111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1443 هـ
حل الاختبار الفصلي
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

السؤال الأول (12 درجة) :

(1) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x)=\int_{e^{\sin x}}^{2^{\sqrt{x}}} \frac{1}{\sqrt{2+t^2}}\,dt$

الحل :

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{e^{\sin x}}^{2^{\sqrt{x}}} \frac{1}{\sqrt{2+t^2}}\,dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2+\left(2^{\sqrt{x}}\right)^2}}\,2^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln 2-\frac{1}{\sqrt{2+\left(e^{\sin x}\right)^2}}\,e^{\sin x}\cos x$$

$$=\frac{2^{\sqrt{x}}\ln 2}{2\sqrt{x}\,\sqrt{2+4^{\sqrt{x}}}}-\frac{e^{\sin x}\cos x}{\sqrt{2+e^{2\sin x}}}$$

احسب $\frac{dy}{dx}$ فيمايلي :

(2) $y=3^{3x}\ \sin^{-1}(e^x)$

الحل :

$$\frac{dy}{dx}=\left(3^{3x}\ (3)\ \ln 3\right)\ \sin^{-1}(e^x)+3^{3x}\ \left(\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\ e^x\right)$$

$$=3^{3x+1}\ln 3\ \sin^{-1}(e^x)+\frac{3^x\ e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

(3) $y=\sqrt[4]{x}\ \log_4\left|2+\tan(2x^2)\right|$

الحل :

$$y=\sqrt[4]{x}\ \log_4\left|2+\tan(2x^2)\right|=x^{\frac{1}{4}}\ \log_4\left|2+\tan(2x^2)\right|$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\right)\log_4\left|2+\tan(2x^2)\right|+x^{\frac{1}{4}}\ \left(\frac{\sec^2(2x^2)\,4x}{2+\tan(2x^2)}\ \frac{1}{\ln 4}\right)$$

$$=\frac{\log_4\left|2+\tan(2x^2)\right|}{4x^{\frac{3}{4}}}+\frac{4x^{\frac{5}{4}}\ \sec^2(2x^2)}{\ln 4\left[2+\tan(2x^2)\right]}$$

$$y = \ln\left|\frac{\sqrt[3]{x^2+1}\ \sec(2x)}{\sqrt{x+\sin x}}\right| \quad (4)$$

الحل :

$$y = \ln\left|\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}\ \ \sec(2x)}{(x+\sin x)^{\frac{1}{2}}}\right| = \ln\left|\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}\ \ \sec(2x)\right| - \ln\left|(x+\sin x)^{\frac{1}{2}}\right|$$

$$= \ln\left|\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}\right| + \ln|\sec(2x)| - \ln\left|(x+\sin x)^{\frac{1}{2}}\right|$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x^2+1| + \ln|\sec(2x)| - \frac{1}{2}\ln|x+\sin x|$$

باشتقاق الطرفين

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) + \frac{2\sec(2x)\ \tan(2x)}{\sec(2x)} - \frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos x}{x+\sin x}\right)$$

$$y' = \frac{2x}{3(x^2+1)} + 2\tan(2x) - \frac{1+\cos x}{2(x+\sin x)}$$

$$y = (\sec x)^{\tan x} \quad (5)$$

الحل :

$$y = (\sec x)^{\tan x} \implies \ln|y| = \ln\left|(\sec x)^{\tan x}\right| = \tan x\ \ln|\sec x|$$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = \sec^2 x\ \ln|\sec x| + \tan x\ \left(\frac{\sec x \tan x}{\sec x}\right)$$

$$y' = y\ \left[\sec^2 x\ \ln|\sec x| + \tan^2 x\right]$$

$$y' = (\sec x)^{\tan x}\ \left[\sec^2 x\ \ln|\sec x| + \tan^2 x\right]$$

$$y = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (6)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}}\ \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2\ \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}}$$

السؤال الثاني (18 درجة) : أحسب التكاملات التالية

(1) $\displaystyle\int \frac{\csc^2\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{\csc^2\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx = \int \csc^2\left(\sqrt{x}\right)\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \csc^2\left(\sqrt{x}\right)\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$= 2\left(-\cot\left(\sqrt{x}\right)\right) + c = -2\cot\left(\sqrt{x}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \csc^2\left(f(x)\right)\,f'(x)\,dx = -\cot\left(f(x)\right) + c$$

(2) $\displaystyle\int \left(x^2-2\right)^5\,x\,dx$

الحل :

$$\int \left(x^2-2\right)^5\,x\,dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2-2\right)^5\,(2x)\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-2)^6}{6} + c$$

باستخدام القانون $\displaystyle\int [f(x)]^n\,f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ حيث $n \neq -1$.

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\,10^{1+x^2}\,dx$

الحل :

$$\int_0^1 x\,10^{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 10^{1+x^2}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{10^{1+x^2}}{\ln 10}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{10^{1+1^2}}{\ln 10} - \frac{10^{1+0^2}}{\ln 10}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{10^2}{\ln 10} - \frac{10}{\ln 10}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{90}{\ln 10}\right) = \frac{90}{2\ln 10}$$

باستخدام القانون $\displaystyle\int a^{f(x)}\,f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$.

(4) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x+1}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{x-2}{x+1}\,dx = \int \frac{(x+1)-3}{x+1}\,dx = \int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{3}{x+1}\right)\,dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{3}{x+1}\right)\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{3}{x+1}\,dx = \int 1\,dx - 3\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= x - 3\ln|x+1| + c$$

باستخدام القانون $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$.

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{16+e^{6x}}}\,dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{16+e^{3x}}}\,dx = \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{(4)^2+\left(e^{3x}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3\,e^{3x}}{\sqrt{(4)^2+\left(e^{3x}\right)^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\sinh^{-1}\left(\frac{e^{3x}}{4}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2+[f(x)]^2}}\,dx = \sinh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{\coth(\ln x)}{x}\,dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int \frac{\coth(\ln x)}{x}\,dx = \int \coth(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = \ln|\sinh(\ln x)| + c$$

باستخدام القانون

$$\int \coth(f(x))\;f'(x)\,dx = \ln|\sinh(f(x))| + c$$

$$\int \frac{x}{x^4+16}\,dx \quad (7)$$

الحل :

$$\int \frac{x}{x^4+16}\,dx = \int \frac{x}{\left(x^2\right)^2+(4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\left(x^2\right)^2+(4)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\ \tan^{-1}\left(\frac{x^2}{4}\right) + c = \frac{1}{8}\ \tan^{-1}\left(\frac{x^2}{4}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{a^2 + [f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\ \tan^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c\ .$$

(8) $\int (x-1)\sqrt{x+1}\,dx$

الحل : بوضع $\sqrt{x+1} = u \implies x+1 = u^2 \implies x = u^2 - 1 \implies x - 1 = u^2 - 2$

$$dx = 2u\,du$$

$$\int (x-1)\sqrt{x+1}\,dx = \int \left(u^2 - 2\right)\ u\,2u\,du = 2\int u^2\left(u^2-2\right)\ du$$

$$= 2\int \left(u^4 - 2u^2\right)\ du = 2\left(\frac{u^5}{5} - 2\,\frac{u^3}{3}\right) + c$$

$$= \frac{2}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5 - \frac{4}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + c = \frac{2}{5}\ (x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}\ (x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

(9) $\int e^{2x}\sinh x\,dx$

الحل :

$$\int e^{2x}\sinh x\,dx = \int e^{2x}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\ dx = \int \left(\frac{e^{3x} - e^x}{2}\right)\ dx$$

$$= \int \left(\frac{e^{3x}}{2} - \frac{e^x}{2}\right)\ dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\int e^{3x}\,(3)\,dx - \frac{1}{2}\int e^x\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\,e^{3x} - \frac{1}{2}\,e^x + c = \frac{e^{3x}}{6} - \frac{e^x}{2} + c$$

باستخدام القانون $\int e^{f(x)}\ f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1443 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

الجزء الأول (7 درجات) :

(1) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ على الفترة $[1,9]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ و $[a,b] = [1,9]$

$$(9-1)\ \sqrt[3]{c-1} = \int_1^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$$

$$8\ \sqrt[3]{c-1} = \int_1^9 (x-1)^{\frac{1}{3}}\ dx = \left[\frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_1^9 = \left[\frac{3}{4}\ (x-1)^{\frac{4}{3}}\right]_1^9$$

$$8\ \sqrt[3]{c-1} = \frac{3}{4}\ (9-1)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}\ (1-1)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}\ (8)^{\frac{4}{3}} - 0 = \frac{3}{4}\ (2)^4 = \frac{3}{4}\ (16) = 12$$

$$\sqrt[3]{c-1} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \implies c-1 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} \implies c = \frac{27}{8} + 1 = \frac{35}{8}$$

لاحظ أن $c = \frac{35}{8} \in (1,9)$.

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x) = \int_{\sin 3x}^{e^{5x}} \sqrt{4+t^2}\,dt$.

الحل : $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\sin 3x}^{e^{5x}} \sqrt{4+t^2}\,dt$

$$F'(x) = \sqrt{4+\left(e^{5x}\right)^2}\ \left(e^{5x}\,5\right) - \sqrt{4+(\sin 3x)^2}\ (\cos 3x\,(3))$$

$$= 5e^{5x}\sqrt{4+e^{10x}} - 3\cos 3x\sqrt{4+\sin^2 3x}$$

(3) جد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = \sinh^{-1}\left(4^{x+1}\right) + \log_2\left|\cosh(x^2)\right|$.

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(4^{x+1}\right)^2}}\left(4^{x+1}\ (1)\ln 4\right) + \frac{\sinh(x^2)\ (2x)}{\cosh(x^2)}\ \frac{1}{\ln 2}$$

$$= \frac{4^{x+1}\ln 4}{\sqrt{1+4^{2x+2}}} + \frac{2x\ \sinh(x^2)}{\cosh(x^2)\ \ln 2}$$

الجزء الثاني (14 درجة) : أحسب التكاملات التالية :

$$(1)\quad \int \frac{4}{x^2+6x+13}\,dx$$

الحل : باستخدام الإكمال إلى مربع كامل

$$\int \frac{4}{x^2+6x+13}\,dx = 4\int \frac{1}{(x^2+6x+9)+4}\,dx = 4\int \frac{1}{(x+3)^2+(2)^2}\,dx$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+3}{2}\right)\right)+c = 2\ \tan^{-1}\left(\frac{x+3}{2}\right)+c$$

باستخدام القانون $\int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\ \tan^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$ حيث $a>0$

$$(2)\quad \int x\ \sec^{-1}x\,dx$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$u = \sec^{-1}x \qquad dv = x\,dx$$
$$du = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x\ \sec^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\sec^{-1}x - \int \frac{x^2}{2}\ \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\sec^{-1}x - \frac{1}{2}\int x\ \left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\ dx = \frac{x^2}{2}\sec^{-1}x - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}(2x)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\sec^{-1}x - \frac{1}{4}\,\frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c = \frac{x^2}{2}\sec^{-1}x - \frac{1}{2}\ \sqrt{x^2-1}+c$$

$$(3)\quad \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$$

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

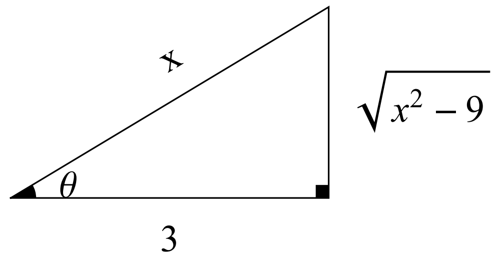
ضع $x = 3\sec\theta \implies \sec\theta = \frac{x}{3}$

$$dx = 3\sec\theta\ \tan\theta\ d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{9\sec^2\theta-9}\ (3\sec\theta\tan\theta)}{3\sec\theta}\,d\theta = \int \sqrt{9\left(\sec^2\theta-1\right)}\ \tan\theta\,d\theta$$

$$= \int \sqrt{9\tan^2\theta}\ \tan\theta\,d\theta = \int 3\tan^2\theta\,d\theta = 3\int \left(\sec^2\theta-1\right)\,d\theta$$

$$= 3\int \sec^2\theta\,d\theta - 3\int d\theta = 3\tan\theta - 3\theta + c$$



من المثلث نجد أن : $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{3}$

لاحظ أن $x = 3\sec\theta \implies \sec\theta = \dfrac{x}{3} \implies \theta = \sec^{-1}\left(\dfrac{x}{3}\right)$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx = 3\,\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} - 3\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c = \sqrt{x^2-9} - 3\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

(4) $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+8}{x^3+4x}\,dx$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{3x^2-x+8}{x^3+4x} = \frac{3x^2-x+8}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$3x^2-x+8 = A(x^2+4) + (Bx+C)x$$

$$3x^2-x+8 = Ax^2+4A+Bx^2+Cx$$

$$3x^2-x+8 = (A+B)x^2+Cx+4A$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lcr} A+B=3 & \longrightarrow & (1)\\ C=-1 & \longrightarrow & (2)\\ 4A=8 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (3) نجد أن : $A=2$

من المعادلة (1) نجد أن : $B=1$ $2+B=3 \implies$

$$\int \frac{3x^2-x+8}{x^3+4x}\,dx = \int \left(\frac{2}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}\right)\,dx$$
$$= 2\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$
$$= 2\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{(x)^2+(2)^2}\,dx$$
$$= 2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{x}}}\,dx$

الحل :

ضع $u=\sqrt{2+\sqrt{x}} \implies u^2 = 2+\sqrt{x} \implies u^2-2=\sqrt{x} \implies \left(u^2-2\right)^2 = x$

$$2\left(u^2-2\right)\,2u\,du = dx \implies 4u\left(u^2-2\right)\,du = dx$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{x}}}\,dx = \int \frac{4u\left(u^2-2\right)}{u}\,du = 4\int \left(u^2-2\right)\,du = 4\left[\frac{u^3}{3}-2u\right]+c$$
$$= \frac{4}{3}u^3 - 8u + c = \frac{4}{3}\left(\sqrt{2+\sqrt{x}}\right)^3 - 8\sqrt{2+\sqrt{x}} + c$$

الجزء الثالث (19 درجة) :

(1) احسب $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{2}{x}}$

الحل :

ضع $y=(1+x)^{\frac{2}{x}} \implies \ln|y| = \ln\left|(1+x)^{\frac{2}{x}}\right| = \frac{2}{x}\ln|1+x| = \frac{2\ln|1+x|}{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\ln|y| = \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln|1+x|}{x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(\frac{1}{1+x}\right)}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+x} = 0$$

وبالتالي $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\ln|y| = \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln|1+x|}{x} = 0$

إذاً $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{2}{x}} = e^0 = 1$

(2) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ متقارباً أم متباعداً .

الحل :

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\tan^{-1}(e^x)\right]_0^t = \lim_{t\to\infty}\left[\tan^{-1}\left(e^t\right) - \tan^{-1}(1)\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

التكامل المعتل متقارب وقيمته $\frac{\pi}{4}$.

(3) أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y=-x^2$ و $y=x^2+1$ و $x=2$ و $x=-1$ وجد مساحتها .

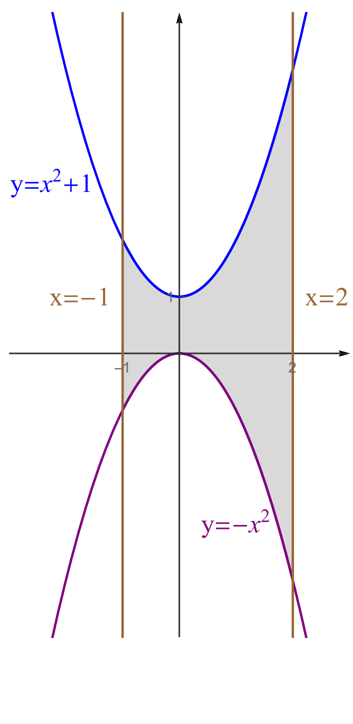
الحل :

المنحنى $y=-x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأسفل .

المنحنى $y=x^2+1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,1)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $x=2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2,0)$.

المنحنى $x=-1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(-1,0)$.



$$\mathrm{A} = \int_{-1}^{2} \left[(x^2+1) - (-x^2)\right] \, dx = \int_{-1}^{2} \left(2x^2+1\right) \, dx = \left[2\,\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(2\,\frac{(2)^3}{3} + 2\right) - \left(2\,\frac{(-1)^3}{3} - 1\right) = \left(\frac{16}{3} + 2\right) - \left(\frac{-2}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{16}{3} + 2 + \frac{2}{3} + 1 = \frac{18}{3} + 3 = 6 + 3 = 9$$

(4) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 1 - x^2$ و $y = -x + 1$ ثم جد حجم الجسم الناتج من دوران هذه المنطقة حول محور x .

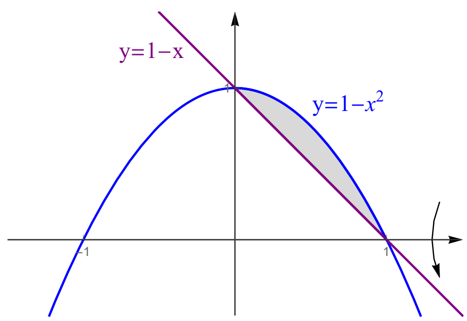
الحل :

$y = 1 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 1)$ وفتحته للأسفل .

$y = -x + 1$ يمثل خط مستقيم يمر بالنقطة $(0, 1)$ وميله -1 .

إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 1 - x^2$ و $y = -x + 1$:

$$-x + 1 = 1 - x^2 \implies x^2 - x = 0 \implies x(x-1) = 0 \implies x = 0 \,,\; x = 1$$



باستخدام طريقة الوردات :

$$\mathrm{V} = \pi \int_{0}^{1} \left[\left(1-x^2\right)^2 - (1-x)^2\right] \, dx = \pi \int_{0}^{1} \left[\left(1 - 2x^2 + x^4\right) - \left(1 - 2x + x^2\right)\right] \, dx$$

$$= \pi \int_{0}^{1} \left(1 - 2x^2 + x^4 - 1 + 2x - x^2\right) \, dx = \pi \int_{0}^{1} \left(x^4 - 3x^2 + 2x\right) \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - x^3 + x^2\right]_{0}^{1} = \pi \left[\left(\frac{1}{5} - 1 + 1\right) - (0+0+0)\right] = \frac{\pi}{5}$$

(5) جد طول المنحنى $y = 1 + \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}$ من $x = 0$ إلى $x = 8$.

الحل :

$$y' = 0 + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$\mathrm{L} = \int_0^8 \sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_0^8 \sqrt{1+x}\,dx = \int_0^8 (x+1)^{\frac{1}{2}}\ dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^8$$

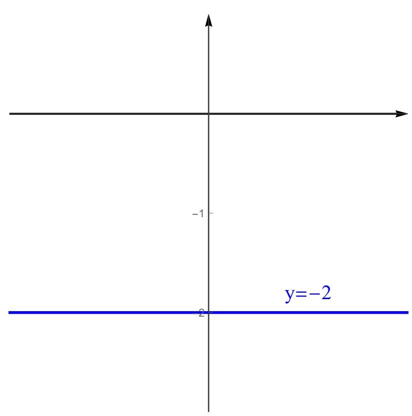
$$= \frac{2}{3}(8+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(27-1) = \frac{52}{3}$$

(6) حول المعادلة القطبية $r = -2\csc\theta$ إلى معادلة كارتيزية وارسمها.

الحل :

$$r = -2\csc\theta \implies r = \frac{-2}{\sin\theta} \implies r\sin\theta = -2 \implies y = -2$$

المعادلة $y = -2$ تمثل خط مستقيم يوازي محور x ويمر بالنقطة $(0, -2)$.

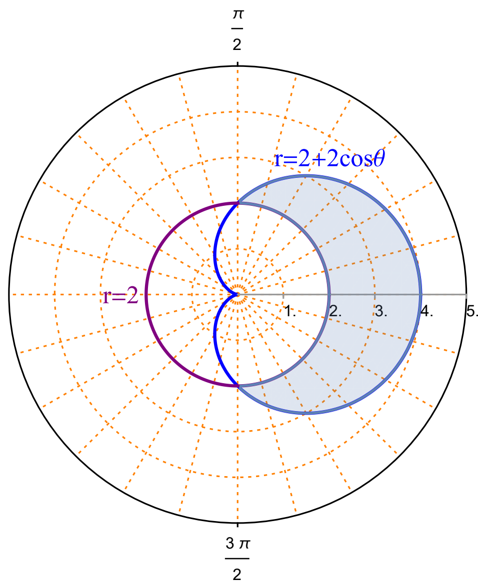


(7) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$ وخارج المنحنى $r = 2$ وجد مساحتها.

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ، ونصف قطرها 2 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$ مع المنحنى $r = 2$:

$$2 + 2\cos\theta = 2 \implies 2\cos\theta = 0 \implies \cos\theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2} \;,\; \theta = \frac{3\pi}{2}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(2+2\cos\theta)^2 - (2)^2\right]\, d\theta\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4 + 8\cos\theta + 4\cos^2 - 4\right)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[8\cos\theta + 4\cos^2\theta\right]\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[8\cos\theta + 4\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\right]\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8\cos\theta + 2 + 2\cos 2\theta)\, d\theta = [8\sin\theta + 2\theta + \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(8\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi)\right) - (8\sin(0) + 2(0) + \sin(0))$$

$$= (8 + \pi + 0) - (0 + 0 + 0) = 8 + \pi$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1443 هـ
حل الاختبار الفصلي
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

السؤال الأول (12 درجة) :

(1) استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^2 (4x-3)\,dx$.

الحل : $[a,b]=[0,2]$ و $f(x)=4x-3$.

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_k = a + k\,\Delta_x = 0 + k\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2k}{n}$$

$$f(x_k) = 4\left(\frac{2}{n}\right) - 3 = \frac{8k}{n} - 3$$

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_x = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k}{n}-3\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{16k}{n^2}-\frac{6}{n}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{16k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{6}{n} = \frac{16}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k - \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}1 = \frac{16}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{6}{n}\,(n) = 8\left(\frac{n+1}{n}\right) - 6$$

$$\int_0^2 (4x-3)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left[8\left(\frac{n+1}{n}\right)-6\right] = 8(1)-6 = 2$$

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x) = \int_{e^{2x}}^{2^{\cos x}} \frac{1}{\sqrt{2-t^2}}\,dt$

الحل :

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{e^{2x}}^{2^{\cos x}} \frac{1}{\sqrt{2-t^2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2-\left(2^{\cos x}\right)^2}}\,2^{\cos x}\,(-\sin x)\ln 2 - \frac{1}{\sqrt{2-\left(e^{2x}\right)^2}}\,e^{2x}(2)$$

$$= \frac{-2^{\cos x}\sin x\,\ln 2}{\sqrt{2-2^{2\cos x}}} - \frac{2\,e^{2x}}{\sqrt{2-e^{4x}}}$$

احسب $\frac{dy}{dx}$ فيمايلي :

$$y = 5^{2x}\ \cosh^{-1}\left(e^{\sqrt{x}}\right) \quad (3)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \left(5^{2x}\ (2)\ln 5\right)\ \cosh^{-1}\left(e^{\sqrt{x}}\right) + 5^{2x}\left[\frac{1}{\sqrt{\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 - 1}}\ e^{\sqrt{x}}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$$

$$= 5^{2x}\ 2\ln 5\ \cosh^{-1}\left(e^{\sqrt{x}}\right) + \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\ \sqrt{e^{2\sqrt{x}} - 1}}$$

$$y = \sin^{-1} x\ \log_6 |8 + \tan 2x| \quad (4)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right) \log_6 |8 + \tan 2x| + \sin^{-1} x \left(\frac{\sec^2(2x)\ (2)}{8 + \tan 2x}\ \frac{1}{\ln 6}\right)$$

$$= \frac{\log_6 |8 + \tan 2x|}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{2\sec^2(2x)\ \sin^{-1} x}{(8 + \tan 2x)\ \ln 6}$$

$$y = (\tan x)^{\sec x} \quad (5)$$

الحل :

$$y = (\tan x)^{\sec x} \implies \ln |y| = \ln \left|(\tan x)^{\sec x}\right| = \sec x\ \ln |\tan x|$$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = (\sec x \tan x)\ \ln |\tan x| + \sec x\ \left(\frac{\sec^2 x}{\tan x}\right)$$

$$y' = y\ \left[\sec x \tan x\ \ln |\tan x| + \frac{\sec^3 x}{\tan x}\right]$$

$$y' = (\tan x)^{\sec x}\ \left[\sec x \tan x\ \ln |\tan x| + \frac{\sec^3 x}{\tan x}\right]$$

$$y = \coth^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (6)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}\ \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2\left[1 - \frac{1}{x^2}\right]} = \frac{1}{x^2 - 1}$$

السؤال الثاني (18 درجة) : أحسب التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\sec^2(\ln x)}{x}\, dx$

الحل :

$$\int \frac{\sec^2(\ln x)}{x}\, dx = \int \sec^2(\ln x)\ \left(\frac{1}{x}\right)\ dx = \tan(\ln x) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \sec^2(f(x))\ f'(x)\, dx = \tan(f(x)) + c$$

(2) $\int \left(7 - x^2\right)^3\ x\, dx$

الحل :

$$\int \left(7 - x^2\right)^3\ x\, dx = \frac{1}{-2}\int \left(7 - x^2\right)^3\ (-2x)\, dx = \frac{1}{-2}\ \frac{(7 - x^2)^4}{4} + c$$

باستخدام القانون $\int [f(x)]^n\ f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ حيث $n \neq -1$.

(3) $\int_0^1 x\, 10^{2-x^2}\, dx$

الحل :

$$\int_0^1 x\, 10^{2-x^2}\, dx = \frac{1}{-2}\int_0^1 10^{2-x^2}(-2x)\, dx = \frac{1}{-2}\left[\frac{10^{2-x^2}}{\ln 10}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{-2}\left[\frac{10^{2-(1)^2}}{\ln 10} - \frac{10^{2-(0)^2}}{\ln 10}\right] = \frac{1}{-2}\left[\frac{10^1}{\ln 10} - \frac{10^2}{\ln 10}\right] = \frac{1}{-2}\left(\frac{-90}{\ln 10}\right) = \frac{45}{\ln 10}$$

باستخدام القانون $\int a^{f(x)}\ f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$.

(4) $\int \frac{x-1}{x+2}\, dx$

الحل :

$$\int \frac{x-1}{x+2}\, dx = \int \frac{(x+2) - 3}{x+2}\, dx = \int \left(\frac{x+2}{x+2} - \frac{3}{x+3}\right)\, dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{3}{x+2}\right)\, dx = \int 1\, dx - \int \frac{3}{x+2}\, dx = \int 1\, dx - 3\int \frac{1}{x+2}\, dx$$

$$= x - 3\ln|x+2| + c$$

باستخدام القانون $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c$.

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{9+e^{4x}}}\, dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{9+e^{4x}}}\, dx = \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{(3)^2+\left(e^{2x}\right)^2}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\, e^{2x}}{\sqrt{(3)^2+\left(e^{2x}\right)^2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{e^{2x}}{3}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2+[f(x)]^2}}\, dx = \sinh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{\tanh\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int \frac{\tanh\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx = \int \tanh\left(\sqrt{x}\right)\ \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\, dx = 2\int \tanh\left(\sqrt{x}\right)\ \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\, dx$$

$$= 2\ln\left|\cosh\left(\sqrt{x}\right)\right| + c$$

باستخدام القانون

$$\int \tanh\left(f(x)\right)\ f'(x)\, dx = \ln|\cosh\left(f(x)\right)| + c$$

$$\int \frac{3x}{x^4+9}\, dx \quad (7)$$

الحل :

$$\int \frac{3x}{x^4+9}\, dx = 3\int \frac{x}{\left(x^2\right)^2+(3)^2}\, dx = 3\ \left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{2x}{\left(x^2\right)^2+(3)^2}\, dx$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{1}{3}\ \tan^{-1}\left(\frac{x^2}{3}\right) + c = \frac{1}{2}\ \tan^{-1}\left(\frac{x^2}{3}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{a^2 + [f(x)]^2}\, dx = \frac{1}{a}\ \tan^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c\ .$$

(8) $\int (x+1)\,\sqrt{x-1}\, dx$

الحل : بوضع $\sqrt{x-1} = u \implies x-1 = u^2 \implies x = u^2+1 \implies x+1 = u^2+2$

$$dx = 2u\, du$$

$$\int (x+1)\,\sqrt{x-1}\, dx = \int \left(u^2+2\right)\ u\, 2u\, du = 2\int u^2\left(u^2+2\right)\ du$$

$$= 2\int \left(u^4 + 2u^2\right)\ du = 2\left(\frac{u^5}{5} + 2\,\frac{u^3}{3}\right) + c$$

$$= \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5 + \frac{4}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + c = \frac{2}{5}\ (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}\ (x-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

(9) $\int e^{-2x}\cosh x\, dx$

الحل :

$$\int e^{-2x}\cosh x\, dx = \int e^{-2x}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\ dx = \int \left(\frac{e^{-x} + e^{-3x}}{2}\right)\ dx$$

$$= \int \left(\frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{2}\right)\ dx = \frac{1}{2}\,(-1)\int e^{-x}\ (-1)\, dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{-3}\int e^{-3x}(-3)\, dx$$

$$= \frac{-1}{2}\ e^{-x} - \frac{1}{6}\, e^{-3x} + c = -\frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^{-3x}}{6} + c$$

باستخدام القانون $\int e^{f(x)}\ f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1443 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

الجزء الأول (7 درجات) :

(1) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = (x-2)^2$ على الفترة $[1,4]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = (x-2)^2$ و $[a,b] = [1,4]$

$$(4-1)\,(c-2)^2 = \int_1^4 (x-2)^2\,dx$$

$$3(c-2)^2 = \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^4 = \frac{(4-2)^3}{3} - \frac{(1-2)^3}{3} = \frac{8}{3} - \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{9}{3} = 3$$

$$3(c-2)^2 = 3 \implies (c-2)^2 = 1 \implies c-2 = \pm 1 \implies c = 3\,,\ c = 1$$

لاحظ أن $3 \in (1,4)$ ، بينما $1 \notin (1,4)$.

قيمة c المطلوبة هي 3 .

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x) = \int_{-3x}^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{t^2+1}\,dt$.

الحل : $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{-3x}^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{t^2+1}\,dt$

$$F'(x) = \frac{(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2+1}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{(-3x)^2}{(-3x)^2+1}\,(-3) = \frac{x}{2\sqrt{x}\,(x+1)} + \frac{27x^2}{9x^2+1}$$

(3) جد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = \tanh^{-1}\left(e^{3x^2}\right) + \log_2\left|\sinh(2x) + 3^{x+1}\right|$.

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{1-\left(e^{3x^2}\right)^2}\left(e^{3x^2}\,(6x)\right) + \frac{\cosh(2x)\,(2) + 3^{x+1}\,(1)\,\ln 3}{\sinh(2x) + 3^{x+1}}\,\frac{1}{\ln 2}$$

$$= \frac{6x\,e^{3x^2}}{1-e^{6x^2}} + \frac{2\cosh(2x) + 3^{x+1}\ln 3}{(\sinh(2x) + 3^{x+1})\,\ln 2}$$

الجزء الثاني (14 درجة) : أحسب التكاملات التالية :

$$(1)\quad \int \frac{3}{\sqrt{x^2-8x+25}}\,dx$$

الحل : باستخدام الإكمال إلى مربع كامل

$$\int \frac{3}{\sqrt{x^2-8x+25}}\,dx = \int \frac{3}{\sqrt{(x^2-8x+16)+9}}\,dx = 3\int \frac{1}{\sqrt{(x-4)^2+(3)^2}}\,dx$$

$$= 3\ \sinh^{-1}\left(\frac{x-4}{3}\right)+c$$

باستخدام القانون $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2+[f(x)]^2}}\,dx = \sinh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$ حيث $a>0$

$$(2)\quad \int x\ \sec^2 x\,dx$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = \sec^2 x\,dx \\ du = dx & v = \tan x \end{array}$$

$$\int x\ \sec^2 x\,dx = x\tan x - \int \tan x\,dx = x\tan x - \ln|\sec x| + c$$

$$(3)\quad \int \frac{1}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

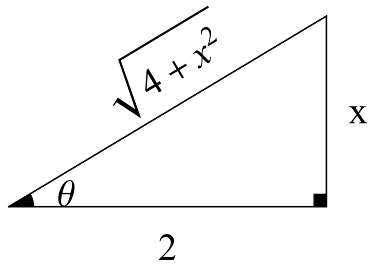
ضع $x = 2\tan\theta \implies \tan\theta = \frac{x}{2}$

$$dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$$

$$\left(4+x^2\right)^{\frac{3}{2}} = \left(4+4\ \tan^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} = \left[4\left(1+\tan^2\theta\right)\right]^{\frac{3}{2}} = \left[4\sec^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$= (4)^{\frac{3}{2}}\ \left(\sec^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} = 8\sec^3\theta$$

$$\int \frac{1}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{2\sec^2\theta}{8\sec^3\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\ \sin\theta + c$$



من المثلث نجد أن : $\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

$$\int \frac{1}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + c$$

$$(4)\quad \int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}\,dx$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A_1\,x(x-1)}{x^2(x-1)} + \frac{A_2(x-1)}{x^2(x-1)} + \frac{A_3x^2}{(x-1)x^2}$$

$$x^2+1 = A_1x(x-1) + A_2(x-1) + A_3x^2$$

$$x^2+1 = A_1x^2 - A_1x + A_2x - A_2 + A_3x^2$$

$$x^2+1 = (A_1+A_3)\,x^2 + (-A_1+A_2)\,x - A_2$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lcr} A_1 + A_3 = 1 & \longrightarrow & (1) \\ -A_1 + A_2 = 0 & \longrightarrow & (2) \\ -A_2 = 1 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (3) نجد أن : $A_2 = -1$

من المعادلة (2) نجد أن : $A_1 = A_2 = -1$

من المعادلة (1) نجد أن : $A_3 = 1 - A_1 = 1 - (-1) = 2$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-1}\right)\,dx$$

$$= -\int \frac{1}{x}\,dx - \int x^{-2}\,dx + 2\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= -\ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} + 2\ln|x-1| + c = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + c$$

(5) $\int \sqrt{3+\sqrt{x}}\,dx$

الحل :

ضع $u = \sqrt{3+\sqrt{x}} \implies u^2 = 3+\sqrt{x} \implies u^2 - 3 = \sqrt{x} \implies \left(u^2-3\right)^2 = x$

$$2\left(u^2-3\right)\,2u\,du = dx \implies 4u\left(u^2-3\right)\,du = dx$$

$$\int \sqrt{3+\sqrt{x}}\,dx = \int u\,4u(u^2-3)\,du = 4\int u^2(u^2-3)\,du = 4\int (u^4-3u^2)\,du$$

$$= 4\left(\frac{u^5}{5} - u^3\right) + c = \frac{4}{5}\,u^5 - 4u^3 + c = \frac{4}{5}\left(\sqrt{3+\sqrt{x}}\right)^5 - 4\left(\sqrt{3+\sqrt{x}}\right)^3 + c$$

الجزء الثالث (19 درجة) :

(1) احسب $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x$

الحل : (1^∞) $\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x$

ضع $y = \left(1+\frac{4}{x}\right)^x \implies \ln|y| = x\ln\left|1+\frac{4}{x}\right|$

$$\lim_{x\to\infty}\ln|y| = \lim_{x\to\infty} x\,\ln\left|1+\frac{4}{x}\right| \qquad (\infty.0)$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln|y| = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left|1+\frac{4}{x}\right|}{\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{4}{x}}\left(\frac{-4}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+\frac{4}{x}} = \frac{4}{1+0} = 4$$

وبالتالي $\lim_{x\to\infty}\ln|y| = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+\frac{4}{x}} = 4$

إذاً $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x = e^4$

(2) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_{2}^{\infty} \frac{9}{(1-3x)^4}\,dx$ متقارباً أم متباعداً .

الحل :

$$\int_{2}^{\infty} \frac{9}{(1-3x)^4}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{2}^{t} \frac{9}{(1-3x)^4}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left(-3\int_{2}^{\infty} (1-3x)^{-4}\,(-3)\,dx\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(-3\left[\frac{(1-3x)^{-3}}{-3}\right]_{2}^{t}\right) = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{(1-3x)^3}\right]_{2}^{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{(1-3t)^3} - \frac{1}{(1-6)^3}\right] = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{(1-3t)^3} - \frac{1}{(-5)^3}\right] = 0 + \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

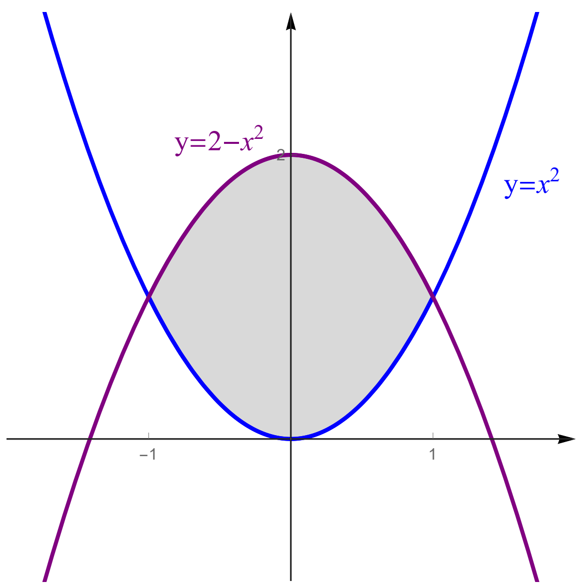
التكامل المعتل متقارب وقيمته $\frac{1}{125}$.

(3) أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 2 - x^2$ و $y = x^2$
وجد مساحتها .

الحل :

المنحنى $y = 2 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,2)$ وفتحته للأسفل .

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 2 - x^2$ و $y = x^2$:

$$x^2 = 2 - x^2 \implies 2x^2 - 2 = 0 \implies x^2 - 1 = 0 \implies (x-1)(x+1) = 0 \implies x = -1\,,\ x = 1$$

$$\mathrm{A} = \int_{-1}^{1} \left[(2-x^2)-(x^2)\right]\,dx = \int_{-1}^{1} \left(2-2x^2\right)\,dx = \left[2x - 2\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(2(1) - \frac{2}{3}\,(1)^3\right) - \left(2(-1) - \frac{2}{3}\,(-1)^3\right) = \left(2-\frac{2}{3}\right) - \left(-2+\frac{2}{3}\right)$$

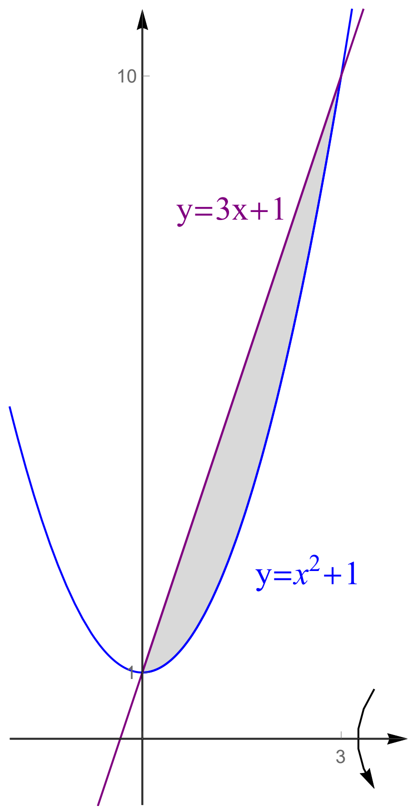
$$= 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3}$$

(4) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2+1$ و $y = 3x+1$ ثم جد حجم الجسم الناتج من دوران هذه المنطقة حول محور x .

الحل :

$y = x^2 + 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,1)$ وفتحته للأعلى .

$y = 3x + 1$ يمثل خط مستقيم يمر بالنقطة $(0,1)$ وميله 3 .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2 + 1$ و $y = 3x + 1$:

$$x^2+1 = 3x+1 \implies x^2 - 3x = 0 \implies x(x-3) = 0 \implies x = 0\,,\ x = 3$$

باستخدام طريقة الوردات :

$$\mathrm{V} = \pi \int_0^3 \left[(3x+1)^2 - (x^2+1)^2\right]\,dx = \pi \int_0^3 \left[\left(9x^2+6x+1\right) - (x^4+2x^2+1)^2\right]\,dx$$

$$= \pi \int_0^3 \left[9x^2+6x+1-x^4-2x^2-1\right]\,dx = \pi \int_0^3 \left[-x^4+7x^2+6x\right]\,dx$$

$$= \pi \left[-\frac{x^5}{5}+7\,\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^3 = \pi \left[\left(-\frac{3^5}{5}+7\,\frac{3^3}{3}+3(3^2)\right)-(0+0+0)\right]$$

$$= \pi \left[-\frac{3^5}{5}+7(3^2)+3(3^2)\right] = 3^2\pi \left[-\frac{3^3}{5}+7+3\right] = 9\pi \left[-\frac{27}{5}+10\right]$$

$$= 9\pi \left[-\frac{27}{5}+\frac{50}{5}\right] = 9\pi \left[\frac{23}{5}\right] = \frac{207\pi}{5}$$

(5) جد طول المنحنى $y = \pi + \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}$ من $x = 0$ إلى $x = 8$.

الحل :

$$y' = 0 + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$\mathrm{L} = \int_0^8 \sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_0^8 \sqrt{1+x}\,dx = \int_0^8 (x+1)^{\frac{1}{2}}\,\,dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^8$$

$$= \frac{2}{3}\,(8+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\,(0+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\,(9)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\,(27-1) = \frac{52}{3}$$

(6) حول المعادلة الكارتيزية $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 5y$ ، (حيث $y > 0$) إلى معادلة قطبية.

الحل :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 5y \implies \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2}} = 5r\sin\theta \implies \frac{r\cos\theta}{r} = 5r\sin\theta$$

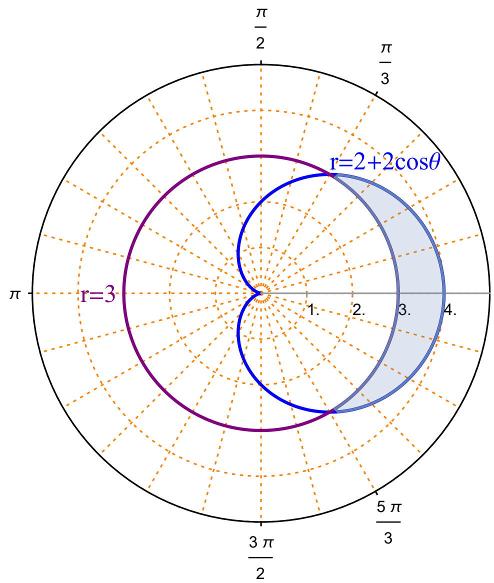
$$\implies \cos\theta = 5r\sin\theta \implies r = \frac{1}{5}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{5}\,\cot\theta$$

(7) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2+2\cos\theta$ وخارج المنحنى $r = 3$ وجد مساحتها.

الحل :

المنحنى $r = 2+2\cos\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 3$ يمثل دائرة مركزها القطب ، ونصف قطرها 3 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$ مع المنحنى $r = 3$:

$$2 + 2\cos\theta = 3 \implies 2\cos\theta = 1 \implies \cos\theta = \tfrac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3} \;,\; \theta = \frac{5\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[(2+2\cos\theta)^2 - (3)^2\right]\, d\theta\right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(4 + 8\cos\theta + 4\cos^2 - 9\right)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[-5 + 8\cos\theta + 4\cos^2\theta\right]\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[-5 + 8\cos\theta + 4\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\right]\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-5 + 8\cos\theta + 2 + 2\cos 2\theta\right)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-3 + 8\cos\theta + 2\cos 2\theta\right)\, d\theta$$

$$= \left[-3\theta + 8\sin\theta + \sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(-3\left(\frac{\pi}{3}\right) + 8\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) - \left(-3(0) + 8\sin(0) + \sin(0)\right)$$

$$= \left(-\pi + 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (0+0+0) = \frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi$$