

111 رياضيات - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الأول 1441 هـ
 حل الاختبار الفصلي الأول
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (8 درجات) :

$$(1) \text{ استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل } \int_0^2 (4x - 3) dx$$

الحل :

$$f(x) = 4x - 3, [a, b] = [0, 2]$$

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta x = 0 + k\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$R_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right) \left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[4\left(\frac{2k}{n}\right) - 3\right] \left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{8k}{n} - 3\right) \left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{16k}{n^2} - \frac{6}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{16k}{n^2} - \sum_{k=1}^n \frac{6}{n} = \frac{16}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n 1$$

$$= \frac{16}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{6}{n} n = 8 \frac{n+1}{n} - 6$$

$$\int_0^2 (4x - 3) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(8 \frac{n+1}{n} - 6\right) = 8(1) - 6 = 8 - 6 = 2$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 4 - x^2$ على الفترة $[0, 3]$

$$(b - a)f(c) = \int_a^b f(x) dx \text{ باستخدام العلاقة}$$

$$[a, b] = [0, 3] \text{ و } f(x) = 4 - x^2 \text{ حيث}$$

$$(3 - 0)(4 - c^2) = \int_0^3 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \left(4(3) - \frac{3^3}{3}\right) - \left(4(0) - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$3(4 - c^2) = \left(12 - \frac{27}{3}\right) - (0 - 0) = 12 - 9 = 3$$

$\implies 3(4 - c^2) = 3 \implies 4 - c^2 = 1 \implies c^2 = 3 \implies c = \pm\sqrt{3}$
 لاحظ أن $c = \sqrt{3} \in (0, 3)$ وبالتالي القيمة المطلوبة هي $c = -\sqrt{3} \notin (0, 3)$

$$F(x) = \int_{\ln(\sqrt{x})}^{\sqrt{x}} \frac{\sin(t^2)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt \text{ إذا كانت } F'(x) \text{ (3)}$$

الحل :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{\ln(\sqrt{x})}^{\sqrt{x}} \frac{\sin(t^2)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt = \frac{d}{dx} \int_{\frac{1}{2} \ln |x|}^{\sqrt{x}} \frac{\sin(t^2)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt \\ &= \frac{\sin((\sqrt{x})^2)}{\sqrt{(\sqrt{x})^2 - 1}} \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sin\left(\left(\frac{1}{2} \ln |x|\right)^2\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \ln |x|\right)^2 - 1}} \frac{1}{2x} \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x - 1}} \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} \frac{\sin\left(\left(\frac{1}{2} \ln |x|\right)^2\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \ln |x|\right)^2 - 1}} \end{aligned}$$

السؤال الثاني (5 درجات) : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$y = x^2 \sin^{-1}(\sin(e^x)) \quad (1)$$

الحل :

$$y = x^2 \sin^{-1}(\sin(e^x)) = x^2 e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x e^x + x^2 e^x$$

$$y = \ln \left| \frac{e^x \cot(x^2)}{\cos(2x)} \right| \quad (2)$$

الحل :

$$y = \ln \left| \frac{e^x \cot(x^2)}{\cos(2x)} \right| = \ln |e^x| + \ln |\cot(x^2)| - \ln |\cos(2x)|$$

$$y = x + \ln |\cot(x^2)| - \ln |\cos(2x)| \text{ عندئذ}$$

باشتقاق الطرفين

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 1 + \frac{(-\csc^2(x^2))(2x)}{\cot(x^2)} - \frac{(-\sin(2x))(2)}{\cos(2x)} \\ &= 1 - \frac{2x \csc^2(x^2)}{\cot(x^2)} + \frac{2 \sin(2x)}{\cos(2x)}\end{aligned}$$

السؤال الثالث (12 درجة): أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x-1}{\sqrt[4]{x}} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{\sqrt[4]{x}} dx &= \int \frac{x-1}{x^{\frac{1}{4}}} dx = \int x^{-\frac{1}{4}}(x-1) dx \\ &= \int \left(x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{1}{4}}\right) dx = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} - \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + c = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + c\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-9}} dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-9}} dx = \int \frac{e^x}{e^x \sqrt{(e^x)^2 - (3)^2}} dx = \frac{1}{3} \sec^{-1}\left(\frac{e^x}{3}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$. a > 0 \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{f(x) \sqrt{[f(x)]^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$\int x \sec^2(x^2) dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int x \sec^2(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \sec^2(x^2) (2x) dx = \frac{1}{2} \tan(x^2) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \sec^2(f(x)) f'(x) dx = \tan(f(x)) + c$$

$$u = e^x + 3 \text{ استخدم التعويض : تلميح } \int \frac{e^{2x}}{e^x + 3} dx \quad (4)$$

الحل :

$$u = e^x + 3 \implies e^x = u - 3$$

$$du = e^x dx$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 3} dx = \int \frac{e^x}{e^x + 3} e^x dx = \int \frac{u-3}{u} du = \int \left(\frac{u}{u} - \frac{3}{u} \right) du$$

$$= \int \left(1 - \frac{3}{u} \right) du = u - 3 \ln |u| + c = e^x + 3 - 3 \ln |e^x + 3| + c$$

$$\int \frac{e^{2 \ln x}}{x^3} dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{e^{2 \ln x}}{x^3} dx = \int \frac{e^{\ln x^2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2}{x^3} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int 2x^2 4^{x^3} dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int 2x^2 4^{x^3} dx = \frac{2}{3} \int 4^{x^3} (3x^2) dx = \frac{2}{3} \frac{4^{x^3}}{\ln 4} + c$$

باستخدام القانون

$$a > 0 \text{ حيث } \int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

111 رياض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الأول 1441 هـ
 حل الاختبار الفصلي الثاني
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$x > 0 \text{ حيث } y = \tanh^{-1}(\ln x) + \operatorname{sech}(\sqrt{x}) \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1 - (\ln x)^2} \frac{1}{x} + \left(-\operatorname{sech}(\sqrt{x}) \tanh(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{1}{x(1 - \ln^2 x)} - \frac{\operatorname{sech}(\sqrt{x}) \tanh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{4x + \cosh^2(5x)} \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 + 2 \cosh(5x) \sinh(5x) (5)}{2\sqrt{4x + \cosh^2(5x)}} = \frac{2 + 5 \cosh(5x) \sinh(5x)}{\sqrt{4x + \cosh^2(5x)}}$$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{e^{\cosh(x)}}{\operatorname{csch}(x)} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{e^{\cosh(x)}}{\operatorname{csch}(x)} dx = \int e^{\cosh(x)} \sinh(x) dx = e^{\cosh(x)} + c$$

باستخدام القانون

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^8 + 1}} \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^8+1}} &= \int \frac{1}{x\sqrt{(x^4)^2+(1)^2}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4\sqrt{(x^4)^2+(1)^2}} dx \\ &= \frac{1}{4} (-\operatorname{csch}^{-1}(x^4)) + c = -\frac{1}{4} \operatorname{csch}^{-1}(x^4) + c\end{aligned}$$

باستخدام القانون

$$. a > 0 \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2+a^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$\int_1^e x^8 \ln x dx \quad (3)$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned}u &= \ln x & dv &= x^8 dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= \frac{x^9}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^e x^8 \ln x dx &= \left[\frac{x^9}{9} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^9}{9} \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^9}{9} \ln x \right]_1^e - \frac{1}{9} \int_1^e x^8 dx \\ &= \left[\frac{x^9}{9} \ln x \right]_1^e - \frac{1}{9} \left[\frac{x^9}{9} \right]_1^e = \left[\frac{e^9}{9} \ln(e) - \frac{1}{9} \ln(1) \right] - \frac{1}{9} \left[\frac{e^9}{9} - \frac{1}{9} \right] = \frac{e^9}{9} - \frac{e^9}{81} + \frac{1}{81}\end{aligned}$$

$$\int e^x \sin x dx \quad (4)$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned}u &= \sin x & dv &= e^x dx \\ du &= \cos x dx & v &= e^x\end{aligned}$$

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ مرة أخرى

$$\begin{aligned}u &= \cos x & dv &= e^x dx \\ du &= -\sin x dx & v &= e^x\end{aligned}$$

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx \right)$$

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + c$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} (e^x \sin x - e^x \cos x + c)$$

$$\int \sin(7x) \cos(3x) \, dx \quad (5)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin(7x) \cos(3x) \, dx &= \int \frac{1}{2} [\sin(7x - 3x) + \sin(7x + 3x)] \, dx \\ &= \int \frac{1}{2} [\sin(4x) + \sin(10x)] \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(4x) \, dx + \frac{1}{2} \int \sin(10x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4} \int \sin(4x) (4) \, dx + \frac{1}{2} \frac{1}{10} \int \sin(10x) (10) \, dx \\ &= \frac{1}{8} (-\cos(4x)) + \frac{1}{20} (-\cos(10x)) + c = -\frac{\cos(4x)}{8} - \frac{\cos(10x)}{20} + c \end{aligned}$$

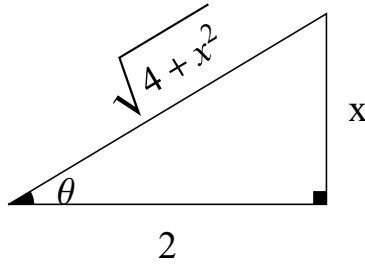
$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

$$x = 2 \tan \theta \implies \tan \theta = \frac{x}{2} \text{ ضع}$$

$$dx = 2 \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{2 \sec^2 \theta}{(4+4 \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \, d\theta = \int \frac{2 \sec^2 \theta}{(4(1+\tan^2 \theta))^{\frac{3}{2}}} \, d\theta = \int \frac{2 \sec^2 \theta}{(4 \sec^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \, d\theta \\ &= \int \frac{2 \sec^2 \theta}{(4)^{\frac{3}{2}} \sec^3 \theta} \, d\theta = \frac{2}{8} \int \frac{1}{\sec \theta} \, d\theta = \frac{1}{4} \int \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{4} \sin \theta + c \end{aligned}$$



$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \text{ من المثلث : نلاحظ أن}$$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + c$$

$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8} dx \quad (7)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 - 4x + 8} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 4x + 8} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x - 4) + 4}{x^2 - 4x + 8} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 8} dx + \frac{1}{2} \int \frac{4}{x^2 - 4x + 8} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4x + 8| + \frac{4}{2} \int \frac{1}{(x^2 - 4x + 4) + 4} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4x + 8| + 2 \int \frac{1}{(x - 2)^2 + (2)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4x + 8| + 2 \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x - 2}{2} \right) \right] + c \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4x + 8| + \tan^{-1} \left(\frac{x - 2}{2} \right) + c \end{aligned}$$

باستخدام القانونين

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

$$. a > 0 \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{a^2 + [f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + 3x + 2} dx \quad (8)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x - 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{x - 1}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A_1}{x + 1} + \frac{A_2}{x + 2}$$

$$x - 1 = A_1(x + 2) + A_2(x + 1)$$

$$-1 - 1 = A_1(-1 + 2) \implies A_1 = -2 : \text{ نضع } x = -1 \text{ نحصل على}$$

$$-2 - 1 = A_2(-2 + 1) \implies -A_2 = -3 \implies A_2 = 3 : \text{ نضع } x = -2 \text{ نحصل على}$$

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + 3x + 2} dx = \int \left(\frac{-2}{x + 1} + \frac{3}{x + 2} \right) dx$$

$$= -2 \int \frac{1}{x + 1} dx + 3 \int \frac{1}{x + 2} dx = -2 \ln |x + 1| + 3 \ln |x + 2| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}} \quad (9)$$

الحل : باستخدام التعويض $x = u^4$ ، أي أن $u = x^{\frac{1}{4}}$

$$dx = 4u^3 du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}} &= \int \frac{4u^3}{(u^4)^{\frac{1}{2}} + (u^4)^{\frac{1}{4}}} du = \int \frac{4u^3}{u^2 + u} du \\ &= \int \frac{4u^3}{u(u+1)} du = 4 \int \frac{u^2}{u+1} du \end{aligned}$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$4 \int \frac{u^2}{u+1} du = 4 \int \left(u - 1 + \frac{1}{u+1} \right) du$$

$$= 4 \left(\frac{u^2}{2} - u + \ln |u+1| \right) + c = 2u^2 - 4u + 4 \ln |u-1| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}} = 2 \left(x^{\frac{1}{4}} \right)^2 - 4x^{\frac{1}{4}} + 4 \ln \left| x^{\frac{1}{4}} + 1 \right| + c = 2x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} + 4 \ln \left| x^{\frac{1}{4}} + 1 \right| + c$$

111 رياض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الأول 1441 هـ
 حل الاختبار النهائي
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

الجزء الأول (7 درجات):

(1) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = (x-2)^2$ على الفترة $[-1, 5]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x) dx$

حيث $f(x) = (x-2)^2$ و $[a, b] = [-1, 5]$

$$(5 - (-1)) (c - 2)^2 = \int_{-1}^5 (x - 2)^2 dx$$

$$6(c-2)^2 = \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_{-1}^5 = \frac{(5-2)^3}{3} - \frac{(-1-2)^3}{3} = \frac{3^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3} = 9 - (-9) = 18$$

$$\implies (c-2)^2 = 3 \implies c-2 = \pm\sqrt{3} \implies c = 2 \pm \sqrt{3}$$

لاحظ أن $c = 2 \pm \sqrt{3}$ كلاهما يقع في الفترة $[-1, 5]$

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\ln|x|} \sin(t) dt$ حيث $x > 0$

الحل : $F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{\frac{1}{x}}^{\ln|x|} \sin(t) dt$

$$= \sin(\ln|x|) \frac{1}{x} - \sin\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\sin(\ln|x|)}{x} + \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

(3) جد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = (1 - \cosh^{-1} x)^x \sin(\tan x)$

الحل : $\ln|f(x)| = \ln\left|(1 - \cosh^{-1} x)^x \sin(\tan x)\right|$

$$\ln|f(x)| = \ln\left|(1 - \cosh^{-1} x)^x\right| + \ln|\sin(\tan x)| = x \ln|1 - \cosh^{-1} x| + \ln|\sin(\tan x)|$$

ياشتقاق الطرفين بالنسبة للمتغير x :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (1) \ln|1 - \cosh^{-1} x| + x \frac{\left(0 - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{1 - \cosh^{-1} x} + \frac{\cos(\tan x) \sec^2 x}{\sin(\tan x)}$$

$$f'(x) = f(x) \left[\ln |1 - \cosh^{-1} x| - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1} (1 - \cosh^{-1} x)} + \cot(\tan x) \sec^2 \right]$$

الجزء الثاني (16 درجة): أحسب التكاملات التالية :

$$\int 7^{2x} 9^{7^{2x}} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int 7^{2x} 9^{7^{2x}} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\ln 7} \int 9^{7^{2x}} (7^{2x} (2) \ln 7) dx = \frac{1}{2 \ln 7} \frac{9^{7^{2x}}}{\ln 9} + c$$

$$a > 0 \text{ حيث } \int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c \text{ باستخدام القانون}$$

$$\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) dx &= 2 \int_1^4 \operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx = 2 [\tanh(\sqrt{x})]_1^4 \\ &= 2 [\tanh(\sqrt{4}) - \tanh(\sqrt{1})] = 2 [\tanh(2) - \tanh(1)] = 2 \left[\frac{e^2 - e^{-2}}{e^2 + e^{-2}} - \frac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}} \right] \end{aligned}$$

$$\int \operatorname{sech}^2(f(x)) f'(x) dx = \tanh(f(x)) + c \text{ باستخدام القانون}$$

$$\int \sin^5 x \cos^3 x dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int \sin^5 x \cos^3 x dx = \int \sin^5 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^5 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

$$u = \sin x \text{ بوضع}$$

$$du = \cos x dx$$

$$\int \sin^5 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int u^5 (1 - u^2) du = \int (u^5 - u^7) du$$

$$= \frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} + c = \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}} \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}} &= \int \frac{1}{x\sqrt{1+(x^2)^2}} dx = \int \frac{x}{x^2\sqrt{1+(x^2)^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2\sqrt{1+(x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} (-\operatorname{csch}^{-1}(x^2)) + c = -\frac{1}{2} \operatorname{csch}^{-1}(x^2) + c \\ & \text{باستخدام القانون } \int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2+[f(x)]^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c \text{ حيث } a > 0 \end{aligned}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} \quad (5)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} &= \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-4x+4)+4}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-(x^2-4x+4)}} \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2)^2-(x-2)^2}} = \left[\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) \right]_1^2 \\ &= \sin^{-1}(0) - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \\ & \text{باستخدام القانون } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c \text{ حيث } a > 0 \end{aligned}$$

$$\int \frac{2x^2-1}{(4x-1)(x^2+1)} dx \quad (6)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{2x^2-1}{(4x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{4x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$2x^2-1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(4x-1)$$

$$2x^2-1 = Ax^2 + A + 4Bx^2 + 4Cx - Bx - C$$

$$2x^2-1 = (A+4B)x^2 + (-B+4C)x + (A-C)$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$A + 4B = 2 \quad \rightarrow \quad (1)$$

$$-B + 4C = 0 \quad \rightarrow \quad (2)$$

$$A - C = -1 \quad \rightarrow \quad (3)$$

من المعادلة (2) نجد أن: $B = 4C$

ب طرح المعادلة (3) من المعادلة (1) نجد أن: $4B + C = 3$

$$4(4C) + C = 3 \implies 16C + C = 3 \implies 17C = 3 \implies C = \frac{3}{17}$$

$$B = 4C = 4 \left(\frac{3}{17} \right) = \frac{12}{17} \quad \text{من المعادلة (2) نجد أن:}$$

$$A = -1 + C = -1 + \frac{3}{17} = \frac{-17 + 3}{17} = -\frac{14}{17} \quad \text{من المعادلة (3) نجد أن:}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 1}{(4x - 1)(x^2 + 1)} dx &= \int \left(\frac{-\frac{14}{17}}{4x - 1} + \frac{\frac{12}{17}x + \frac{3}{17}}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= -\frac{14}{17} \int \frac{1}{4x - 1} dx + \frac{12}{17} \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \frac{3}{17} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= -\frac{14}{17} \frac{1}{4} \int \frac{4}{4x - 1} dx + \frac{12}{17} \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \frac{3}{17} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= -\frac{7}{34} \ln |4x - 1| + \frac{6}{17} \ln(x^2 + 1) + \frac{3}{17} \tan^{-1} x + c \end{aligned}$$

الجزء الثالث (17 درجة):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2} \quad \text{أحسب (1)}$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - (-\sin 3x (3))}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x}{2} = \frac{3(1)}{2} = \frac{3}{2}$$

(2) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب)

الحل :

$$\begin{aligned} \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}} &= \lim_{t \rightarrow 5^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{5-x}} = \lim_{t \rightarrow 5^-} \int_0^t (5-x)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 5^-} \left((-1) \int_0^t (5-x)^{-\frac{1}{2}} (-1) dx \right) = \lim_{t \rightarrow 5^-} \left((-1) \left[\frac{(5-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^t \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 5^-} \left((-1) [2\sqrt{5-x}]_0^t \right) = \lim_{t \rightarrow 5^-} \left((-1) [2\sqrt{5-t} - 2\sqrt{5-0}] \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 5^-} \left(2\sqrt{5} - 2\sqrt{5-t} \right) = 2\sqrt{5} - 0 = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

التكامل المعتل متقارب وقيمته $2\sqrt{5}$.

(3) أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ وأحسب مساحتها .

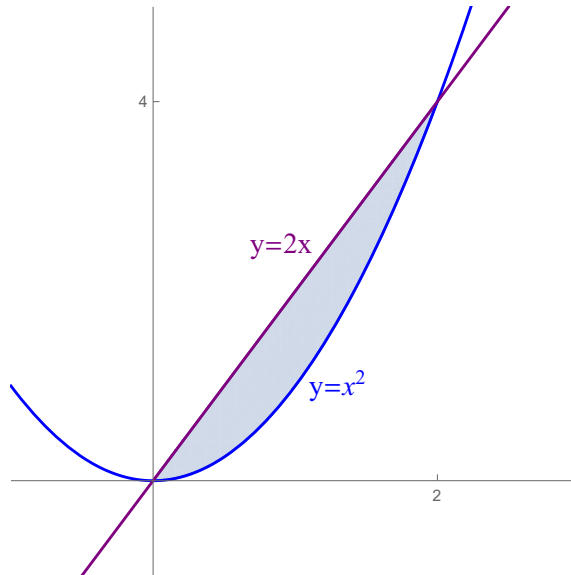
الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 2x$ يمثل خط مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله 2

إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 2x$ و $y = x^2$:

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x - 2) = 0 \implies x = 0, x = 2$$



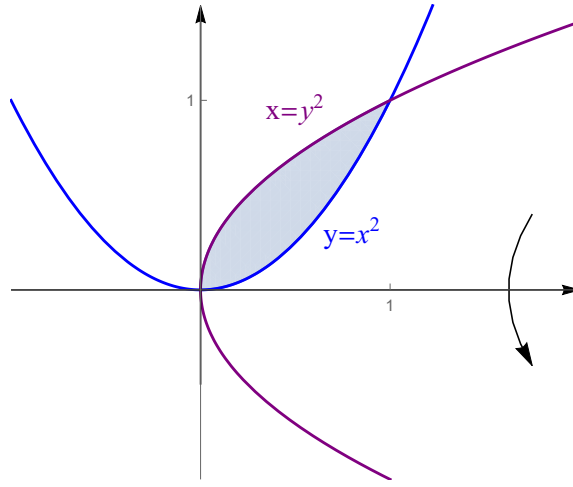
$$A = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3} \right) - (0 - 0) = \frac{12 - 8}{3} = \frac{4}{3}$$

(4) جد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y^2 = x$ حول محور x .
الحل :

$y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

$y^2 = x$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته إلى اليمين

لاحظ أن المنحنى $y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي للمنحنى $x = y^2$.



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$:

$$x^2 = \sqrt{x} \implies x^4 = x \implies x^4 - x = 0 \implies x(x^3 - 1) = 0 \implies x = 0, x = 1$$

باستخدام طريقة الوردات :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \pi \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) - (0 - 0) \right] = \frac{3\pi}{10} \end{aligned}$$

(5) جد طول المنحنى $y = \frac{(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}}{3}$ من $x = 0$ إلى $x = 1$.

الحل :

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = x \sqrt{x^2 + 2}$$

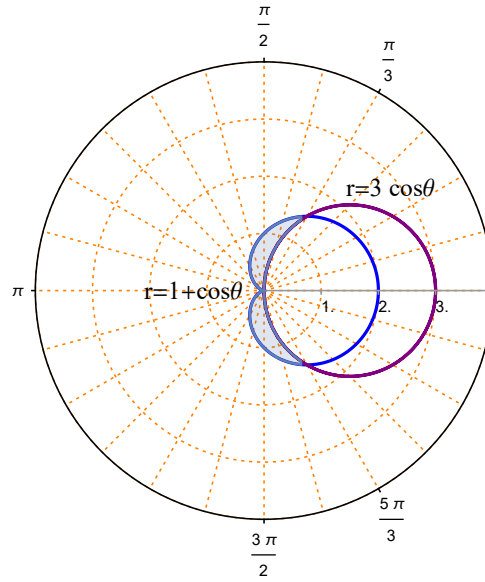
$$\begin{aligned}
L &= \int_0^1 \sqrt{1 + (x \sqrt{x^2 + 2})^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (x^2(x^2 + 2))} dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + x^4 + 2x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} dx = \int_0^1 \sqrt{(x^2 + 1)^2} dx \\
&= \int_0^1 |x^2 + 1| dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} + 1 \right) - (0 + 0) = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

(6) جد مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 1 + \cos \theta$ وخارج المنحنى $r = 3 \cos \theta$.

الحل :

المنحنى $r = 1 + \cos \theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 3 \cos \theta$ يمثل دائرة مركزها $(\frac{3}{2}, 0)$ ونصف قطرها $\frac{3}{2}$



نقاط تقاطع المنحنى $r = 1 + \cos \theta$ مع المنحنى $r = 3 \cos \theta$:

$$3 \cos \theta = 1 + \cos \theta \implies 2 \cos \theta = 1 \implies \cos \theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3}, \theta = \frac{5\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$A = 2 \left(\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos \theta)^2 d\theta \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 9 \cos^2 \theta d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left[1 + 2 \cos \theta + \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \right] d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{9}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left[\frac{3}{2} + 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right] d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{9}{2} + \frac{9}{2} \cos 2\theta \right) d\theta \\
&= \left[\frac{3}{2} \theta + 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} - \left[\frac{9}{2} \theta + \frac{9}{4} \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left[\left(\frac{3\pi}{2} + 0 + 0 \right) - \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \right] - \left[\left(\frac{9\pi}{4} + 0 \right) - \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{8} \right) \right] \\
&= \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8} \right) - \left(\frac{9\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8} \right) \\
&= \pi - \frac{9\sqrt{3}}{8} - \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

111 رياض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الثاني 1441 هـ
 حل الواجب الأول
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (8 درجات) :

$$(1) \text{ استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل } \int_{-2}^7 (6 - 2x) dx$$

الحل :

$$f(x) = 6 - 2x, [a, b] = [-2, 7]$$

$$\Delta_x = \frac{b - a}{n} = \frac{7 - (-2)}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = -2 + k\left(\frac{9}{n}\right) = -2 + \frac{9k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_x = \sum_{k=1}^n f\left(-2 + \frac{9k}{n}\right) \left(\frac{9}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[6 - 2\left(-2 + \frac{9k}{n}\right)\right] \left(\frac{9}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left(6 + 4 - \frac{18k}{n}\right) \left(\frac{9}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(10 - \frac{18k}{n}\right) \left(\frac{9}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{90}{n} - \frac{18 \times 9}{n^2} k\right) = \sum_{k=1}^n \frac{90}{n} - \sum_{k=1}^n \frac{18 \times 9}{n^2} k \\ &= \frac{90}{n} \sum_{k=1}^n 1 - \frac{18 \times 9}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{90}{n} n - \frac{18 \times 9}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = 90 - 81 \frac{n+1}{n} \\ \int_{-2}^7 (6 - 2x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(90 - 81 \frac{n+1}{n}\right) = 90 - 81(1) = 9 \end{aligned}$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = -3x^2 - 1$ على الفترة $[0, 1]$

$$(b - a)f(c) = \int_a^b f(x) dx \text{ العلاقة باستخدام العلاقة}$$

$$\text{حيث } [a, b] = [0, 1] \text{ و } f(x) = -3x^2 - 1$$

$$(1 - 0)(-3c^2 - 1) = \int_0^1 (-3x^2 - 1) dx = [-x^3 - x]_0^1 = (-1 - 1) - (0 - 0) = -2$$

$$-3c^2 - 1 = -2 \implies -3c^2 = -1 \implies c^2 = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \implies c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

لاحظ أن $c = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (0, 1)$ وبالتالي القيمة المطلوبة هي $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و $c = -\frac{1}{\sqrt{3}} \notin (0, 1)$

$$F(x) = \int_{\sin(\ln|x|)}^{e^{\sqrt{2x}}} \frac{t^2 + 1}{\sqrt{2 + 4t^4}} dt \text{ إذا كانت } F'(x) \text{ (3)}$$

الحل :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{\sin(\ln|x|)}^{e^{\sqrt{2x}}} \frac{t^2 + 1}{\sqrt{2 + 4t^4}} dt \\ &= \frac{(e^{\sqrt{2x}})^2 + 1}{\sqrt{2 + 4(e^{\sqrt{2x}})^4}} e^{\sqrt{2x}} \frac{2}{2\sqrt{2x}} - \frac{(\sin(\ln|x|))^2 + 1}{\sqrt{2 + 4(\sin(\ln|x|))^4}} \cos(\ln|x|) \frac{1}{x} \\ &= \frac{(e^{\sqrt{2x}})^2 + 1}{\sqrt{2 + 4(e^{\sqrt{2x}})^4}} \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}} - \frac{(\sin(\ln|x|))^2 + 1}{\sqrt{2 + 4(\sin(\ln|x|))^4}} \frac{\cos(\ln|x|)}{x} \end{aligned}$$

السؤال الثاني (5 درجات) : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$0 < x < \pi \text{ حيث } y = \sin^{-1}(\cos x) \ln(x^2 + e^{2x}) \quad (1)$$

الحل :

$$y' = \frac{-\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \ln(x^2 + e^{2x}) + \sin^{-1}(\cos x) \frac{2x + 2e^{2x}}{x^2 + e^{2x}}$$

$$y = \ln \left| \frac{x^3 \ln|2x|}{\sqrt[4]{x + \tan x}} \right| \quad (2)$$

الحل :

$$y = \ln \left| \frac{x^3 \ln|2x|}{\sqrt[4]{x + \tan x}} \right| = \ln|x^3| + \ln|\ln|2x|| - \ln|(x + \tan x)^{\frac{1}{4}}|$$

$$y = 3 \ln|x| + \ln|\ln|2x|| - \frac{1}{4} \ln|x + \tan x|$$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{dy}{dx} = 3 \frac{1}{x} + \frac{\frac{2}{2x}}{\ln|2x|} - \frac{1}{4} \frac{1 + \sec^2 x}{x + \tan x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x \ln|2x|} + \frac{1 + \sec^2 x}{4(x + \tan x)}$$

السؤال الثالث (12 درجة): أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x^{\frac{1}{3}} - x}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (1)$$

الحل:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{\frac{1}{3}} - x}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{x^{\frac{1}{3}} - x}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} (x^{\frac{1}{3}} - x) dx \\ &= \int (1 - x^{\frac{2}{3}}) dx = x - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = x - \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c \end{aligned}$$

$$\int x (2 - 3x^2)^5 dx \quad (2)$$

الحل:

$$\int x (2 - 3x^2)^5 dx = \frac{1}{-6} \int (2 - 3x^2)^5 (-6x) dx = -\frac{1}{6} \frac{(2 - 3x^2)^6}{6} + c$$

باستخدام القانون

$$\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{حيث } n \neq -1$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx \quad (3)$$

الحل:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} \sin^{-1}(x^2) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 - [f(x)]^2}} dx = \sin^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

حيث $a > 0$ و $|f(x)| < a$

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1) \tan^{-1} x} dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1) \tan^{-1} x} dx = \int \frac{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}{\tan^{-1} x} dx = \ln |\tan^{-1} x| + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

$$\int_3^5 \frac{e^{\ln|x|}}{x} dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int_3^5 \frac{e^{\ln|x|}}{x} dx = \int_3^5 \frac{x}{x} dx = \int_3^5 1 dx = [x]_3^5 = 5 - 3 = 2$$

$$\int x^2 5^{x^3-4} dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int x^2 5^{x^3-4} dx = \frac{1}{3} \int 5^{x^3-4} (3x^2) dx = \frac{1}{3} \frac{5^{x^3-4}}{\ln 5} + c$$

باستخدام القانون

$$a > 0 \text{ حيث } \int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

111 رياض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الثاني 1441 هـ
 حل الواجب الثاني
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$y = \cosh(\ln|2x|) + \tanh^{-1}(3x) \quad (1)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \sinh(\ln|2x|) \frac{2}{2x} + \frac{1}{1-(3x)^2} \quad (3) = \frac{\sinh(\ln|2x|)}{x} + \frac{3}{1-9x^2}$$

$$y = x^3 \coth^2 \sqrt{x} \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (3x^2) \coth^2 \sqrt{x} + x^3 \left(2 \coth \sqrt{x} \left(-\operatorname{csch}^2 \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right) \\ &= 3x^2 \coth^2 \sqrt{x} - \frac{x^3 \coth \sqrt{x} \operatorname{csch}^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

السؤال الثاني : احسب التكاملات التالية

$$\int e^{-x} \sinh x \, dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sinh x \, dx &= \int e^{-x} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) dx = \int \frac{1 - e^{-2x}}{2} dx \\ &= \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{e^{-2x}}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \frac{1}{-2} \int e^{-2x} (-2) dx \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} e^{-2x} + c = \frac{x}{2} + \frac{e^{-2x}}{4} + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{e^{-3x} \sqrt{e^{6x} - 1}} dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^{-3x} \sqrt{e^{6x} - 1}} dx &= \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{(e^{3x})^2 - (1)^2}} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{3e^{3x}}{\sqrt{(e^{3x})^2 - (1)^2}} dx = \frac{1}{3} \cosh^{-1}(e^{3x}) + c \\ \int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 - a^2}} dx &= \cosh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c \end{aligned}$$

حيث $|f(x)| > a$ و $a > 0$

$$\int_1^e x^2 \ln|x| dx \quad (3)$$

الحل : باستخدام التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= x^2 dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \ln x dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e \\ &= \left[\frac{e^3}{3} \ln(e) - \frac{1}{3} \ln(1) \right] - \frac{1}{3} \left[\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \right] = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\int \sin^2 x \cos^5 x dx \quad (4)$$

الحل : باستخدام التعويض $u = \sin x \implies du = \cos x dx$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^5 x dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^2 x (\cos^2 x)^2 \cos x dx \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int u^2 (1 - u^2)^2 du \\ &= \int u^2 (1 - 2u^2 + u^4) du = \int (u^2 - 2u^4 + u^6) du \\ &= \frac{u^3}{3} - 2 \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2 \sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + c \end{aligned}$$

$$\int \sin(5x) \sin(2x) dx \quad (5)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \sin(5x) \sin(2x) dx &= \int \frac{1}{2} [\cos(5x - 2x) - \cos(5x + 2x)] dx \\ &= \int \frac{1}{2} [\cos(3x) - \cos(7x)] dx = \frac{1}{2} \int \cos 3x dx - \frac{1}{2} \int \cos 7x dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} \int \cos 3x (3) dx - \frac{1}{2} \frac{1}{7} \int \cos 7x (7) dx = \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{14} \sin 7x + c \end{aligned}$$

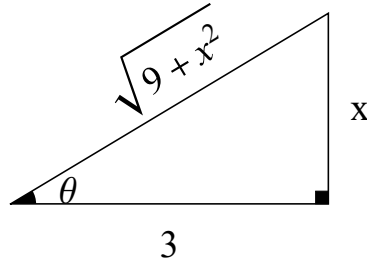
$$\int \frac{1}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \quad (6)$$

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

$$x = 3 \tan \theta \implies \tan \theta = \frac{x}{3}$$

$$dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \frac{3 \sec^2 \theta}{(9+9 \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{[9(1+\tan^2 \theta)]^{\frac{3}{2}}} d\theta \\ &= \int \frac{3 \sec^2 \theta}{(9 \sec^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{(9)^{\frac{3}{2}} (\sec^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{27 \sec^3 \theta} d\theta \\ &= \frac{3}{27} \int \frac{1}{\sec \theta} d\theta = \frac{1}{9} \int \cos \theta d\theta = \frac{1}{9} \sin \theta + c \end{aligned}$$



من المثلث : نلاحظ أن $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$

$$\int \frac{1}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{9} \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + c$$

$$\int \frac{1}{-x^2 - 2x + 8} dx \quad (7)$$

الحل : باستخدام الإكمال إلى مربع كامل

$$\int \frac{1}{-x^2 - 2x + 8} dx = \int \frac{1}{-(x^2 + 2x + 1) + (8 + 1)} dx$$

$$= \int \frac{1}{9 - (x^2 + 2x + 1)} dx = \int \frac{1}{(3)^2 - (x + 1)^2} dx = \frac{1}{3} \tanh^{-1} \left(\frac{x + 1}{3} \right) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{a^2 - [f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c \quad \text{باستخدام القانون}$$

حيث $|f(x)| < a$ و $a > 0$

$$\int \frac{3x^2 + x + 4}{x^3 + 4x} dx \quad (8)$$

الحل : باستخدام الكسور الجزئية

$$\frac{3x^2 + x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

$$3x^2 + x + 4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$$

$$3x^2 + x + 4 = (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$A + B = 3 \quad \rightarrow \quad (1)$$

$$C = 1 \quad \rightarrow \quad (2)$$

$$4A = 4 \quad \rightarrow \quad (3)$$

من المعادلة (3) نحصل على : $A = 1$

من المعادلة (1) نحصل على : $B = 2$

$$\int \frac{3x^2 + x + 4}{x^3 + 4x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + 4} \right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2x + 1}{x^2 + 4} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

$$= \ln|x| + \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} dx \quad (9)$$

الحل :

$$u = \sqrt{1 + \sqrt{x}} \text{ ضع}$$

$$u^2 = 1 + \sqrt{x} \implies u^2 - 1 = \sqrt{x} \implies (u^2 - 1)^2 = x$$

$$dx = 2(u^2 - 1) \cdot 2u = 4u(u^2 - 1) du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} dx = \int \frac{4u(u^2 - 1)}{u} du = 4 \int (u^2 - 1) du$$

$$= 4 \left[\frac{u^3}{3} - u \right] + c = \frac{4}{3} \left(\sqrt{1 + \sqrt{x}} \right)^3 - 4\sqrt{1 + \sqrt{x}} + c$$