

111 رياض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الأول 1442 هـ
 حل الاختبار الفصلي
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (6 درجات) :

$$(1) \int_1^2 (4x + 5) dx \text{ استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل}$$

الحل :

$$f(x) = 4x + 5, [a, b] = [1, 2]$$

$$\Delta_x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = 1 + k\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_x = \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[4\left(1 + \frac{k}{n}\right) + 5\right] \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left(4 + \frac{4k}{n} + 5\right) \left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(9 + \frac{4k}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{9}{n} + \frac{4k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{9}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{4k}{n^2} \\ &= \frac{9}{n} \sum_{k=1}^n 1 + \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{9}{n} (n) + \frac{4}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = 9 + \frac{2(n+1)}{n} \end{aligned}$$

$$\int_1^2 (4x + 5) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(9 + \frac{2(n+1)}{n}\right) = 9 + 2(1) = 9 + 2 = 11$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = e^x$ على الفترة $[0, 4]$

$$\text{الحل : باستخدام العلاقة } (b - a)f(c) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{حيث } [a, b] = [0, 4] \text{ و } f(x) = e^x$$

$$(4 - 0) e^c = \int_0^4 e^x dx = [e^x]_0^4 = e^4 - e^0 = e^4 - 1$$

$$4e^c = e^4 - 1 \implies e^c = \frac{e^4 - 1}{4} \implies c = \ln \left(\frac{e^4 - 1}{4} \right) \in (0, 4)$$

$$F(x) = x \int_1^{x^2} \sin(t^2) dt \text{ إذا كانت } F'(x) \text{ جد (3)}$$

الحل :

$$\begin{aligned} F'(x) &= (1) \int_1^{x^2} \sin(t^2) dt + x \left(\frac{d}{dx} \int_1^{x^2} \sin(t^2) dt \right) \\ &= \int_1^{x^2} \sin(t^2) dt + x \left[\sin((x^2)^2) (2x) \right] = \int_1^{x^2} \sin(t^2) dt + 2x^2 \sin(x^4) \end{aligned}$$

السؤال الثاني (8 درجات) : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$y = 3^x \sin^{-1}(e^x) \quad (1)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = (3^x \ln 3) \sin^{-1}(e^x) + 3^x \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (e^x)^2}} e^x \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3^x \ln 3 \sin^{-1}(e^x) + \frac{3^x e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

$$y = \sqrt{x} \log_5 |2 + \sec(3x)| \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \log_5 |2 + \sec(3x)| + \sqrt{x} \left(\frac{3 \sec(3x) \tan(3x)}{2 + \sec(3x)} \frac{1}{\ln 5} \right) \\ &= \frac{\log_5 |2 + \sec(3x)|}{2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x} \sec(3x) \tan(3x)}{\ln 5 (2 + \sec(3x))} \end{aligned}$$

$$y = (\ln|x|)^{\tan x} \quad (3)$$

الحل :

$$y = (\ln|x|)^{\tan x} \implies \ln|y| = \ln \left| (\ln|x|)^{\tan x} \right| = \tan x \ln |\ln|x||$$

باشتقاق الطرفين

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \sec^2 x \ln |\ln |x|| + \tan x \left(\frac{\frac{1}{x}}{\ln |x|} \right) \\ y' &= y \left[\sec^2 x \ln |\ln |x|| + \frac{\tan x}{x \ln |x|} \right] \\ y' &= (\ln |x|)^{\tan x} \left[\sec^2 x \ln |\ln |x|| + \frac{\tan x}{x \ln |x|} \right] \\ y &= \cosh^{-1}(\sqrt{x}) \quad (4)\end{aligned}$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x})^2 - 1}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$$

السؤال الثالث (16 درجة) : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{\csc^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned}\int \frac{\csc^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx &= \int \csc^2(\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \csc^2(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ &= 2(-\cot(\sqrt{x})) + c = -2\cot(\sqrt{x}) + c\end{aligned}$$

باستخدام القانون

$$\int \csc^2(f(x)) f'(x) dx = -\cot(f(x)) + c$$

$$\int \left(\pi^x + \frac{1}{e^{3x}} \right) dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned}\int \left(\pi^x + \frac{1}{e^{3x}} \right) dx &= \int (\pi^x + e^{-3x}) dx \\ &= \int \pi^x dx + \left(\frac{1}{-3} \right) \int e^{-3x} (-3) dx = \frac{\pi^x}{\ln \pi} - \frac{e^{-3x}}{3} + c\end{aligned}$$

$$a > 0 \text{ حيث } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \text{ باستخدام القانون}$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c \text{ والقانون}$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} x 4^{-x^2} dx \quad (3)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{2}} x 4^{-x^2} dx &= \frac{1}{-2} \int_1^{\sqrt{2}} 4^{-x^2} (-2x) dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{4^{-x^2}}{\ln 4} \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{2 \ln 4} [4^{-2} - 4^{-1}] = -\frac{1}{2 \ln 4} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{2 \ln 4} \left(-\frac{3}{16} \right) \\ &= \frac{3}{32 \ln 4} = \frac{3}{64 \ln 2} \end{aligned}$$

باستخدام القانون

$$a > 0 \text{ حيث } \int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} dx \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} dx &= \int \frac{(x^2 + 1) - 1 + x}{x^2 + 1} dx \\ &= \int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \int 1 dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ &= x - \tan^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^{4x}}{\sqrt{4 + e^{8x}}} dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{e^{4x}}{\sqrt{4 + e^{8x}}} dx = \int \frac{e^{4x}}{\sqrt{(2)^2 + (e^{4x})^2}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4 e^{4x}}{\sqrt{(2)^2 + (e^{4x})^2}} dx$$

$$= \frac{1}{4} \sinh^{-1} \left(\frac{e^{4x}}{2} \right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 + [f(x)]^2}} dx = \sinh^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

$$\int 3^x \tanh(3^x) dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int 3^x \tanh(3^x) dx = \frac{1}{\ln 3} \int \tanh(3^x) (3^x \ln 3) dx = \frac{1}{\ln 3} \ln |\cosh(3^x)| + c$$

باستخدام القانون

$$\int \tanh(f(x)) f'(x) dx = \ln |\cosh(f(x))| + c$$

$$\int \frac{\sinh x}{16 - \cosh^2 x} dx \quad (7)$$

الحل :

$$\int \frac{\sinh x}{16 - \cosh^2 x} dx = \int \frac{\sinh x}{(4)^2 - (\cosh x)^2} dx = \frac{1}{4} \tanh^{-1} \left(\frac{\cosh x}{4} \right) + c$$

باستخدام القانون

$$|f(x)| < a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{a^2 - [f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

$$\int x (x+5)^{\frac{1}{2}} dx \quad (8)$$

$$(x+5)^{\frac{1}{2}} = u \implies x+5 = u^2 \implies x = u^2 - 5 \text{ بوضع}$$

$$dx = 2u du$$

$$\int x (x+5)^{\frac{1}{2}} dx = \int (u^2 - 5) u 2u du = \int (2u^4 - 10u^2) du$$

$$= 2 \left(\frac{u^5}{5} \right) - 10 \left(\frac{u^3}{3} \right) + c = \frac{2}{5} (x+5)^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3} (x+5)^{\frac{3}{2}} + c$$

111 رياض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الأول 1442 هـ
 حل الاختبار النهائي
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

الجزء الأول (7 درجات):

(1) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 4x - x^2$ على الفترة $[0, 3]$

$$\text{الحل : باستخدام العلاقة } (b-a)f(c) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{حيث } f(x) = 4x - x^2 \text{ و } [a, b] = [0, 3]$$

$$(3-0)(4c-c^2) = \int_0^3 (4x-x^2) dx$$

$$3(4c-c^2) = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \left(2(9) - \frac{27}{3}\right) - (0-0) = 18-9 = 9$$

$$3(4c-c^2) = 9 \implies 4c-c^2 = 3 \implies c^2-4c+3 = 0$$

$$\implies (c-3)(c-1) = 0 \implies c = 1, c = 3$$

لاحظ أن $c = 1 \in (0, 3)$ ، بينما $c = 3 \notin (0, 3)$.

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\ln|x|} \sin(t) dt$ حيث $x > 0$.

$$\text{الحل : } F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{\frac{1}{x}}^{\ln|x|} \sin(t) dt$$

$$= \sin(\ln|x|) \frac{1}{x} - \sin\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\sin(\ln|x|)}{x} + \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

(3) جد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = (1 - \sinh^{-1} x)^x$.

$$\text{الحل : } \ln|f(x)| = \ln|(1 - \sinh^{-1} x)^x| = x \ln|1 - \sinh^{-1} x|$$

ياشتقاق الطرفين بالنسبة للمتغير x :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (1) \ln|1 - \sinh^{-1} x| + x \frac{\left(0 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{1 - \sinh^{-1} x}$$

$$f'(x) = f(x) \left[\ln|1 - \sinh^{-1} x| - \frac{x}{\sqrt{1+x^2} (1 - \sinh^{-1} x)} \right]$$

$$f'(x) = (1 - \sinh^{-1} x)^x \left[\ln |1 - \cosh^{-1} x| - \frac{x}{\sqrt{1+x^2} (1 - \sinh^{-1} x)} \right]$$

الجزء الثاني (16 درجة): أحسب التكاملات التالية :

$$\int \frac{5^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{5^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int 5^{\tan x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int 5^{\tan x} \sec^2 x dx = \frac{5^{\tan x}}{\ln 5} + c$$

$$a > 0 \text{ حيث } \int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c \text{ باستخدام القانون}$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{csch}^2(\sqrt{x}) dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{csch}^2(\sqrt{x}) dx &= 2 \int \operatorname{csch}^2(\sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx = 2 (-\operatorname{coth}(\sqrt{x})) + c \\ &= -2 \operatorname{coth}(\sqrt{x}) + c \end{aligned}$$

$$\int \operatorname{csch}^2(f(x)) f'(x) dx = -\operatorname{coth}(f(x)) + c \text{ باستخدام القانون}$$

$$\int \sin^3 x \cos^5 x dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int \sin^3 x \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cos^5 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^5 x \sin x dx$$

$$u = \cos x \text{ بوضع}$$

$$du = -\sin x dx \implies -du = \sin x dx$$

$$\begin{aligned} \int (1 - \cos^2 x) \cos^5 x \sin x dx &= \int (1 - u^2) u^5 (-1) du \\ &= -\int (u^5 - u^7) du = -\left(\frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} \right) + c = -\frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\cos^8 x}{8} + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^6}} \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^6}} &= \int \frac{1}{x\sqrt{1+(x^3)^2}} dx = \int \frac{x^2}{(x.x^2)\sqrt{1+(x^3)^2}} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3\sqrt{1+(x^3)^2}} dx = \frac{1}{3} (-\operatorname{csch}^{-1}(x^3)) + c = -\frac{1}{3} \operatorname{csch}^{-1}(x^3) + c \\ &\text{باستخدام القانون حيث } a > 0 \int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2+[f(x)]^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c \end{aligned}$$

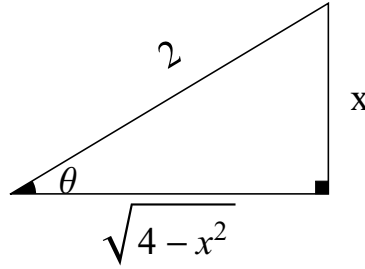
$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx \quad (5)$$

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

$$x = 2 \sin \theta \implies \sin \theta = \frac{x}{2} \text{ ضع}$$

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{2 \cos \theta}{(2 \sin \theta)^2 \sqrt{4-(2 \sin \theta)^2}} d\theta = \int \frac{2 \cos \theta}{4 \sin^2 \theta \sqrt{4-4 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \int \frac{2 \cos \theta}{4 \sin^2 \theta \sqrt{4(1-\sin^2 \theta)}} d\theta = \int \frac{2 \cos \theta}{4 \sin^2 \theta \sqrt{4 \cos^2 \theta}} d\theta = \int \frac{2 \cos \theta}{4 \sin^2 \theta 2 \cos \theta} d\theta \\ &= \int \frac{1}{4 \sin^2 \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int \csc^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} (-\cot \theta) + c = -\frac{1}{4} \cot \theta + c \end{aligned}$$



$$\cot \theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \text{ من المثلث نجد أن :}$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx = -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c$$

$$\int \frac{x-8}{x^3+4x} dx \quad (6)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-8}{x^3+4x} = \frac{x-8}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$x-8 = A(x^2+4) + (Bx+C)x$$

$$x-8 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$$

$$x-8 = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$A+B=0 \quad \rightarrow \quad (1)$$

$$C=1 \quad \rightarrow \quad (2)$$

$$4A=-8 \quad \rightarrow \quad (3)$$

من المعادلة (3) نجد أن : $A = -2$

من المعادلة (1) نجد أن : $B = 2$ $\implies -2 + B = 0$

$$\int \frac{x-8}{x^3+4x} dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+4} \right) dx$$

$$= -2 \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \int \frac{1}{x^2+4} dx$$

$$= -2 \ln |x| + \ln (x^2+4) + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + c$$

الجزء الثالث (17 درجة) :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) \quad \text{أحسب (1)}$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) \quad (\infty - \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{1 + 1 - 0} = 0$$

(2) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$ متقارباً أم متباعداً .

الحل :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^x}{1 + (e^x)^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\tan^{-1}(e^x)]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} [\tan^{-1}(e^t) - \tan^{-1}(1)] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

التكامل المعتل متقارب وقيمه $\frac{\pi}{4}$.

(3) أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 1 - x^2$ و $y = x^2 - 1$ وأحسب مساحتها .

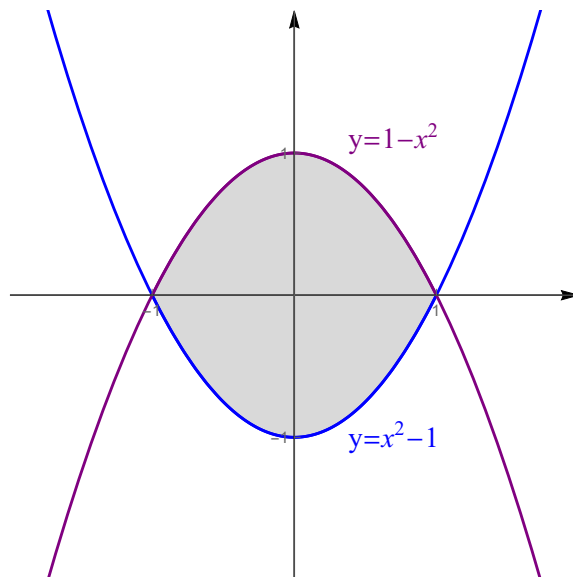
الحل :

المنحنى $y = x^2 - 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, -1)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 1 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 1)$ وفتحته للأسفل .

إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2 - 1$ و $y = 1 - x^2$:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 1 - x^2 \implies 2x^2 - 2 = 0 \implies 2(x^2 - 1) = 0 \implies x^2 - 1 = 0 \\ &\implies (x - 1)(x + 1) = 0 \implies x = -1, x = 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^1 [(1-x^2) - (x^2-1)] dx = \int_{-1}^1 (2-2x^2) dx = \left[2x - 2\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \\
 &= \left(2 - \frac{2}{3} \right) - \left(-2 + \frac{2}{3} \right) = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

(4) جد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2 + 1$ و $y = 3x + 1$ حول محور x .

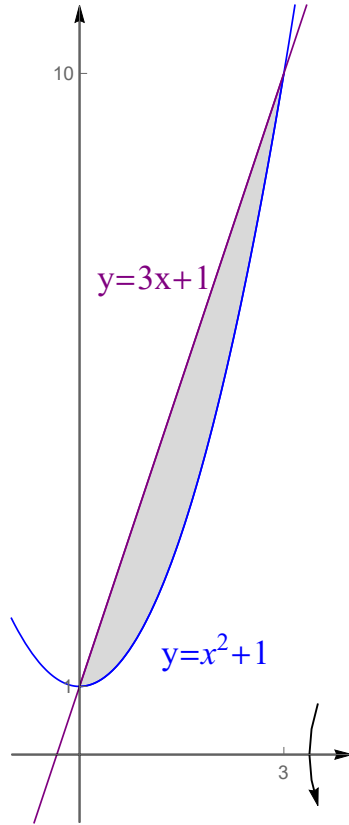
الحل :

$y = x^2 + 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 1)$ وفتحته للأعلى .

$y = 3x + 1$ يمثل خط مستقيم يمر بالنقطة $(0, 1)$ وميله 3 .

إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2 + 1$ و $y = 3x + 1$:

$$x^2 + 1 = 3x + 1 \implies x^2 - 3x = 0 \implies x(x - 3) = 0 \implies x = 0, x = 3$$



باستخدام طريقة الوردات :

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^3 [(3x+1)^2 - (x^2+1)^2] dx = \pi \int_0^3 [(9x^2+6x+1) - (x^4+2x^2+1)] dx \\
&= \pi \int_0^3 (-x^4+7x^2+6x) dx = \pi \left[-\frac{x^5}{5} + 7\frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^3 \\
&= \pi \left[\left(-\frac{3^5}{5} + 7\frac{3^3}{3} + 3(3^2) \right) - (0+0+0) \right] = \pi \left(-\frac{243}{5} + 63 + 27 \right) = \frac{207\pi}{5}
\end{aligned}$$

(5) جد طول المنحنى $y = \sqrt{9-x^2}$ من $x = -3$ إلى $x = 3$.

الحل :

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

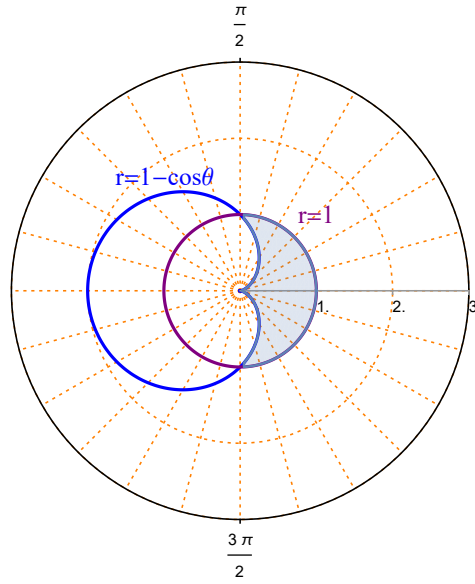
$$\begin{aligned}
L &= \int_{-3}^3 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \right)^2} dx = \int_{-3}^3 \sqrt{1 + \frac{x^2}{9-x^2}} dx = \int_{-3}^3 \sqrt{\frac{9-x^2+x^2}{9-x^2}} dx \\
&= \int_{-3}^3 \sqrt{\frac{9}{9-x^2}} dx = \int_{-3}^3 \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} dx = 3 \int_{-3}^3 \frac{1}{\sqrt{(3)^2-x^2}} dx = 3 \left[\sin^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) \right]_{-3}^3 \\
&= 3 [\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)] = 3 \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 3\pi
\end{aligned}$$

(6) جد مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 1$ وخارج المنحنى $r = 1 - \cos \theta$.

الحل :

المنحنى $r = 1 - \cos \theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 1$ يمثل دائرة مركزها القطب ، ونصف قطرها 1 .



نقاط تقاطع المنحني $r = 1$ مع المنحني $r = 1 - \cos \theta$:

$$1 - \cos \theta = 1 \implies -\cos \theta = 0 \implies \cos \theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{3\pi}{2}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(1)^2 - (1 - \cos \theta)^2] d\theta \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta)] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2 \cos \theta - \cos^2 \theta] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2 \cos \theta - \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) \right] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \cos \theta - \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \left[2 \sin \theta - \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{4} \sin(\pi) \right) - \left(2 \sin(0) - 0 - \frac{1}{4} \sin(0) \right) \\ &= \left(2 - \frac{\pi}{4} - 0 \right) - (0 - 0 - 0) = 2 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

111 رياض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الثاني 1442 هـ
 حل الاختبار الفصلي
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (6 درجات) :

$$(1) \int_{-1}^4 (2x + 1) dx \text{ استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل}$$

الحل :

$$f(x) = 2x + 1, [a, b] = [-1, 4]$$

$$\Delta_x = \frac{b - a}{n} = \frac{4 - (-1)}{n} = \frac{5}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = -1 + k\left(\frac{5}{n}\right) = -1 + \frac{5k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$R_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_x = \sum_{k=1}^n f\left(-1 + \frac{5k}{n}\right) \left(\frac{5}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[2\left(-1 + \frac{5k}{n}\right) + 1 \right] \left(\frac{5}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left(-2 + \frac{10k}{n} + 1\right) \left(\frac{5}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(-1 + \frac{10k}{n}\right) \left(\frac{5}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{-5}{n} + \frac{50k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{-5}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{50k}{n^2}$$

$$= \frac{-5}{n} \sum_{k=1}^n 1 + \frac{50}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{-5}{n} (n) + \frac{50}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = -5 + 25 \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\int_{-1}^4 (2x + 1) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-5 + 25 \left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = -5 + 25(1) = -5 + 25 = 20$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 4x - x^2$ على الفترة $[0, 3]$

$$(b - a)f(c) = \int_a^b f(x) dx \text{ باستخدام العلاقة}$$

$$[a, b] = [0, 3] \text{ و } f(x) = 4x - x^2 \text{ حيث}$$

$$(3 - 0) (4c - c^2) = \int_0^3 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^3$$

$$\begin{aligned}
3(4c - c^2) &= \left[2(3^2) - \frac{3^3}{3}\right] - \left[2(0^2) - \frac{0^3}{3}\right] = 18 - 9 = 9 \\
\implies 3(4c - c^2) &= 9 \implies 4c - c^2 = 3 \implies c^2 - 4c + 3 = 0 \\
&\implies (c - 1)(c - 3) = 0 \implies c = 1, c = 3 \\
&c = 3 \notin (0, 3) \text{ بينما } c = 1 \in (0, 3) \text{ لاحظ أن}
\end{aligned}$$

$$F(x) = \int_{3x}^{3x^2+1} \frac{t}{4+t^2} dt \text{ إذا كانت } F'(0) \text{ جد (3)}$$

الحل :

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{3x}^{3x^2+1} \frac{t}{4+t^2} dt = \frac{3x^2+1}{4+(3x^2+1)^2} (6x) - \frac{3x}{4+(3x)^2} \quad (3) \\
&= \frac{6x(3x^2+1)}{4+(3x^2+1)^2} - \frac{9x}{4+(3x)^2} \\
F'(0) &= \frac{6(0)(3(0)^2+1)}{4+(3(0)^2+1)^2} - \frac{9(0)}{4+(3(0))^2} = 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

السؤال الثاني (8 درجات) : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$y = 5^x \cos^{-1}(e^{2x}) \quad (1)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = (5^x \ln 5) \cos^{-1}(e^{2x}) + 5^x \left(\frac{-1}{\sqrt{1-(e^{2x})^2}} (e^{2x} \cdot 2) \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 5^x \ln 5 \cos^{-1}(e^{2x}) - \frac{5^x (2e^{2x})}{\sqrt{1-e^{4x}}}$$

$$y = \sqrt[3]{x} \log_7 |4 + \sec(2x^2)| \quad (2)$$

الحل :

$$y = x^{\frac{1}{3}} \log_7 |4 + \sec(2x^2)|$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \right) \log_7 |4 + \sec(2x^2)| + x^{\frac{1}{3}} \left(\frac{(4x) \sec(2x^2) \tan(2x^2)}{4 + \sec(2x^2)} \frac{1}{\ln 7} \right)$$

$$= \frac{\log_7 |4 + \sec(2x^2)|}{3x^{\frac{2}{3}}} + \frac{4x^{\frac{4}{3}} \sec(2x^2) \tan(2x^2)}{\ln 7 (4 + \sec(2x^2))}$$

$$y = (\sin x)^{\cot x} \quad (3)$$

الحل :

$$y = (\sin x)^{\cot x} \implies \ln |y| = \ln |(\sin x)^{\cot x}| = \cot x \ln |\sin x|$$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = -\csc^2 x \ln |\sin x| + \cot x \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

$$y' = y [-\csc^2 x \ln |\sin x| + \cot x \cot x]$$

$$y' = (\sin x)^{\cot x} [-\csc^2 x \ln |\sin x| + \cot^2 x]$$

$$y = \sinh^{-1}(\ln |x|) \quad (4)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\ln |x|)^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \sqrt{1 + \ln^2 |x|}}$$

السؤال الثالث (16 درجة) : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{\sec^2(\sqrt{2x})}{\sqrt{2x}} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{\sec^2(\sqrt{2x})}{\sqrt{2x}} dx = \int \sec^2(\sqrt{2x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} dx = \tan(\sqrt{2x}) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \sec^2(f(x)) f'(x) dx = \tan(f(x)) + c$$

$$\int \left(3^x + \frac{1}{e^{-2x}} \right) dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \left(3^x + \frac{1}{e^{-2x}} \right) dx = \int (3^x + e^{2x}) dx$$

$$= \int 3^x dx + \frac{1}{2} \int e^{2x} (2) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

باستخدام القانون $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ حيث $a > 0$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c \text{ والقانون}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} x 9^{-x^2} dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int_1^{\sqrt{3}} x 9^{-x^2} dx = \frac{1}{-2} \int_1^{\sqrt{3}} 9^{-x^2} (-2x) dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{9^{-x^2}}{\ln 9} \right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1}{2 \ln 9} [9^{-3} - 9^{-1}] = -\frac{1}{2 \ln 9} \left(\frac{1}{9^3} - \frac{1}{9} \right) = -\frac{1}{2 \ln 9} \left(\frac{1 - 9^2}{9^3} \right)$$

$$= -\frac{1}{4 \ln 3} \left(\frac{1 - 81}{9^3} \right) = -\frac{1}{4 \ln 3} \left(\frac{-80}{9^3} \right) = \frac{20}{9^3 \ln 3}$$

باستخدام القانون

$$a > 0 \text{ حيث } \int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{x+3}{x+1} dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \frac{x+3}{x+1} dx = \int \frac{(x+1)+2}{x+1} dx = \int \left(\frac{x+1}{x+1} + \frac{2}{x+1} \right) dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{2}{x+1} \right) dx = \int dx + 2 \int \frac{1}{x+1} dx = x + 2 \ln |x+1| + c$$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{9+e^{4x}}} dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{9 + e^{4x}}} dx = \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{(3)^2 + (e^{2x})^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 e^{2x}}{\sqrt{(3)^2 + (e^{2x})^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \sinh^{-1} \left(\frac{e^{2x}}{3} \right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 + [f(x)]^2}} dx = \sinh^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

$$\int 5^{2x} \tanh(5^{2x}) dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int 5^{2x} \tanh(5^{2x}) dx = \frac{1}{2 \ln 5} \int \tanh(5^{2x}) (5^{2x} 2 \ln 5) dx$$

$$= \frac{1}{2 \ln 5} \ln |\cosh(5^{2x})| + c$$

باستخدام القانون

$$\int \tanh(f(x)) f'(x) dx = \ln |\cosh(f(x))| + c$$

$$\int \frac{\cosh x}{16 - \sinh^2 x} dx \quad (7)$$

الحل :

$$\int \frac{\cosh x}{16 - \sinh^2 x} dx = \int \frac{\cosh x}{(4)^2 - (\sinh x)^2} dx = \frac{1}{4} \tanh^{-1} \left(\frac{\sinh x}{4} \right) + c$$

باستخدام القانون

$$|f(x)| < a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{a^2 - [f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

$$\int (x-1)(x+5)^{\frac{1}{2}} dx \quad (8)$$

الحل : بوضع $x+5 = u \implies x = u-5 \implies x-1 = u-6$

$dx = du$

$$\int (x-1)(x+5)^{\frac{1}{2}} dx = \int (u-6)u^{\frac{1}{2}} du = \int \left(u^{\frac{3}{2}} - 6u^{\frac{1}{2}} \right) du$$

$$= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 6 \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - 4 u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5} (x+5)^{\frac{5}{2}} - 4 (x+5)^{\frac{3}{2}} + c$$