

111 رياض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الأول 1443 هـ
 حل الاختبار الفصلي
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (12 درجة) :

$$F(x) = \int_{e^{\sin x}}^{2^{\sqrt{x}}} \frac{1}{\sqrt{2+t^2}} dt \text{ إذا كانت } F'(x) \text{ (1)}$$

الحل :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{e^{\sin x}}^{2^{\sqrt{x}}} \frac{1}{\sqrt{2+t^2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2+(2^{\sqrt{x}})^2}} 2^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln 2 - \frac{1}{\sqrt{2+(e^{\sin x})^2}} e^{\sin x} \cos x \\ &= \frac{2^{\sqrt{x}} \ln 2}{2\sqrt{x} \sqrt{2+4^{\sqrt{x}}}} - \frac{e^{\sin x} \cos x}{\sqrt{2+e^{2\sin x}}} \end{aligned}$$

احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$y = 3^{3x} \sin^{-1}(e^x) \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (3^{3x} (3 \ln 3) \sin^{-1}(e^x) + 3^{3x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} e^x \right)) \\ &= 3^{3x+1} \ln 3 \sin^{-1}(e^x) + \frac{3^x e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \end{aligned}$$

$$y = \sqrt[4]{x} \log_4 |2 + \tan(2x^2)| \quad (3)$$

الحل :

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[4]{x} \log_4 |2 + \tan(2x^2)| = x^{\frac{1}{4}} \log_4 |2 + \tan(2x^2)| \\ \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \right) \log_4 |2 + \tan(2x^2)| + x^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sec^2(2x^2) 4x}{2 + \tan(2x^2)} \frac{1}{\ln 4} \right) \\ &= \frac{\log_4 |2 + \tan(2x^2)|}{4x^{\frac{3}{4}}} + \frac{4x^{\frac{5}{4}} \sec^2(2x^2)}{\ln 4 [2 + \tan(2x^2)]} \end{aligned}$$

$$y = \ln \left| \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} \sec(2x)}{\sqrt{x + \sin x}} \right| \quad (4)$$

: الحل

$$\begin{aligned} y &= \ln \left| \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} \sec(2x)}{(x + \sin x)^{\frac{1}{2}}} \right| = \ln \left| (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} \sec(2x) \right| - \ln \left| (x + \sin x)^{\frac{1}{2}} \right| \\ &= \ln \left| (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} \right| + \ln |\sec(2x)| - \ln \left| (x + \sin x)^{\frac{1}{2}} \right| \\ &= \frac{1}{3} \ln |x^2 + 1| + \ln |\sec(2x)| - \frac{1}{2} \ln |x + \sin x| \end{aligned}$$

ياشتقاق الطرفين

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right) + \frac{2 \sec(2x) \tan(2x)}{\sec(2x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \cos x}{x + \sin x} \right) \\ y' &= \frac{2x}{3(x^2 + 1)} + 2 \tan(2x) - \frac{1 + \cos x}{2(x + \sin x)} \end{aligned}$$

$$y = (\sec x)^{\tan x} \quad (5)$$

: الحل

$$y = (\sec x)^{\tan x} \implies \ln |y| = \ln \left| (\sec x)^{\tan x} \right| = \tan x \ln |\sec x|$$

ياشتقاق الطرفين

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \sec^2 x \ln |\sec x| + \tan x \left(\frac{\sec x \tan x}{\sec x} \right) \\ y' &= y [\sec^2 x \ln |\sec x| + \tan^2 x] \\ y' &= (\sec x)^{\tan x} [\sec^2 x \ln |\sec x| + \tan^2 x] \end{aligned}$$

$$y = \cosh^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) \quad (6)$$

: الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2 \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}}$$

السؤال الثاني (18 درجة): أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{\csc^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{\csc^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx &= \int \csc^2(\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \csc^2(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ &= 2(-\cot(\sqrt{x})) + c = -2\cot(\sqrt{x}) + c \end{aligned}$$

باستخدام القانون

$$\int \csc^2(f(x)) f'(x) dx = -\cot(f(x)) + c$$

$$\int (x^2 - 2)^5 x dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int (x^2 - 2)^5 x dx = \frac{1}{2} \int (x^2 - 2)^5 (2x) dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2 - 2)^6}{6} + c$$

$$\text{باستخدام القانون } \int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \text{ حيث } n \neq -1$$

$$\int_0^1 x 10^{1+x^2} dx \quad (3)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x 10^{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 10^{1+x^2} (2x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{10^{1+x^2}}{\ln 10} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{10^{1+1^2}}{\ln 10} - \frac{10^{1+0^2}}{\ln 10} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{10^2}{\ln 10} - \frac{10}{\ln 10} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{90}{\ln 10} \right) = \frac{90}{2 \ln 10} \\ &\text{باستخدام القانون } \int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{x-2}{x+1} dx \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{x+1} dx &= \int \frac{(x+1)-3}{x+1} dx = \int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{3}{x+1} \right) dx \\ &= \int \left(1 - \frac{3}{x+1} \right) dx = \int 1 dx - \int \frac{3}{x+1} dx = \int 1 dx - 3 \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= x - 3 \ln|x+1| + c \\ &\cdot \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c \text{ باستخدام القانون} \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{16+e^{6x}}} dx \quad (5)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{16+e^{6x}}} dx &= \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{(4)^2 + (e^{3x})^2}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3e^{3x}}{\sqrt{(4)^2 + (e^{3x})^2}} dx \\ &= \frac{1}{3} \sinh^{-1} \left(\frac{e^{3x}}{4} \right) + c \end{aligned}$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 + [f(x)]^2}} dx = \sinh^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{\coth(\ln x)}{x} dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int \frac{\coth(\ln x)}{x} dx = \int \coth(\ln x) \left(\frac{1}{x} \right) dx = \ln|\sinh(\ln x)| + c$$

باستخدام القانون

$$\int \coth(f(x)) f'(x) dx = \ln|\sinh(f(x))| + c$$

$$\int \frac{x}{x^4+16} dx \quad (7)$$

الحل :

$$\int \frac{x}{x^4+16} dx = \int \frac{x}{(x^2)^2 + (4)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2)^2 + (4)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{4} \tan^{-1} \left(\frac{x^2}{4} \right) + c = \frac{1}{8} \tan^{-1} \left(\frac{x^2}{4} \right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{a^2 + [f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

$$\int (x-1) \sqrt{x+1} dx \quad (8)$$

الحل : بوضع $\sqrt{x+1} = u \implies x+1 = u^2 \implies x = u^2 - 1 \implies x-1 = u^2 - 2$

$$dx = 2u du$$

$$\begin{aligned} \int (x-1) \sqrt{x+1} dx &= \int (u^2 - 2) u 2u du = 2 \int u^2 (u^2 - 2) du \\ &= 2 \int (u^4 - 2u^2) du = 2 \left(\frac{u^5}{5} - 2 \frac{u^3}{3} \right) + c \\ &= \frac{2}{5} (\sqrt{x+1})^5 - \frac{4}{3} (\sqrt{x+1})^3 + c = \frac{2}{5} (x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

$$\int e^{2x} \sinh x dx \quad (9)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sinh x dx &= \int e^{2x} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) dx = \int \left(\frac{e^{3x} - e^x}{2} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{e^{3x}}{2} - \frac{e^x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \int e^{3x} (3) dx - \frac{1}{2} \int e^x dx \\ &= \frac{1}{6} e^{3x} - \frac{1}{2} e^x + c = \frac{e^{3x}}{6} - \frac{e^x}{2} + c \end{aligned}$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c \quad \text{باستخدام القانون}$$

111 رياض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الأول 1443 هـ
 حل الاختبار النهائي
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

الجزء الأول (7 درجات):

(1) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ على الفترة $[1, 9]$

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x) dx \text{ باستخدام العلاقة}$$

$$[a, b] = [1, 9] \text{ و } f(x) = \sqrt[3]{x-1} \text{ حيث}$$

$$(9-1)\sqrt[3]{c-1} = \int_1^9 \sqrt[3]{x-1} dx$$

$$8\sqrt[3]{c-1} = \int_1^9 (x-1)^{\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right]_1^9 = \left[\frac{3}{4} (x-1)^{\frac{4}{3}} \right]_1^9$$

$$8\sqrt[3]{c-1} = \frac{3}{4} (9-1)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4} (1-1)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} (8)^{\frac{4}{3}} - 0 = \frac{3}{4} (2)^4 = \frac{3}{4} (16) = 12$$

$$\sqrt[3]{c-1} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \implies c-1 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} \implies c = \frac{27}{8} + 1 = \frac{35}{8}$$

$$. c = \frac{35}{8} \in (1, 9) \text{ لاحظ أن}$$

$$(2) \text{ جد } F'(x) \text{ إذا كانت } F(x) = \int_{\sin 3x}^{e^{5x}} \sqrt{4+t^2} dt$$

$$\text{الحل: } F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{\sin 3x}^{e^{5x}} \sqrt{4+t^2} dt$$

$$F'(x) = \sqrt{4+(e^{5x})^2} (e^{5x} \cdot 5) - \sqrt{4+(\sin 3x)^2} (\cos 3x \cdot 3)$$

$$= 5e^{5x} \sqrt{4+e^{10x}} - 3 \cos 3x \sqrt{4+\sin^2 3x}$$

$$(3) \text{ جد } f'(x) \text{ إذا كانت } f(x) = \sinh^{-1}(4^{x+1}) + \log_2 |\cosh(x^2)|$$

الحل:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(4^{x+1})^2}} (4^{x+1} (1) \ln 4) + \frac{\sinh(x^2) (2x)}{\cosh(x^2)} \frac{1}{\ln 2}$$

$$= \frac{4^{x+1} \ln 4}{\sqrt{1+4^{2x+2}}} + \frac{2x \sinh(x^2)}{\cosh(x^2) \ln 2}$$

الجزء الثاني (14 درجة): أحسب التكاملات التالية :

$$\int \frac{4}{x^2 + 6x + 13} dx \quad (1)$$

الحل : باستخدام الإكمال إلى مربع كامل

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{x^2 + 6x + 13} dx &= 4 \int \frac{1}{(x^2 + 6x + 9) + 4} dx = 4 \int \frac{1}{(x+3)^2 + (2)^2} dx \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x+3}{2} \right) \right) + c = 2 \tan^{-1} \left(\frac{x+3}{2} \right) + c \end{aligned}$$

$$\text{باستخدام القانون } \int \frac{f'(x)}{a^2 + [f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c \text{ حيث } a > 0$$

$$\int x \sec^{-1} x dx \quad (2)$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u &= \sec^{-1} x & dv &= x dx \\ du &= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx & v &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \sec^{-1} x dx &= \frac{x^2}{2} \sec^{-1} x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \sec^{-1} x - \frac{1}{2} \int x (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^2}{2} \sec^{-1} x - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} (2x) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \sec^{-1} x - \frac{1}{4} \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{x^2}{2} \sec^{-1} x - \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} + c \end{aligned}$$

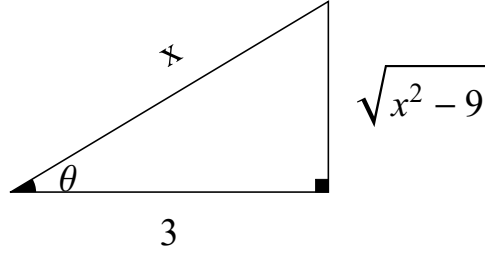
$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx \quad (3)$$

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

$$x = 3 \sec \theta \implies \sec \theta = \frac{x}{3} \text{ ضع}$$

$$dx = 3 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{9\sec^2\theta-9} (3\sec\theta \tan\theta)}{3\sec\theta} d\theta = \int \sqrt{9(\sec^2\theta-1)} \tan\theta d\theta \\
&= \int \sqrt{9\tan^2\theta} \tan\theta d\theta = \int 3\tan^2\theta d\theta = 3 \int (\sec^2\theta-1) d\theta \\
&= 3 \int \sec^2\theta d\theta - 3 \int d\theta = 3\tan\theta - 3\theta + c
\end{aligned}$$



من المثلث نجد أن: $\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$

لاحظ أن $x = 3\sec\theta \implies \sec\theta = \frac{x}{3} \implies \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx = 3 \frac{\sqrt{x^2-9}}{3} - 3\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c = \sqrt{x^2-9} - 3\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

$$\int \frac{3x^2-x+8}{x^3+4x} dx \quad (4)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{3x^2-x+8}{x^3+4x} = \frac{3x^2-x+8}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$3x^2-x+8 = A(x^2+4) + (Bx+C)x$$

$$3x^2-x+8 = Ax^2+4A+Bx^2+Cx$$

$$3x^2-x+8 = (A+B)x^2+Cx+4A$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$A+B=3 \quad \longrightarrow \quad (1)$$

$$C=-1 \quad \longrightarrow \quad (2)$$

$$4A=8 \quad \longrightarrow \quad (3)$$

من المعادلة (3) نجد أن: $A=2$

من المعادلة (1) نجد أن: $2+B=3 \implies B=1$

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2 - x + 8}{x^3 + 4x} dx &= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{x-1}{x^2+4} \right) dx \\
&= 2 \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+4} dx - \int \frac{1}{x^2+4} dx \\
&= 2 \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx - \int \frac{1}{(x)^2+(2)^2} dx \\
&= 2 \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2+4) - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + c
\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{x}}} dx \quad (5)$$

الحل :

$$\begin{aligned}
u = \sqrt{2+\sqrt{x}} \implies u^2 = 2+\sqrt{x} \implies u^2-2 = \sqrt{x} \implies (u^2-2)^2 = x \text{ ضع} \\
2(u^2-2) 2u du = dx \implies 4u(u^2-2) du = dx \\
\int \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{x}}} dx = \int \frac{4u(u^2-2)}{u} du = 4 \int (u^2-2) du = 4 \left[\frac{u^3}{3} - 2u \right] + c \\
= \frac{4}{3} u^3 - 8u + c = \frac{4}{3} \left(\sqrt{2+\sqrt{x}} \right)^3 - 8\sqrt{2+\sqrt{x}} + c
\end{aligned}$$

الجزء الثالث (19 درجة) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{2}{x}} \text{ احسب (1)}$$

الحل :

$$y = (1+x)^{\frac{2}{x}} \implies \ln|y| = \ln \left| (1+x)^{\frac{2}{x}} \right| = \frac{2}{x} \ln|1+x| = \frac{2 \ln|1+x|}{x} \text{ ضع}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|y| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln|1+x|}{x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \left(\frac{1}{1+x} \right)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1+x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|y| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln|1+x|}{x} = 0 \text{ وبالتالي}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{2}{x}} = e^0 = 1 \text{ إذاً}$$

(2) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ متقارباً أم متباعداً .

الحل :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\tan^{-1}(e^x)]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} [\tan^{-1}(e^t) - \tan^{-1}(1)] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

التكامل المعتل متقارب وقيمه $\frac{\pi}{4}$.

(3) أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = -x^2$ و $y = x^2 + 1$ و $x = 2$ و $x = -1$ وجد مساحتها .

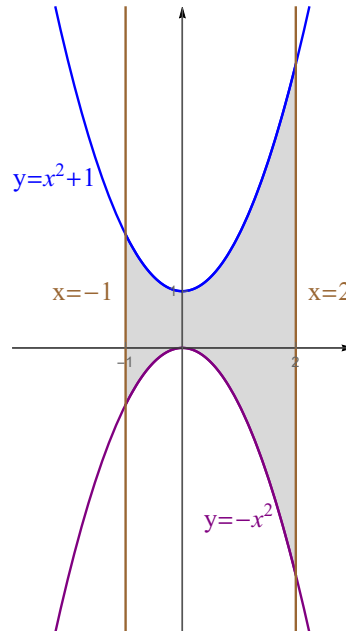
الحل :

المنحنى $y = -x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأسفل .

المنحنى $y = x^2 + 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 1)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $x = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2, 0)$.

المنحنى $x = -1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(-1, 0)$.



$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^2 [(x^2 + 1) - (-x^2)] dx = \int_{-1}^2 (2x^2 + 1) dx = \left[2 \frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^2 \\
&= \left(2 \frac{(2)^3}{3} + 2 \right) - \left(2 \frac{(-1)^3}{3} - 1 \right) = \left(\frac{16}{3} + 2 \right) - \left(\frac{-2}{3} - 1 \right) \\
&= \frac{16}{3} + 2 + \frac{2}{3} + 1 = \frac{18}{3} + 3 = 6 + 3 = 9
\end{aligned}$$

(4) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = -x + 1$ و $y = 1 - x^2$ ثم جد حجم الجسم الناتج من دوران هذه المنطقة حول محور x .

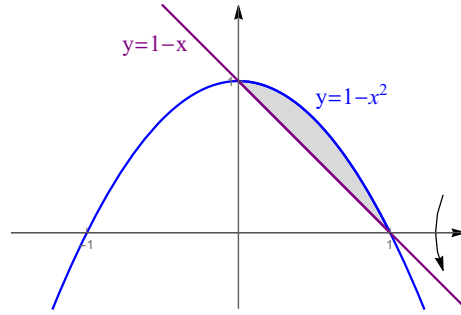
الحل :

$y = 1 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 1)$ وفتحته للأسفل .

$y = -x + 1$ يمثل خط مستقيم يمر بالنقطة $(0, 1)$ وميله -1 .

إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = -x + 1$ و $y = 1 - x^2$:

$$-x + 1 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$



باستخدام طريقة الوردات :

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 [(1 - x^2)^2 - (1 - x)^2] dx = \pi \int_0^1 [(1 - 2x^2 + x^4) - (1 - 2x + x^2)] dx \\
&= \pi \int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4 - 1 + 2x - x^2) dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 3x^2 + 2x) dx \\
&= \pi \left[\frac{x^5}{5} - x^3 + x^2 \right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{5} - 1 + 1 \right) - (0 + 0 + 0) \right] = \frac{\pi}{5}
\end{aligned}$$

(5) جد طول المنحنى $y = 1 + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ من $x = 0$ إلى $x = 8$.

الحل :

$$y' = 0 + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \right) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

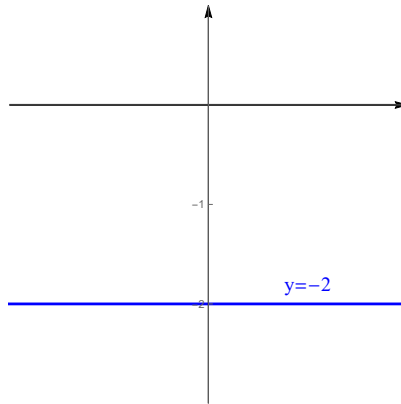
$$\begin{aligned} L &= \int_0^8 \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} dx = \int_0^8 \sqrt{1+x} dx = \int_0^8 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^8 \\ &= \frac{2}{3} (8+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (0+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (9)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} (27-1) = \frac{52}{3} \end{aligned}$$

(6) حول المعادلة القطبية $r = -2 \csc \theta$ إلى معادلة كارتيزية وارسمها.

الحل :

$$r = -2 \csc \theta \implies r = \frac{-2}{\sin \theta} \implies r \sin \theta = -2 \implies y = -2$$

المعادلة $y = -2$ تمثل خط مستقيم يوازي محور x ويمر بالنقطة $(0, -2)$.

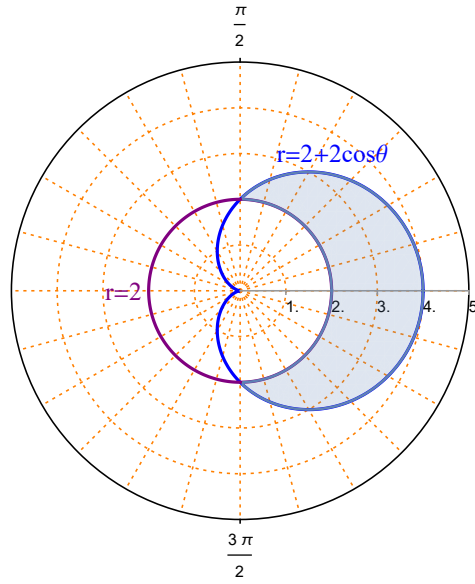


(7) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2 + 2 \cos \theta$ وخارج المنحنى $r = 2$ وجد مساحتها.

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2 \cos \theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ، ونصف قطرها 2 .



نقاط تقاطع المنحني $r = 2 + 2 \cos \theta$ مع المنحني $r = 2$:

$$2 + 2 \cos \theta = 2 \implies 2 \cos \theta = 0 \implies \cos \theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{3\pi}{2}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(2 + 2 \cos \theta)^2 - (2)^2 \right] d\theta \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 + 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta - 4) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[8 \cos \theta + 4 \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) \right] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 \cos \theta + 2 + 2 \cos 2\theta) d\theta = [8 \sin \theta + 2\theta + \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(8 \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) + 2 \left(\frac{\pi}{2} \right) + \sin(\pi) \right) - (8 \sin(0) + 2(0) + \sin(0)) \\ &= (8 + \pi + 0) - (0 + 0 + 0) = 8 + \pi \end{aligned}$$

111 رياض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الثاني 1443 هـ
 حل الاختبار الفصلي
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (12 درجة) :

$$(1) \text{ استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد } \int_0^2 (4x - 3) dx$$

الحل : $f(x) = 4x - 3$ و $[a, b] = [0, 2]$

$$\Delta_x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_k = a + k \Delta_x = 0 + k \left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2k}{n}$$

$$f(x_k) = 4 \left(\frac{2}{n}\right) - 3 = \frac{8k}{n} - 3$$

$$R_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_x = \sum_{k=1}^n \left(\frac{8k}{n} - 3\right) \left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{16k}{n^2} - \frac{6}{n}\right)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{16k}{n^2} - \sum_{k=1}^n \frac{6}{n} = \frac{16}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{16}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{6}{n} (n) = 8 \left(\frac{n+1}{n}\right) - 6$$

$$\int_0^2 (4x - 3) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[8 \left(\frac{n+1}{n}\right) - 6\right] = 8(1) - 6 = 2$$

$$(2) \text{ جد } F'(x) \text{ إذا كانت } F(x) = \int_{e^{2x}}^{2^{\cos x}} \frac{1}{\sqrt{2-t^2}} dt$$

الحل :

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{e^{2x}}^{2^{\cos x}} \frac{1}{\sqrt{2-t^2}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 - (2^{\cos x})^2}} 2^{\cos x} (-\sin x) \ln 2 - \frac{1}{\sqrt{2 - (e^{2x})^2}} e^{2x} (2)$$

$$= \frac{-2^{\cos x} \sin x \ln 2}{\sqrt{2 - 2^{2 \cos x}}} - \frac{2 e^{2x}}{\sqrt{2 - e^{4x}}}$$

احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$y = 5^{2x} \cosh^{-1} (e^{\sqrt{x}}) \quad (3)$$

: الحل

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (5^{2x} (2) \ln 5) \cosh^{-1} (e^{\sqrt{x}}) + 5^{2x} \left[\frac{1}{\sqrt{(e^{\sqrt{x}})^2 - 1}} e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \right] \\ &= 5^{2x} 2 \ln 5 \cosh^{-1} (e^{\sqrt{x}}) + \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x} \sqrt{e^{2\sqrt{x}} - 1}} \end{aligned}$$

$$y = \sin^{-1} x \log_6 |8 + \tan 2x| \quad (4)$$

: الحل

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \log_6 |8 + \tan 2x| + \sin^{-1} x \left(\frac{\sec^2(2x) (2)}{8 + \tan 2x} \frac{1}{\ln 6} \right) \\ &= \frac{\log_6 |8 + \tan 2x|}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2 \sec^2(2x) \sin^{-1} x}{(8 + \tan 2x) \ln 6} \end{aligned}$$

$$y = (\tan x)^{\sec x} \quad (5)$$

: الحل

$$y = (\tan x)^{\sec x} \implies \ln |y| = \ln |(\tan x)^{\sec x}| = \sec x \ln |\tan x|$$

ياشتقاق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = (\sec x \tan x) \ln |\tan x| + \sec x \left(\frac{\sec^2 x}{\tan x} \right)$$

$$y' = y \left[\sec x \tan x \ln |\tan x| + \frac{\sec^3 x}{\tan x} \right]$$

$$y' = (\tan x)^{\sec x} \left[\sec x \tan x \ln |\tan x| + \frac{\sec^3 x}{\tan x} \right]$$

$$y = \coth^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) \quad (6)$$

: الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(\frac{-1}{x^2} \right) = \frac{1}{x^2 \left[1 - \frac{1}{x^2}\right]} = \frac{1}{x^2 - 1}$$

السؤال الثاني (18 درجة): أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{\sec^2(\ln x)}{x} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{\sec^2(\ln x)}{x} dx = \int \sec^2(\ln x) \left(\frac{1}{x}\right) dx = \tan(\ln x) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \sec^2(f(x)) f'(x) dx = \tan(f(x)) + c$$

$$\int (7 - x^2)^3 x dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int (7 - x^2)^3 x dx = \frac{1}{-2} \int (7 - x^2)^3 (-2x) dx = \frac{1}{-2} \frac{(7 - x^2)^4}{4} + c$$

$$\cdot n \neq -1 \text{ حيث } \int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \text{ باستخدام القانون}$$

$$\int_0^1 x 10^{2-x^2} dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int_0^1 x 10^{2-x^2} dx = \frac{1}{-2} \int_0^1 10^{2-x^2} (-2x) dx = \frac{1}{-2} \left[\frac{10^{2-x^2}}{\ln 10} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{-2} \left[\frac{10^{2-(1)^2}}{\ln 10} - \frac{10^{2-(0)^2}}{\ln 10} \right] = \frac{1}{-2} \left[\frac{10^1}{\ln 10} - \frac{10^2}{\ln 10} \right] = \frac{1}{-2} \left(\frac{-90}{\ln 10} \right) = \frac{45}{\ln 10}$$

$$\cdot \int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c \text{ باستخدام القانون}$$

$$\int \frac{x-1}{x+2} dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \frac{x-1}{x+2} dx = \int \frac{(x+2)-3}{x+2} dx = \int \left(\frac{x+2}{x+2} - \frac{3}{x+2} \right) dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{3}{x+2}\right) dx = \int 1 dx - \int \frac{3}{x+2} dx = \int 1 dx - 3 \int \frac{1}{x+2} dx$$

$$= x - 3 \ln |x+2| + c$$

$$\cdot \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c \text{ باستخدام القانون}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{9 + e^{4x}}} dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{9 + e^{4x}}} dx = \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{(3)^2 + (e^{2x})^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 e^{2x}}{\sqrt{(3)^2 + (e^{2x})^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \sinh^{-1} \left(\frac{e^{2x}}{3} \right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 + [f(x)]^2}} dx = \sinh^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{\tanh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int \frac{\tanh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int \tanh(\sqrt{x}) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = 2 \int \tanh(\sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= 2 \ln |\cosh(\sqrt{x})| + c$$

باستخدام القانون

$$\int \tanh(f(x)) f'(x) dx = \ln |\cosh(f(x))| + c$$

$$\int \frac{3x}{x^4 + 9} dx \quad (7)$$

الحل :

$$\int \frac{3x}{x^4 + 9} dx = 3 \int \frac{x}{(x^2)^2 + (3)^2} dx = 3 \left(\frac{1}{2} \right) \int \frac{2x}{(x^2)^2 + (3)^2} dx$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x^2}{3} \right) + c = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x^2}{3} \right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{a^2 + [f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

$$\int (x+1) \sqrt{x-1} dx \quad (8)$$

$$\sqrt{x-1} = u \implies x-1 = u^2 \implies x = u^2 + 1 \implies x+1 = u^2 + 2 \quad \text{الحل : بوضع}$$

$$dx = 2u du$$

$$\int (x+1) \sqrt{x-1} dx = \int (u^2 + 2) u 2u du = 2 \int u^2 (u^2 + 2) du$$

$$= 2 \int (u^4 + 2u^2) du = 2 \left(\frac{u^5}{5} + 2 \frac{u^3}{3} \right) + c$$

$$= \frac{2}{5} (\sqrt{x-1})^5 + \frac{4}{3} (\sqrt{x-1})^3 + c = \frac{2}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int e^{-2x} \cosh x dx \quad (9)$$

الحل :

$$\int e^{-2x} \cosh x dx = \int e^{-2x} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) dx = \int \left(\frac{e^{-x} + e^{-3x}}{2} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{2} \right) dx = \frac{1}{2} (-1) \int e^{-x} (-1) dx + \frac{1}{2} \frac{1}{-3} \int e^{-3x} (-3) dx$$

$$= \frac{-1}{2} e^{-x} - \frac{1}{6} e^{-3x} + c = -\frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^{-3x}}{6} + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c \quad \text{باستخدام القانون}$$

111 رياض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الثاني 1443 هـ
 حل الاختبار النهائي
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

الجزء الأول (7 درجات):

(1) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = (x - 2)^2$ على الفترة $[1, 4]$

$$\text{الحل : باستخدام العلاقة } (b - a)f(c) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{حيث } [a, b] = [1, 4] \text{ و } f(x) = (x - 2)^2$$

$$(4 - 1)(c - 2)^2 = \int_1^4 (x - 2)^2 dx$$

$$3(c - 2)^2 = \left[\frac{(x - 2)^3}{3} \right]_1^4 = \frac{(4 - 2)^3}{3} - \frac{(1 - 2)^3}{3} = \frac{8}{3} - \left(\frac{-1}{3} \right) = \frac{9}{3} = 3$$

$$3(c - 2)^2 = 3 \implies (c - 2)^2 = 1 \implies c - 2 = \pm 1 \implies c = 3, c = 1$$

لاحظ أن $3 \in (1, 4)$ ، بينما $1 \notin (1, 4)$.

قيمة c المطلوبة هي 3 .

$$(2) \text{ جد } F'(x) \text{ إذا كانت } F(x) = \int_{-3x}^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{t^2 + 1} dt$$

$$\text{الحل : } F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{-3x}^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{t^2 + 1} dt$$

$$F'(x) = \frac{(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2 + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{(-3x)^2}{(-3x)^2 + 1} (-3) = \frac{x}{2\sqrt{x}(x + 1)} + \frac{27x^2}{9x^2 + 1}$$

$$(3) \text{ جد } f'(x) \text{ إذا كانت } f(x) = \tanh^{-1}(e^{3x^2}) + \log_2 |\sinh(2x) + 3^{x+1}|$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{1 - (e^{3x^2})^2} (e^{3x^2} (6x)) + \frac{\cosh(2x) (2) + 3^{x+1} (1) \ln 3}{\sinh(2x) + 3^{x+1}} \frac{1}{\ln 2}$$

$$= \frac{6x e^{3x^2}}{1 - e^{6x^2}} + \frac{2 \cosh(2x) + 3^{x+1} \ln 3}{(\sinh(2x) + 3^{x+1}) \ln 2}$$

الجزء الثاني (14 درجة): أحسب التكاملات التالية :

$$\int \frac{3}{\sqrt{x^2 - 8x + 25}} dx \quad (1)$$

الحل : باستخدام الإكمال إلى مربع كامل

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{\sqrt{x^2 - 8x + 25}} dx &= \int \frac{3}{\sqrt{(x^2 - 8x + 16) + 9}} dx = 3 \int \frac{1}{\sqrt{(x-4)^2 + (3)^2}} dx \\ &= 3 \sinh^{-1} \left(\frac{x-4}{3} \right) + c \end{aligned}$$

$$a > 0 \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 + [f(x)]^2}} dx = \sinh^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c \text{ باستخدام القانون}$$

$$\int x \sec^2 x dx \quad (2)$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u = x \quad dv = \sec^2 x dx \\ du = dx \quad v = \tan x \end{aligned}$$

$$\int x \sec^2 x dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \ln |\sec x| + c$$

$$\int \frac{1}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \quad (3)$$

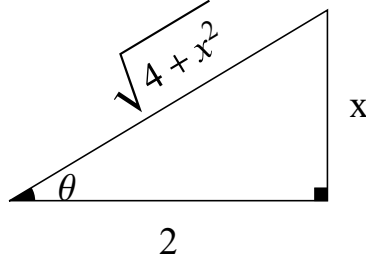
الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

$$x = 2 \tan \theta \implies \tan \theta = \frac{x}{2} \text{ ضع}$$

$$dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} (4+x^2)^{\frac{3}{2}} &= (4+4 \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = [4(1+\tan^2 \theta)]^{\frac{3}{2}} = [4 \sec^2 \theta]^{\frac{3}{2}} \\ &= (4)^{\frac{3}{2}} (\sec^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = 8 \sec^3 \theta \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \frac{2 \sec^2 \theta}{8 \sec^3 \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sec \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int \cos \theta d\theta = \frac{1}{4} \sin \theta + c$$



من المثلث نجد أن : $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

$$\int \frac{1}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + c$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2} dx \quad (4)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A_1 x(x-1)}{x^2(x-1)} + \frac{A_2(x-1)}{x^2(x-1)} + \frac{A_3 x^2}{(x-1)x^2}$$

$$x^2+1 = A_1 x(x-1) + A_2(x-1) + A_3 x^2$$

$$x^2+1 = A_1 x^2 - A_1 x + A_2 x - A_2 + A_3 x^2$$

$$x^2+1 = (A_1 + A_3)x^2 + (-A_1 + A_2)x - A_2$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$A_1 + A_3 = 1 \quad \rightarrow \quad (1)$$

$$-A_1 + A_2 = 0 \quad \rightarrow \quad (2)$$

$$-A_2 = 1 \quad \rightarrow \quad (3)$$

من المعادلة (3) نجد أن : $A_2 = -1$

من المعادلة (2) نجد أن : $A_1 = A_2 = -1$

من المعادلة (1) نجد أن : $A_3 = 1 - A_1 = 1 - (-1) = 2$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-1} \right) dx$$

$$= - \int \frac{1}{x} dx - \int x^{-2} dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= -\ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} + 2\ln|x-1| + c = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + c$$

$$\int \sqrt{3+\sqrt{x}} dx \quad (5)$$

الحل :

$$u = \sqrt{3+\sqrt{x}} \implies u^2 = 3 + \sqrt{x} \implies u^2 - 3 = \sqrt{x} \implies (u^2 - 3)^2 = x \text{ ضع}$$

$$2(u^2 - 3) 2u du = dx \implies 4u(u^2 - 3) du = dx$$

$$\int \sqrt{3+\sqrt{x}} dx = \int u 4u(u^2 - 3) du = 4 \int u^2(u^2 - 3) du = 4 \int (u^4 - 3u^2) du$$

$$= 4 \left(\frac{u^5}{5} - u^3 \right) + c = \frac{4}{5} u^5 - 4u^3 + c = \frac{4}{5} \left(\sqrt{3+\sqrt{x}} \right)^5 - 4 \left(\sqrt{3+\sqrt{x}} \right)^3 + c$$

الجزء الثالث (19 درجة) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^x \text{ احسب (1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^x \quad (1^\infty) : \text{الحل}$$

$$y = \left(1 + \frac{4}{x} \right)^x \implies \ln|y| = x \ln \left| 1 + \frac{4}{x} \right| \text{ ضع}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|y| = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left| 1 + \frac{4}{x} \right| \quad (\infty \cdot 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|y| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| 1 + \frac{4}{x} \right|}{\left(\frac{1}{x} \right)} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{4}{x}} \left(\frac{-4}{x^2} \right)}{\left(-\frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{1 + \frac{4}{x}} = \frac{4}{1+0} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|y| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{1 + \frac{4}{x}} = 4 \text{ وبالتالي}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^x = e^4 \text{ إذًا}$$

(2) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_2^{\infty} \frac{9}{(1-3x)^4} dx$ متقارباً أم متباعداً .

الحل :

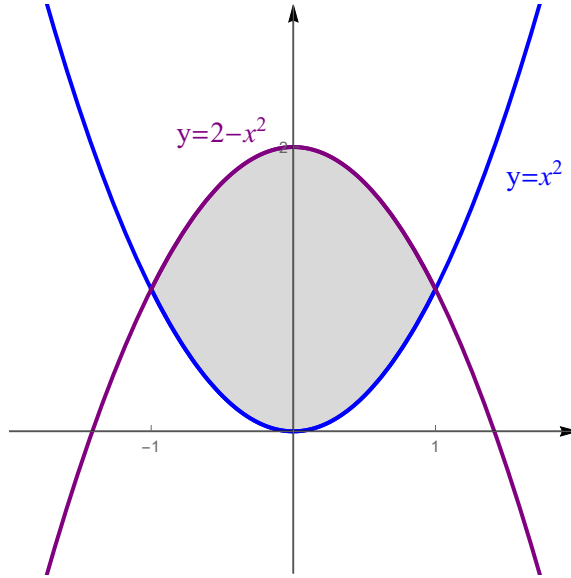
$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{9}{(1-3x)^4} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{9}{(1-3x)^4} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-3 \int_2^{\infty} (1-3x)^{-4} (-3) dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-3 \left[\frac{(1-3x)^{-3}}{-3} \right]_2^t \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(1-3x)^3} \right]_2^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(1-3t)^3} - \frac{1}{(1-6)^3} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(1-3t)^3} - \frac{1}{(-5)^3} \right] = 0 + \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \\ &\text{التكامل المعتل متقارب وقيمته } \frac{1}{125} . \end{aligned}$$

(3) أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ وجد مساحتها .

الحل :

المنحنى $y = 2 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 2)$ وفتحته للأسفل .

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$:

$$x^2 = 2 - x^2 \implies 2x^2 - 2 = 0 \implies x^2 - 1 = 0 \implies (x - 1)(x + 1) = 0 \implies x = -1, x = 1$$

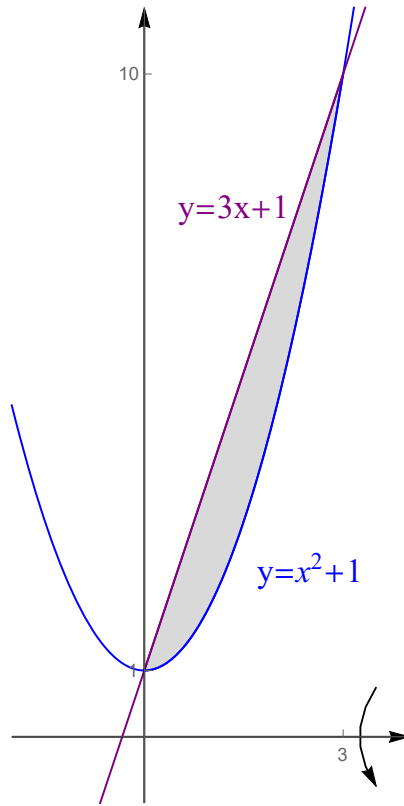
$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^1 [(2 - x^2) - (x^2)] dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = \left[2x - 2\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \\
&= \left(2(1) - \frac{2}{3}(1)^3 \right) - \left(2(-1) - \frac{2}{3}(-1)^3 \right) = \left(2 - \frac{2}{3} \right) - \left(-2 + \frac{2}{3} \right) \\
&= 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12 - 4}{3} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

(4) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 + 1$ و $y = 3x + 1$ ثم جد حجم الجسم الناتج من دوران هذه المنطقة حول محور x .

الحل :

$y = x^2 + 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 1)$ وفتحته للأعلى .

$y = 3x + 1$ يمثل خط مستقيم يمر بالنقطة $(0, 1)$ وميله 3 .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2 + 1$ و $y = 3x + 1$:

$$x^2 + 1 = 3x + 1 \implies x^2 - 3x = 0 \implies x(x - 3) = 0 \implies x = 0, x = 3$$

باستخدام طريقة الوردات :

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^3 [(3x+1)^2 - (x^2+1)^2] dx = \pi \int_0^3 [(9x^2+6x+1) - (x^4+2x^2+1)^2] dx \\
 &= \pi \int_0^3 [9x^2+6x+1 - x^4 - 2x^2 - 1] dx = \pi \int_0^3 [-x^4+7x^2+6x] dx \\
 &= \pi \left[-\frac{x^5}{5} + 7\frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^3 = \pi \left[\left(-\frac{3^5}{5} + 7\frac{3^3}{3} + 3(3^2) \right) - (0+0+0) \right] \\
 &= \pi \left[-\frac{3^5}{5} + 7(3^2) + 3(3^2) \right] = 3^2\pi \left[-\frac{3^3}{5} + 7 + 3 \right] = 9\pi \left[-\frac{27}{5} + 10 \right] \\
 &= 9\pi \left[-\frac{27}{5} + \frac{50}{5} \right] = 9\pi \left[\frac{23}{5} \right] = \frac{207\pi}{5}
 \end{aligned}$$

(5) جد طول المنحنى $y = \pi + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ من $x = 0$ إلى $x = 8$.

الحل :

$$y' = 0 + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \right) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^8 \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} dx = \int_0^8 \sqrt{1+x} dx = \int_0^8 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^8 \\
 &= \frac{2}{3} (8+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (0+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (9)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} (27-1) = \frac{52}{3}
 \end{aligned}$$

(6) حول المعادلة الكارتيزية $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 5y$ إلى معادلة قطبية. (حيث $y > 0$)

الحل :

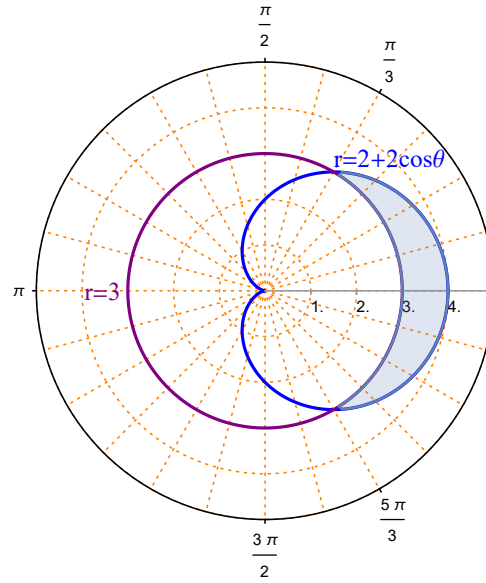
$$\begin{aligned}
 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 5y &\implies \frac{r \cos \theta}{\sqrt{r^2}} = 5r \sin \theta \implies \frac{r \cos \theta}{r} = 5r \sin \theta \\
 \implies \cos \theta = 5r \sin \theta &\implies r = \frac{1 \cos \theta}{5 \sin \theta} = \frac{1}{5} \cot \theta
 \end{aligned}$$

(7) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2 + 2 \cos \theta$ وخارج المنحنى $r = 3$ وجد مساحتها.

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2 \cos \theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 3$ يمثل دائرة مركزها القطب ، ونصف قطرها 3 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 + 2 \cos \theta$ مع المنحنى $r = 3$:

$$2 + 2 \cos \theta = 3 \implies 2 \cos \theta = 1 \implies \cos \theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3}, \theta = \frac{5\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} [(2 + 2 \cos \theta)^2 - (3)^2] d\theta \right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4 + 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta - 9) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} [-5 + 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[-5 + 8 \cos \theta + 4 \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) \right] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-5 + 8 \cos \theta + 2 + 2 \cos 2\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-3 + 8 \cos \theta + 2 \cos 2\theta) d\theta \\ &= [-3\theta + 8 \sin \theta + \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left(-3 \left(\frac{\pi}{3} \right) + 8 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) + \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) - (-3(0) + 8 \sin(0) + \sin(0)) \\ &= \left(-\pi + 8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - (0 + 0 + 0) = \frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi \end{aligned}$$