left(8+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\ \left[\left(8+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ \left[(8+1)^{\frac{3}{2}} - (8+0)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3}\ \left(27-16\sqrt{2}\right)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\ (-2x)\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{(2)^2-(x)^2}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ \frac{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c = -\sqrt{4-x^2} + \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$\int \frac{dx}{x\,\sqrt{\log_5 x}} \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{x\,\sqrt{\log_5 x}} = \int \frac{dx}{x\ (\log_5 x)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int (\log_5 x)^{-\frac{1}{2}}\ \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln 5\int (\log_5 x)^{-\frac{1}{2}}\ \frac{1}{x}\,\frac{1}{\ln 5}\,dx = \ln 5\,\frac{(\log_5 x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\ln 5\,\sqrt{\log_5 x} + c$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1437 - 1438 هـ
حل الاختبار الفصلي الثاني
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y = \sinh\left(\frac{1}{x}\right) + \tanh\left(\sqrt{x}\right)$ حيث $x > 0$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \cosh\left(\frac{1}{x}\right)\ \left(\frac{-1}{x^2}\right) + sech^2\left(\sqrt{x}\right)\ \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(2) $y = \ln x\ \sinh^{-1}(x)$ حيث $x > 0$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\ \sinh^{-1}(x) + \ln x\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\tanh(\ln|x|)}{x}\, dx$

الحل :

$$\int \frac{\tanh(\ln|x|)}{x}\, dx = \int \tanh(\ln|x|)\ \frac{1}{x}\, dx = \ln(\cosh(\ln|x|)) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \tanh\left(f(x)\right)\ f'(x)\, dx = \ln\left(\cosh\left(f(x)\right)\right) + c$$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-16}}\, dx$

الحل :

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^4-16}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{\left(x^2\right)^2 + 4^2}} = \frac{1}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{x^2}{4}\right) + c$$

باستخدام القانون

$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 + a^2}}\, dx = \cosh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$ حيث $a > 0$.

$$\int \ln(1+x^2)\, dx \quad (3)$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$u = \ln(1+x^2) \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{2x}{1+x^2}\, dx \qquad v = x$$

$$\int \ln(1+x^2)\, dx = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x}{1+x^2}\, x\, dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\, dx = x\ln(1+x^2) - \int \frac{(2x^2+2)-2}{1+x^2}\, dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - \left(\int \frac{2(x^2+1)}{1+x^2}\, dx - \int \frac{2}{1+x^2}\, dx\right)$$

$$= x\ln(1+x^2) - \int 2\, dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\tan^{-1} x + c$$

$$\int \cos^3 x\, \sin^2 x\, dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \cos^3 x\, \sin^2 x\, dx = \int \cos^2 x\, \sin^2 x\, \cos x\, dx$$

$$= \int (1-\sin^2 x)\, \sin^2 x\, \cos x\, dx$$

باستخدام التعويض $u = \sin x$

$$du = \cos x\, dx$$

$$\int (1-\sin^2 x)\, \sin^2 x\, \cos x\, dx = \int (1-u^2)\, u^2\, du$$

$$= \int (u^2 - u^4)\, du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

$$\int \sin(7x)\, \sin(4x)\, dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \sin(7x)\ \sin(4x)\ dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(7x-3x)-\cos(7x+4x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(3x)\ dx - \frac{1}{2}\int \cos(11x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\int \cos(3x)\ (3)\ dx - \frac{1}{2}\,\frac{1}{11}\int \cos(11x)\ (11)\ dx$$

$$= \frac{1}{6}\sin(3x) - \frac{1}{22}\sin(11x) + c$$

(6) $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

الحل الأول :

باستخدام التعويض $u = x^2+1$ ، أي أن $x^2 = u-1$

$$2x\ dx = du \implies x\ dx = \frac{1}{2}\ du$$

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx = \int x^2\sqrt{x^2+1}\ x\ dx$$

$$= \int (u-1)\sqrt{u}\ \frac{1}{2}\ du = \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)\ du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + c = \frac{1}{5}\ u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}\ u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{5}\ (x^2+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}\ (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

الحل الثاني : باستخدام التكامل بالتجزئ

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx = \int x^2\left(x\sqrt{x^2+1}\right)\ dx$$

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = x\sqrt{x^2+1}\,dx \\ du = 2x\ dx & v = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} \end{array}$$

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}x^2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int \left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\ (2x)\ dx$$

$$= \frac{1}{3}x^2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\frac{2}{5}\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\left[x^2 - \frac{2}{5}(x^2+1)\right] + c$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{5}\right] + c$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\left[\left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{5}\right) - 1\right] + c$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{3}{5}(x^2+1) - 1\right] + c$$

$$= \frac{1}{5}\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

الحل الثالث : باستخدام التعويضات المثلثية

ضع $x = \tan\theta$

$$dx = \sec^2\theta \, d\theta$$

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\, dx = \int (\tan\theta)^3 \sqrt{\tan^2\theta + 1}\ \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \int \tan^3\theta \sqrt{\sec^2\theta}\ \sec^2\theta\, d\theta = \int \tan^3\theta\ \sec^3\theta\, d\theta$$

$$= \int \tan^2\theta\ \sec^2\theta\ \sec\theta\tan\theta\, d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)\sec^2\theta\ \sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

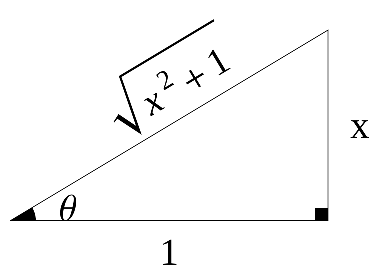
ضع $u = \sec\theta$

$$du = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$\int (\sec^2\theta - 1)\sec^2\theta\ \sec\theta\tan\theta\, d\theta = \int (u^2-1)u^2\, du$$

$$= \int (u^4 - u^2)\, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + c$$

$$= \frac{1}{5}(\sec\theta)^5 - \frac{1}{3}(\sec\theta)^3 + c$$



من المثلث : نلاحظ أن $\sec\theta = \sqrt{x^2+1}$

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{5}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^5 - \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + c$$

$$= \frac{1}{5}\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

(7) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-4x}\,dx$

الحل : بإكمال المربع الكامل

$$\int \sqrt{x^2-4x}\,dx = \int \sqrt{(x^2-4x+4)-4}\,dx$$

$$= \int \sqrt{(x-2)^2-(2)^2}\,dx$$

باستخدام التعويضات المثلثية

ضع $x-2 = 2\sec\theta$

$$dx = 2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

لاحظ أن $x-2 = 2\sec\theta \implies \sec\theta = \dfrac{x-2}{2}$

$$\int \sqrt{(x-2)^2-(2)^2}\,dx = \int \sqrt{4\sec^2\theta-4}\,2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

$$= \int \sqrt{4\left(\sec^2\theta-1\right)}\,2\sec\theta\tan\theta\,d\theta = \int \sqrt{4\tan^2\theta}\,2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

$$= \int 2\tan\theta\,2\sec\theta\tan\theta\,d\theta = 4\int \sec\theta\tan^2\theta\,d\theta$$

$$= 4\int \sec\theta(\sec^2\theta-1)\,d\theta = 4\int \sec^3\theta\,d\theta - 4\int \sec\theta\,d\theta = 4I_1 - 4I_2$$

لحل التكامل I_1 نستخدم طريقة التكامل بالتجزئ :

$$\begin{array}{ll} u = \sec\theta & dv = \sec^2\theta\,d\theta \\ du = \sec\theta\tan\theta\,d\theta & v = \tan\theta \end{array}$$

$$\int \sec^3\theta\,d\theta == \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta\tan^2\theta\,d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta(\sec^2\theta-1)\,d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \left(\sec^3\theta - \sec\theta\right)d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta\,d\theta + \int \sec\theta\,d\theta$$

$$2\int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|$$

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + c_1$$

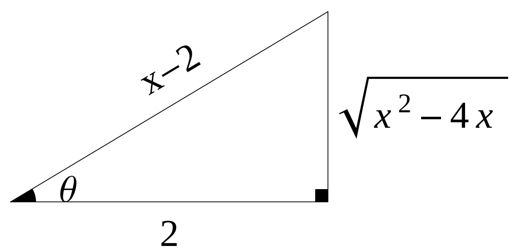
حل التكامل I_2 :

$$\int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c_2$$

$$\int \sec\theta\tan^2\theta\, d\theta = 4I_1 - 4I_2$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta|\right) - 4\ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

$$= 2\sec\theta\tan\theta - 2\ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$



من المثلث نجد أن :

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-4x}}{2} \text{ و } \sec\theta = \frac{x-2}{2}$$

$$\int \sqrt{x^2-4x}\, dx$$

$$= 2\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-4x}}{2}\right) - 2\ln\left|\frac{x-2}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4x}}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{x-2}{x^3+x}\, dx \quad (8)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{x-2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{A\,(x^2+1)}{x(x^2+1)} + \frac{(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$

$$x-2 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$x-2=(A+B)x^2+Cx+A$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lcl} A+B=0 & \longrightarrow & (1) \\ C=1 & \longrightarrow & (2) \\ A=-2 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (1) نحصل على : $B=-A=2$

$$\frac{x-2}{x^3+x}=\frac{-2}{x}+\frac{2x+1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x-2}{x^3+x}\,dx=\int\left(\frac{-2}{x}+\frac{2x+1}{x^2+1}\right)\,dx$$

$$=-2\int \frac{1}{x}\,dx+\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx+\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$=-2\ln|x|+\ln(x^2+1)+\tan^{-1}x+c$$

(9) $$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{6}}}$$

الحل : باستخدام التعويض $x=u^6$ ، أي أن $u=x^{\frac{1}{6}}$

$$dx=6u^5\,du$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{6}}}=\int \frac{6u^5}{(u^6)^{\frac{1}{2}}+(u^6)^{\frac{1}{6}}}\,du=\int \frac{6u^5}{u^3+u}\,du$$

$$=\int \frac{6u^5}{u(u^2+1)}\,du=6\int \frac{u^4}{u^2+1}\,du$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$6\int \frac{u^4}{u^2+1}\,du=6\int\left(u^2-1+\frac{1}{u^2+1}\right)\,du$$

$$=6\left(\frac{u^3}{3}-u+\tan^{-1}u\right)+c=2u^3-6u+6\tan^{-1}u+c$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{6}}}=2\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3-6x^{\frac{1}{6}}+6\tan^{-1}\left(x^{\frac{1}{6}}\right)+c$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1437 - 1438 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = 1 + x^2$ على الفترة $[-1, 2]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\, dx$

حيث $f(x) = 1 + x^2$ و $[a, b] = [-1, 2]$

$$(2-(-1))\,(1+c^2) = \int_{-1}^{2} (1+x^2)\, dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$3(1+c^2) = \left(2 + \frac{8}{3}\right) - \left(-1 + \frac{-1}{3}\right)$$

$$3(1+c^2) = 2 + \frac{8}{3} + 1 + \frac{1}{3} = 6 \implies 1 + c^2 = 2$$

$$\implies c^2 = 1 \implies c = \pm 1$$

لاحظ أن $c = 1 \in (-1, 2)$ بينما $-1 \notin (-1, 2)$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية :

$$\int \left(\frac{5}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \left(\frac{5}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx = 5 \int x^{-4}\, dx - 2 \int x^{-\frac{1}{3}}\, dx$$

$$= 5\frac{x^{-3}}{-3} - 2\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = -\frac{5}{3x^3} - 3x^{\frac{2}{3}} + c$$

$$\int \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}\, dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}\, dx = \int \left(\tan^{-1} x\right) \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\left(\tan^{-1} x\right)^2}{2} + c$$

باستخدام العلاقة

$$\int [f(x)]^n f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$ حيث $n \neq -1$.

(3) $\int 2^{3x+1}\, dx$

الحل :

$$\int 2^{3x+1}\, dx = \frac{1}{3}\int 2^{3x+1}(3)\, dx = \frac{1}{3}\frac{2^{3x+1}}{\ln 2} + c$$

باستخدام العلاقة

$$\int a^{f(x)} f'(x)\, dx = \frac{1}{\ln a}\, a^{f(x)} + c$$ حيث $a > 0$.

(4) $\int xe^x\, dx$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x\, dx \\ du = dx & v = e^x \end{array}$$

$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + c$$

(5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

ضع $x = 2\sin\theta$ ، عندئذ $\sin\theta = \frac{x}{2}$

$$dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

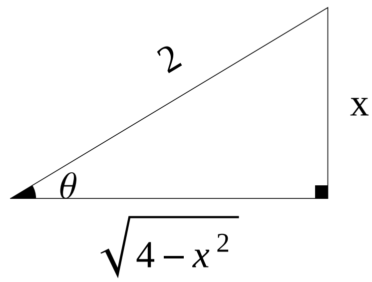
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \int \frac{(2\sin\theta)^2}{\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}}\, 2\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{4\sin^2\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\, 2\cos\theta\, d\theta = \int \frac{4\sin^2\theta}{\sqrt{4\left(1-\sin^2\theta\right)}}\, 2\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{4\sin^2\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta}}\, 2\cos\theta\, d\theta = \int \frac{4\sin^2\theta}{2\cos\theta}\, 2\cos\theta\, d\theta = \int 4\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \int 4\,\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\, d\theta = \int (2-2\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= 2\theta - \sin 2\theta + c = 2\theta - 2\sin\theta\ \cos\theta + c$$



من المثلث نجد أن :

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \text{ و } \sin\theta = \frac{x}{2}$$

لاحظ أن $\sin\theta = \frac{x}{2} \implies \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - 2\,\frac{x}{2}\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

(6) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}\,dx$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{A_1x(x-1) + A_2(x-1) + A_3x^2}{x^2(x-1)}$$

$$x^2+1 = A_1x(x-1) + A_2(x-1) + A_3x^2$$

$$= A_1x^2 - A_1x + A_2x = A_2 + A_3x^2 = (A_1+A_3)\,x^2 + (-A_1+A_2) - A_2$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lcl} A_1 + A_3 = 1 & \longrightarrow & (1) \\ -A_1 + A_2 = 0 & \longrightarrow & (2) \\ -A_2 = 1 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (3) نجد أن $A_2 = -1$

من المعادلة (2) نجد أن $A_1 = A_2 = -1$

من المعادلة (1) نجد أن $A_3 = 1 - A_1 = 2$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-1}\right)\,dx$$

$$= -\int \frac{1}{x}\,dx - \int x^{-2}\,dx + 2\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= -\ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} + 2\ln|x-1| + c = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + c$$

السؤال الثالث :

(أ) أحسب $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x + x\cos x}$

الحل :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x + x\cos x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2 + \cos x - x\sin x} = \frac{1}{2+1+0} = \frac{1}{3}$$

(ب) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب)

الحل :

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\tan^{-1}(e^x)\right]_0^t = \lim_{t\to\infty} \left[\tan^{-1}\left(e^t\right) - \tan^{-1}\left(e^0\right)\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

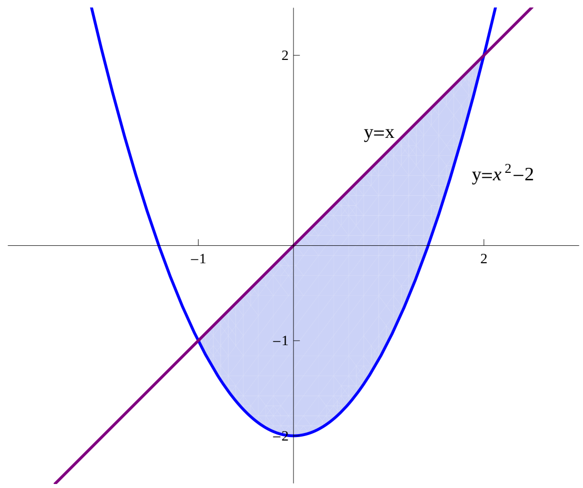
التكامل المعتل متقارب وقيمته تساوي $\frac{\pi}{4}$

السؤال الرابع : أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 - 2$ و $y = x$ وأحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $y = x^2 - 2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, -2)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = x$ يمثل خط مستقيم ميله 1 ويمر بنقطة الأصل .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2 - 2$ و $y = x$:

$$x^2 - 2 = x \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies (x-2)(x+1) = 0$$

$$\implies x = -1 \,,\; x = 2$$

$$A = \int_{-1}^{2} \left[x - (x^2 - 2)\right]\, dx = \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{2} = \left[\left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{-1}{3} - 2\right)\right]$$

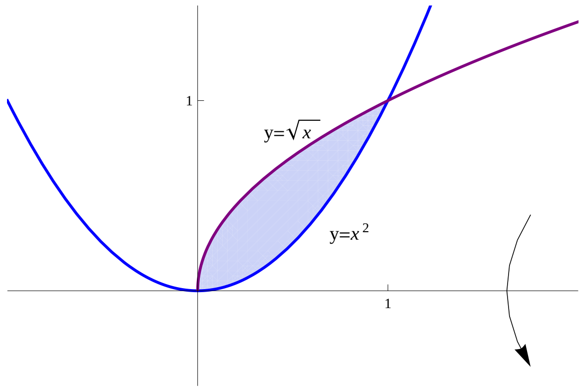
$$= 2 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 = 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

السؤال الخامس : أحسب حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي للقطع المكافئ $x = y^2$ الذي رأسه $(0,0)$ وفتحته لليمين .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$:

$$x^2 = \sqrt{x} \implies x^4 = x \implies x^4 - x = 0$$

$$\implies x(x^3 - 1) = 0 \implies x = 0\ ,\ x = 1$$

باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^1 \left[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right]\ dx = \pi \int_0^1 \left(x - x^4\right)\ dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - (0 - 0)\right]$$

$$= \pi \left(\frac{5-2}{10}\right) = \frac{3\pi}{10}$$

السؤال السادس : أحسب طول القوس $y = \cosh x$ من $x = 0$ إلى $x = \ln 3$.

الحل :

$$f(x) = \cosh x \implies f'(x) = \sinh x$$

$$L = \int_0^{\ln 3} \sqrt{1 + (\sinh x)^2}\, dx = \int_0^{\ln 3} \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 3} \sqrt{\cosh^2 x}\, dx = \int_0^{\ln 3} \cosh x\, dx = [\sinh x]_0^{\ln 3}$$

$$= \sinh(\ln 3) - \sinh(0) = \sinh(\ln 3) = \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

ملاحظة : تذكر أن

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \implies \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$$

السؤال السابع : أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \sqrt{x}$ على الفترة $[1, 4]$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$S = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\, \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\, \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\, \sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\, dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\, \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$$= 2\pi\, \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{4x+1}\, dx = \pi \int_1^4 (4x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx = \pi\, \frac{1}{4} \int_1^4 (4x+1)^{\frac{1}{2}} (4)\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3}(17)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(5)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\pi}{6} \left[(17)^{\frac{3}{2}} - (5)^{\frac{3}{2}}\right]$$

السؤال الثامن :

(أ) حول المعادلة الديكارتية $x^2 + (y-2)^2 = 4$ إلى معادلة قطبية ثم تعرف على بيانها .

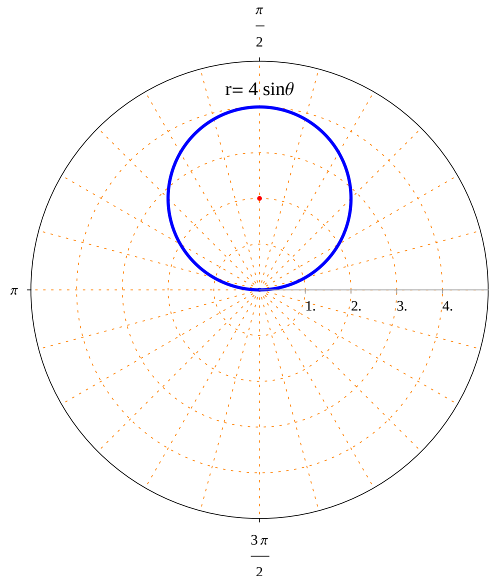
الحل :

$$x^2 + (y-2)^2 = 4 \implies x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$$

$$\implies x^2 + y^2 - 4y = 0 \implies x^2 + y^2 = 4y$$

$$\implies r^2 = 4r\sin\theta \implies r = 4\sin\theta$$

المعادلة القطبية $r = 4\sin\theta$ تمثل دائرة مركزها النقطة $(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ ونصف قطرها 2 .

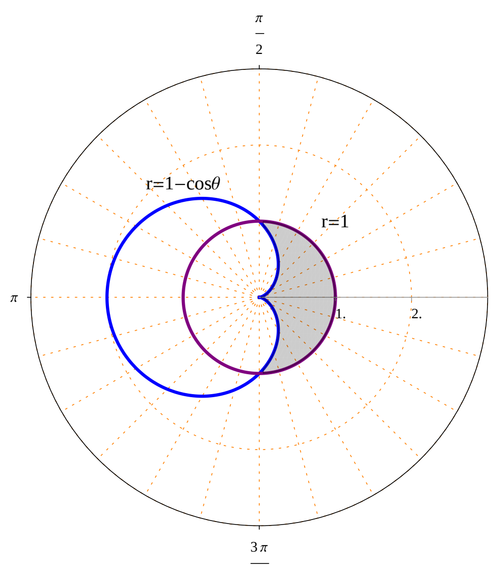


(ب) أرسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 1$ وخارج المنحنى $r = 1 - \cos\theta$ ثم أحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $r = 1$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 1 .

المنحنى $r = 1 - \cos\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 1$ مع المنحنى $r = 1 - \cos\theta$:

$$1 - \cos\theta = 1 \implies \cos\theta = 0 \implies \theta = -\frac{\pi}{2} \ , \ \theta = \frac{\pi}{2}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي .

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(1)^2 - (1-\cos\theta)^2\right]\, d\theta\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\right]\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos\theta - \cos^2\theta\right)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2\cos\theta - \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right]\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2\cos\theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]\, d\theta$$

$$= \left[2\sin\theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin\pi}{2}\right] - \left[2\sin(0) - \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}\frac{\sin(0)}{2}\right]$$

$$= \left(2 - \frac{\pi}{4} - 0\right) - (0 - 0 - 0) = 2 - \frac{\pi}{4}$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1437 - 1438 هـ
حل الاختبار الفصلي الأول
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (8 درجات) :

(1) استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل $\int_1^2 (6-2x)\,dx$

الحل :

$$f(x) = 6-2x \text{ , } [a,b] = [1,2]$$

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = 1 + k\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x = \sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[6-2\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[6-2-\frac{2k}{n}\right]\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[4-\frac{2k}{n}\right]\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{4}{n}-\frac{2k}{n^2}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2} = \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}1 - \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$= \frac{4}{n}(n) - \frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = 4 - \frac{n+1}{n}$$

$$\int_1^2 (6-2x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(4-\frac{n+1}{n}\right) = 4-1 = 3$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 3x^2+1$ على الفترة $[0,2]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = 3x^2+1$ و $[a,b] = [0,2]$

$$(2-0)\left(3c^2+1\right)=\int_0^2\left(3x^2+1\right)dx$$

$$2(3c^2+1)=\left[x^3+x\right]_0^2=[(8+2)-(0+0)]=10$$

$$3c^2+1=5 \implies 3c^2=4 \implies c^2=\frac{4}{3} \implies c=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

لاحظ أن $c=\frac{2}{\sqrt{3}}\in(0,2)$ وبالتالي هي القيمة المطلوبة .

بينما $c=-\frac{2}{\sqrt{3}}\notin(0,2)$

(3) إذا كانت $F(x)=\int_{\tan x}^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{2+t^4}}$ فأوجد $F'(x)$

الحل :

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{\tan x}^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{2+t^4}}=\frac{1}{\sqrt{2+\left(x^2\right)^4}}(2x)-\frac{1}{\sqrt{2+(\tan x)^4}}\left(\sec^2 x\right)$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{2+x^8}}-\frac{\sec^2 x}{\sqrt{2+\tan^4 x}}$$

السؤال الثاني (5 درجات) : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y=(\cot x)\left(\ln\sqrt{x}\right)$ ، $x>0$

الحل :

$$y=(\cot x)\left(\ln\sqrt{x}\right)=(\cot x)\left(\frac{1}{2}\ln x\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(-\csc^2 x\right)\left(\frac{1}{2}\ln x\right)+(\cot x)\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{-1}{2}\csc^2 x\,\ln x+\frac{\cot x}{2x}$$

(2) $y=\frac{x^x\,\sqrt[3]{1+4x}}{\sin^{-1}x}$ ، $0<x<1$

الحل :

ضع $\ln|y| = \ln\left|\frac{x^x\ \sqrt[3]{1+4x}}{\sin^{-1}x}\right| = \ln\left|\frac{x^x\ (1+4x)^{\frac{1}{3}}}{\sin^{-1}x}\right|$

$$\ln|y| = \ln|x^x| + \ln\left|(1+4x)^{\frac{1}{3}}\right| - \ln\left|\sin^{-1}x\right|$$

$$\ln|y| = x\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|1+4x| - \ln\left|\sin^{-1}x\right|$$

بإشتقاق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = \left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}\frac{4}{(1+4x)} - \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin^{-1}x}$$

$$y' = y\left[\ln|x| + 1 + \frac{4}{3(1+4x)} - \frac{1}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$y' = \frac{x^x\ \sqrt[3]{1+4x}}{\sin^{-1}x}\ \left[\ln|x| + 1 + \frac{4}{3(1+4x)} - \frac{1}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}}\right]$$

السؤال الثالث (12 درجة) : أحسب التكاملات التالية

$$(1)\quad \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{x-1}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx = \int x^{-\frac{2}{3}}(x-1)\,dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}\right)\,dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = \frac{3}{4}\,x^{\frac{4}{3}} - 3\,x^{\frac{1}{3}} + c$$

$$(2)\quad \int \sqrt{1+\sin x}\cos x\,dx$$

الحل :

$$\int \sqrt{1+\sin x}\cos x\,dx = \int (1+\sin x)^{\frac{1}{2}}\cos x\,dx = \frac{(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

باستخدام القاعدة

$n \neq -1$ حيث $\int [f(x)]^n\, f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-9}} \quad (3)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-9}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{\left(x^2\right)^2-(3)^2}} = \int \frac{x}{x^2\sqrt{\left(x^2\right)^2-(3)^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2\sqrt{\left(x^2\right)^2-(3)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\ \sec^{-1}\left(\frac{x^2}{3}\right)+c$$

باستخدام القاعدة

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{\left[f(x)\right]^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$

$$\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+\cos x)}{x^2+2\sin x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\sin x\right|+c$$

باستخدام القاعدة

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+c$$

$$\int \frac{e^{3\ln x}}{x^4}\,dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{e^{3\ln x}}{x^4}\,dx = \int \frac{e^{\ln x^3}}{x^4}\,dx = \int \frac{x^3}{x^4}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+c$$

$$\int \frac{3^x}{4+3^{2x}}\,dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int \frac{3^x}{4+3^{2x}}\,dx = \int \frac{3^x}{(2)^2+\left(3^x\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\int \frac{3^x \ln 3}{(2)^2+\left(3^x\right)^2}\,dx = \frac{1}{\ln 3}\,\frac{1}{2}\,\tan^{-1}\left(\frac{3^x}{2}\right)+c$$

باستخدام القاعدة

$$\int \frac{f'(x)}{a^2+\left[f(x)\right]^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\tan^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1437 - 1438 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = \sqrt{x+2}$ على الفترة $[-1, 2]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\, dx$

حيث $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $[a, b] = [-1, 2]$

$$(2-(-1))\,\sqrt{c+2} = \int_{-1}^{2} \sqrt{x+2}\, dx = \int_{-1}^{2} (x+2)^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{2}$$

$$3\sqrt{c+2} = \frac{2}{3}(2+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(-1+2)^{\frac{3}{2}}$$

$$3\sqrt{c+2} = \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

$$\sqrt{c+2} = \frac{14}{9} \Longrightarrow c+2 = \left(\frac{14}{9}\right)^2 \Longrightarrow c = \left(\frac{14}{9}\right)^2 - 2 = \frac{34}{81} \in (-1, 2)$$

السؤال الثاني : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y = \sinh\left(1+\sqrt{x}\right)$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \cosh\left(1+\sqrt{x}\right)\ \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{\cosh\left(1+\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$$

(2) $y = \frac{1}{x}\sinh^{-1}(x)$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2}\sinh^{-1}(x) + \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-\sinh^{-1}(x)}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

السؤال الثالث : احسب التكاملات التالية :

(1) $\int 2^x 5^{2^x}\, dx$

الحل :

$$\int 2^x 5^{2^x}\ dx = \frac{1}{\ln 2}\int 5^{2^x}\ (2^x \ln 2)\ dx = \frac{1}{\ln 2}\frac{5^{2^x}}{\ln 5} + c$$

باستخدام القاعدة $\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$ حيث $a > 1$

(2) $\int \frac{\cosh\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\ dx$ حيث $x > 0$

الحل :

$$\int \frac{\cosh\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\ dx = 2\int \cosh\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx = 2\sinh\left(\sqrt{x}\right) + c$$

باستخدام القاعدة $\int \cosh\left(f(x)\right) f'(x)\,dx = \sinh\left(f(x)\right) + c$

(3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^8}}$

الحل :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^8}} = \int \frac{x^3}{x^4\sqrt{1+x^8}}\ dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4\sqrt{1+\left(x^4\right)^2}}\ dx = -\frac{1}{4}\ csch^{-1}\left(x^4\right) + c$$

باستخدام القاعدة $\int \frac{f'(x)}{|f(x)|\sqrt{a^2+[f(x)]^2}}\ dx = -\frac{1}{a}\ csch^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$ حيث $a > 0$

(4) $\int x\sin x\ dx$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = \sin x\ dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array}$$

$$\int x\sin x\ dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\ dx = -x\cos x + \int \cos x\ dx = -x\cos x + \sin x + c$$

(5) $\int \sin^3 x\cos^2 x\ dx$

الحل :

$$\int \sin^3 x\cos^2 x\ dx = \int \sin^2 x\cos^2 x\ \sin x\ dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x\ \sin x\ dx$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x \, dx \Longrightarrow -du = \sin x \, dx$$

$$\int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x \;\sin x \, dx = -\int \left(1-u^2\right) u^2 \, du = -\int \left(u^2 - u^4\right)\, du$$

$$= -\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right) + c = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

(6) $\int \sin(7x)\cos(5x)\, dx$

الحل :

$$\int \sin(7x)\cos(5x)\, dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(7x-5x) + \sin(7x+5x)\right]\, dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\left[\sin(2x) + \sin(12x)\right]\, dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\, dx + \frac{1}{2}\int \sin(12x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int \sin(2x)\,(2)\, dx + \frac{1}{2}\frac{1}{12}\int \sin(12x)\,(12)\, dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{24}\cos(12x) + c$$

(7) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}$

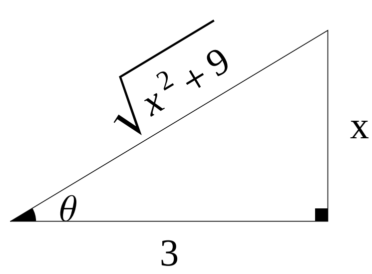
الحل :

باستخدام التعويض المثلثي $x = 3\tan\theta$ وهذا يعني أن $\tan\theta = \frac{x}{3}$

$$dx = 3\sec^2\theta \, d\theta$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{3\sec^2\theta}{\left(9\tan^2\theta + 9\right)^{\frac{3}{2}}}\, d\theta = \int \frac{3\sec^2\theta}{\left[9\left(\tan^2\theta + 1\right)\right]^{\frac{3}{2}}}\, d\theta = \int \frac{3\sec^2\theta}{\left[9\sec^2\theta\right]^{\frac{3}{2}}}\, d\theta$$

$$= \int \frac{3\sec^2\theta}{(9)^{\frac{3}{2}}\left(\sec^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\, d\theta = \int \frac{3\sec^2\theta}{27\sec^3\theta}\, d\theta = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\sec\theta}\, d\theta = \frac{1}{9}\int \cos\theta \, d\theta = \frac{1}{9}\sin\theta + c$$



من المثلث نجد أن : $\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + c$$

(8) $$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A_1(x-1)^2}{(x+1)(x-1)^2} + \frac{A_2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)^2} + \frac{A_3(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$1 = A_1(x-1)^2 + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x+1)$$

$$1 = A_1(x^2-2x+1) + A_2(x^2-1) + A_3(x+1)$$

$$1 = A_1x^2 - 2A_1x + A_1 + A_2x^2 - A_2 + A_3x + A_3$$

$$1 = (A_1+A_2)\,x^2 + (-2A_1+A_3)\,x + (A_1-A_2+A_3)$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في الطرفين نجد أن

$$\begin{array}{lcl} A_1 + A_2 = 0 & \longrightarrow & (1) \\ -2A_1 + A_3 = 0 & \longrightarrow & (2) \\ A_1 - A_2 + A_3 = 1 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

بجمع المعادلات الثلاث نجد أن :

$$2A_3 = 1 \Longrightarrow A_3 = \frac{1}{2}$$

من المعادلة (2) نجد أن

$$-2A_1 + \frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow -2A_1 = -\frac{1}{2} \Longrightarrow A_1 = \frac{1}{4}$$

من المعادلة (1) نجد أن

$$\frac{1}{4} + A_2 = 0 \Longrightarrow A_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int (x-1)^{-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + c$$

(9) $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}}\,dx$

الحل :

باستخدام التعويض $x = u^6$

$dx = 6u^5 du$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int \frac{\left(u^6\right)^{\frac{1}{2}} 6u^5}{\left(u^6\right)^{\frac{1}{2}} - \left(u^6\right)^{\frac{1}{3}}}\,du = \int \frac{6u^5u^3}{u^3 - u^2}\,du = \int \frac{6u^8}{u^2(u-1)}\,du$$

$$= \int \frac{6u^6}{u-1}\,du = 6\int \left(u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1 + \frac{1}{u-1}\right)du$$

$$= 6\left(\frac{u^6}{6} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + u + \ln|u-1|\right) + c$$

$$= \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^6 + \frac{6}{5}\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^5 + \frac{3}{2}\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^4 + 2\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 + 3\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2 + 6x^{\frac{1}{6}} + 6\ln\left|x^{\frac{1}{6}-1}\right| + c$$

$$= x + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 6\ln\left|x^{\frac{1}{6}} - 1\right| + c$$

السؤال الرابع :

(أ) أحسب $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x + \ln x}$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x + \ln x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x + \ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(\frac{x+1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(2 + \ln x\right)}{2\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\left(2 + \ln x\right)}{2(x+1)} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\left(2 + \ln x\right)}{2(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(2 + \ln x\right) + \sqrt{x}\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(2+\ln x)+2}{2\sqrt{x}}}{2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+\ln x}{4\sqrt{x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4+\ln x}{4\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

(ب) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب)

الحل : لاحظ أن $\lim_{x\to 4^-} \frac{1}{\sqrt{4-x}} = \infty$

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{t\to 4^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4-x}}\, dx = \lim_{t\to 4^-} (-1) \int_0^t (4-x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \lim_{t\to 4^-} \left((-1)\left[2\,(4-x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^t\right) = \lim_{t\to 4^-} \left((-1)\left[2(4-t)^{\frac{1}{2}} - 2(4-0)^{\frac{1}{1}}\right]\right)$$

$$= \lim_{t\to 4^-} \left[2\sqrt{4} - 2\sqrt{4-t}\right] = 2(2) - 2(0) = 4$$

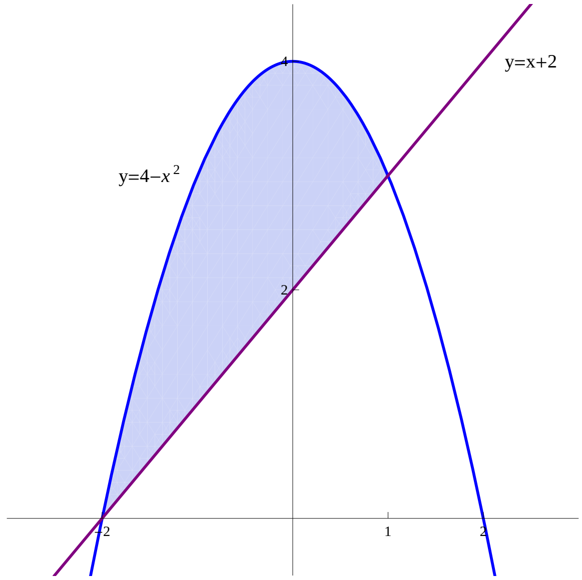
التكامل المعتل متقارب وقيمته تساوي 4

السؤال الخامس : أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$ وأحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,4)$ وفتحته للأسفل

المنحنى $y = x + 2$ يمثل خط مستقيم ميله 1 ويقطع محور y عند النقطة $(0,2)$



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$:

$$x + 2 = 4 - x^2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x+2)(x-1) = 0$$

$$\implies x = -2\ ,\ x = 1$$

$$A = \int_{-2}^{1} \left[(4 - x^2) - (x+2)\right]\, dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right)\right]$$

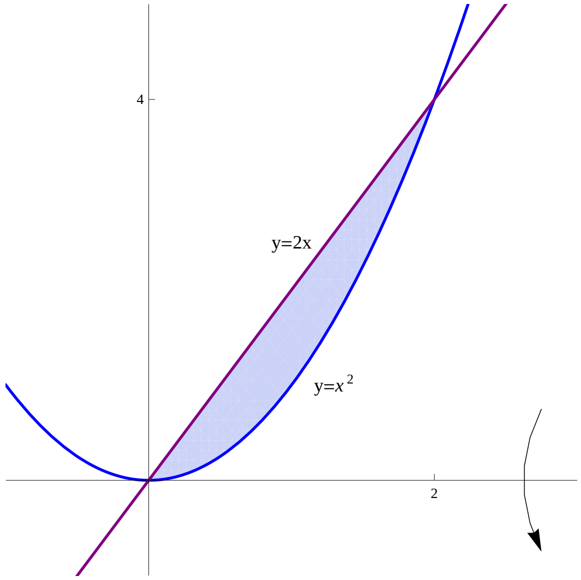
$$= -\frac{1}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 6 = -3 + 8 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

السؤال السادس : أحسب حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 2x$ يمثل خط مستقيم ميله 2 ويمر بنقطة الأصل .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$:

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0$$

$$\implies x = 0\,,\ x = 2$$

باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^2 \left[(2x)^2 - (x^2)^2\right]\, dx = \pi \int_0^2 \left(4x^2 - x^4\right)\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi \left[\left(\frac{4}{3}(8) - \frac{32}{5}\right) - \left(\frac{4}{3}(0) - \frac{0}{5}\right)\right]$$

$$= \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = 32\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 32\pi \left(\frac{2}{15}\right) = \frac{64}{15}\pi$$