111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1442 هـ
حل الاختبار الفصلي
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

السؤال الأول (6 درجات) :

(1) استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل $\int_1^2 (4x+5)\,dx$

الحل :

$$f(x) = 4x+5\ ,\ [a,b] = [1,2]$$

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = 1 + k\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x = \sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[4\left(1+\frac{k}{n}\right)+5\right]\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(4+\frac{4k}{n}+5\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(9+\frac{4k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{9}{n}+\frac{4k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{9}{n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{n^2}$$

$$= \frac{9}{n}\sum_{k=1}^{n}1 + \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{9}{n}\,(n) + \frac{4}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = 9 + \frac{2(n+1)}{n}$$

$$\int_1^2 (4x+5)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(9+\frac{2(n+1)}{n}\right) = 9 + 2(1) = 9 + 2 = 11$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = e^x$ على الفترة $[0,4]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = e^x$ و $[a,b] = [0,4]$

$$(4-0)\,e^c = \int_0^4 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^4 = e^4 - e^0 = e^4 - 1$$

$$4e^c = e^4 - 1 \implies e^c = \frac{e^4-1}{4} \implies c = \ln\left(\frac{e^4-1}{4}\right) \in (0,4)$$

(3) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x) = x\int_1^{x^2} \sin\left(t^2\right)\ dt$

الحل :

$$F'(x) = (1)\ \int_1^{x^2} \sin\left(t^2\right)\ dt + x\left(\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \sin\left(t^2\right)\ dt\right)$$

$$= \int_1^{x^2} \sin\left(t^2\right)\ dt + x\left[\sin\left(\left(x^2\right)^2\right)\ (2x)\right] = \int_1^{x^2} \sin\left(t^2\right)\ dt + 2x^2\ \sin\left(x^4\right)$$

السؤال الثاني (8 درجات) : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y = 3^x\ \sin^{-1}(e^x)$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = (3^x\ \ln 3)\ \sin^{-1}(e^x) + 3^x\ \left(\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\ e^x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3^x \ln 3\ \sin^{-1}(e^x) + \frac{3^x\ e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

(2) $y = \sqrt{x}\ \log_5|2+\sec(3x)|$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\log_5|2+\sec(3x)| + \sqrt{x}\ \left(\frac{3\sec(3x)\ \tan(3x)}{2+\sec(3x)}\ \frac{1}{\ln 5}\right)$$

$$= \frac{\log_5|2+\sec(3x)|}{2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}\ \sec(3x)\ \tan(3x)}{\ln 5\,(2+\sec(3x))}$$

(3) $y = (\ln|x|)^{\tan x}$

الحل :

$$y = (\ln|x|)^{\tan x} \implies \ln|y| = \ln\left|(\ln|x|)^{\tan x}\right| = \tan x\ \ln|\ln|x||$$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = \sec^2 x \, \ln|\ln|x|| + \tan x \left(\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln|x|} \right)$$

$$y' = y \left[\sec^2 x \, \ln|\ln|x|| + \frac{\tan x}{x \, \ln|x|} \right]$$

$$y' = (\ln|x|)^{\tan x} \left[\sec^2 x \, \ln|\ln|x|| + \frac{\tan x}{x \, \ln|x|} \right]$$

$y = \cosh^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$ (4)

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1}} \, \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,\sqrt{x-1}}$$

السؤال الثالث (16 درجة) : أحسب التكاملات التالية

$\int \frac{\csc^2\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} \, dx$ (1)

الحل :

$$\int \frac{\csc^2\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} \, dx = \int \csc^2\left(\sqrt{x}\right) \, \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2 \int \csc^2\left(\sqrt{x}\right) \, \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$$

$$= 2\left(-\cot\left(\sqrt{x}\right)\right) + c = -2\cot\left(\sqrt{x}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \csc^2\left(f(x)\right) \, f'(x) \, dx = -\cot\left(f(x)\right) + c$$

$\int \left(\pi^x + \frac{1}{e^{3x}}\right) dx$ (2)

الحل :

$$\int \left(\pi^x + \frac{1}{e^{3x}}\right) dx = \int \left(\pi^x + e^{-3x}\right) dx$$

$$= \int \pi^x \, dx + \left(\frac{1}{-3}\right) \int e^{-3x}(-3) \, dx = \frac{\pi^x}{\ln \pi} - \frac{e^{-3x}}{3} + c$$

باستخدام القانون $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ حيث $a > 0$

والقانون $\int e^{f(x)}\, f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$

$$(3)\quad \int_1^{\sqrt{2}} x\, 4^{-x^2}\, dx$$

الحل :

$$\int_1^{\sqrt{2}} x\, 4^{-x^2}\, dx = \frac{1}{-2}\int_1^{\sqrt{2}} 4^{-x^2}\,(-2x)dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{4^{-x^2}}{\ln 4}\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{2\ln 4}\left[4^{-2} - 4^{-1}\right] = -\frac{1}{2\ln 4}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2\ln 4}\left(-\frac{3}{16}\right)$$

$$= \frac{3}{32\ln 4} = \frac{3}{64\ln 2}$$

باستخدام القانون

$$\int a^{f(x)}\, f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c \quad \text{حيث } a > 0$$

$$(4)\quad \int \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}\, dx$$

الحل :

$$\int \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}\, dx = \int \frac{\left(x^2 + 1\right) - 1 + x}{x^2 + 1}\, dx$$

$$= \int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{x^2 + 1}\right) dx$$

$$= \int 1\, dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx$$

$$= x - \tan^{-1} x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right) + c$$

$$(5)\quad \int \frac{e^{4x}}{\sqrt{4 + e^{8x}}}\, dx$$

الحل :

$$\int \frac{e^{4x}}{\sqrt{4 + e^{8x}}}\, dx = \int \frac{e^{4x}}{\sqrt{(2)^2 + \left(e^{4x}\right)^2}}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{4\, e^{4x}}{\sqrt{(2)^2 + \left(e^{4x}\right)^2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\sinh^{-1}\left(\frac{e^{4x}}{2}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 + [f(x)]^2}}\, dx = \sinh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$(6) \quad \int 3^x \tanh(3^x)\ dx$$

الحل :

$$\int 3^x \tanh(3^x)\ dx = \frac{1}{\ln 3}\int \tanh(3^x)\ \ (3^x \ln 3)\ dx = \frac{1}{\ln 3}\ \ln|\cosh(3^x)| + c$$

باستخدام القانون

$$\int \tanh(f(x))\ f'(x)\, dx = \ln|\cosh(f(x))| + c$$

$$(7) \quad \int \frac{\sinh x}{16 - \cosh^2 x}\, dx$$

الحل :

$$\int \frac{\sinh x}{16 - \cosh^2 x}\, dx = \int \frac{\sinh x}{(4)^2 - (\cosh x)^2}\, dx = \frac{1}{4}\tanh^{-1}\left(\frac{\cosh x}{4}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{a^2 - [f(x)]^2}\, dx = \frac{1}{a}\ \tanh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$ حيث $|f(x)| < a$

$$(8) \quad \int x\ (x+5)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

الحل : بوضع $(x+5)^{\frac{1}{2}} = u \implies x + 5 = u^2 \implies x = u^2 - 5$

$$dx = 2u\, du$$

$$\int x\ (x+5)^{\frac{1}{2}}\ dx = \int \left(u^2 - 5\right)\ u\, 2u\, du = \int \left(2u^4 - 10u^2\right)\ du$$

$$= 2\left(\frac{u^5}{5}\right) - 10\left(\frac{u^3}{3}\right) + c = \frac{2}{5}\,(x+5)^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3}\,(x+5)^{\frac{3}{2}} + c$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1442 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

الجزء الأول (7 درجات) :

(1) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 4x - x^2$ على الفترة $[0, 3]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\, dx$

حيث $f(x) = 4x - x^2$ و $[a, b] = [0, 3]$

$$(3-0)\ \left(4c - c^2\right) = \int_0^3 \left(4x - x^2\right)\ dx$$

$$3\left(4c - c^2\right) = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \left(2(9) - \frac{27}{3}\right) - (0-0) = 18 - 9 = 9$$

$$3\left(4c - c^2\right) = 9 \implies 4c - c^2 = 3 \implies c^2 - 4c + 3 = 0$$

$$\implies (c-3)(c-1) = 0 \implies c = 1\ ,\ c = 3$$

لاحظ أن $c = 1 \in (0,3)$ ، بينما $c = 3 \notin (0,3)$.

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\ln|x|} \sin(t)\ dt$ حيث $x > 0$.

الحل : $F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{\frac{1}{x}}^{\ln|x|} \sin(t)\ dt$

$$= \sin\left(\ln|x|\right)\ \frac{1}{x} - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\sin\left(\ln|x|\right)}{x} + \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

(3) جد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = \left(1 - \sinh^{-1} x\right)^x$.

الحل : $\ln|f(x)| = \ln\left|\left(1 - \sinh^{-1} x\right)^x\right| = x\ \ln\left|1 - \sinh^{-1} x\right|$

بإشتقاق الطرفين بالنسبة للمتغير x :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (1)\ \ln\left|1 - \sinh^{-1} x\right| + x\ \frac{\left(0 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{1 - \sinh^{-1} x}$$

$$f'(x) = f(x)\ \left[\ln\left|1 - \sinh^{-1} x\right| - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}\ \left(1 - \sinh^{-1} x\right)}\right]$$

$$f'(x) = \left(1 - \sinh^{-1} x\right)^{x} \left[\ln\left|1 - \cosh^{-1} x\right| - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}\ \left(1 - \sinh^{-1} x\right)}\right]$$

الجزء الثاني (16 درجة) : أحسب التكاملات التالية :

$$(1)\quad \int \frac{5^{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx$$

الحل :

$$\int \frac{5^{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx = \int 5^{\tan x}\, \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int 5^{\tan x}\ \sec^2 x\, dx = \frac{5^{\tan x}}{\ln 5} + c$$

باستخدام القانون $\int a^{f(x)} f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$ حيث $a > 0$

$$(2)\quad \int x^{-\frac{1}{2}}\ csch^2\left(\sqrt{x}\right)\ dx$$

الحل :

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\ csch^2\left(\sqrt{x}\right)\ dx = 2\int csch^2\left(\sqrt{x}\right)\ \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ dx = 2\left(-\coth\left(\sqrt{x}\right)\right) + c$$

$$= -2\coth\left(\sqrt{x}\right) + c$$

باستخدام القانون $\int csch^2\left(f(x)\right)\ f'(x)\, dx = -\coth\left(f(x)\right) + c$

$$(3)\quad \int \sin^3 x\ \cos^5 x\, dx$$

الحل :

$$\int \sin^3 x\ \cos^5 x\, dx = \int \sin^2 x\ \cos^5 x\ \sin x\, dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)\ \cos^5 x\ \sin x\, dx$$

بوضع $u = \cos x$

$$du = -\sin x\, dx \implies -du = \sin x\, dx$$

$$\int \left(1 - \cos^2 x\right)\ \cos^5 x\ \sin x\, dx = \int \left(1 - u^2\right)\ u^5\ (-1)\, du$$

$$= -\int \left(u^5 - u^7\right)\ du = -\left(\frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8}\right) + c = -\frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\cos^8 x}{8} + c$$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^6}}$

الحل :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^6}} = \int \frac{1}{x\sqrt{1+(x^3)^2}}\, dx = \int \frac{x^2}{(x.x^2)\,\sqrt{1+(x^3)^2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3\sqrt{1+(x^3)^2}}\, dx = \frac{1}{3}\left(-csch^{-1}\left(x^3\right)\right) + c = -\frac{1}{3}\, csch^{-1}\left(x^3\right) + c$$

باستخدام القانون $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2+[f(x)]^2}}\, dx = -\frac{1}{a}\, csch^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$ حيث $a > 0$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\, dx$

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

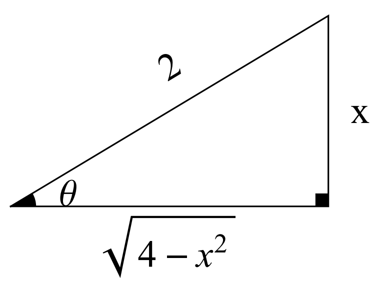
ضع $x = 2\sin\theta \implies \sin\theta = \dfrac{x}{2}$

$dx = 2\cos\theta\, d\theta$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\, dx = \int \frac{2\cos\theta}{(2\sin\theta)^2\,\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}}\, d\theta = \int \frac{2\cos\theta}{4\sin^2\theta\,\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\, d\theta$$

$$= \int \frac{2\cos\theta}{4\sin^2\theta\,\sqrt{4\left(1-\sin^2\theta\right)}}\, d\theta = \int \frac{2\cos\theta}{4\sin^2\theta\,\sqrt{4\cos^2\theta}}\, d\theta = \int \frac{2\cos\theta}{4\sin^2\theta\, 2\cos\theta}\, d\theta$$

$$= \int \frac{1}{4\sin^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{4}\int \csc^2\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\left(-\cot\theta\right) + c = -\frac{1}{4}\,\cot\theta + c$$



من المثلث نجد أن : $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\, dx = -\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c$$

(6) $\int \frac{x-8}{x^3+4x}\,dx$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-8}{x^3+4x} = \frac{x-8}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$x-8 = A(x^2+4) + (Bx+C)x$$

$$x-8 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$$

$$x-8 = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lll} A+B=0 & \longrightarrow & (1) \\ C=1 & \longrightarrow & (2) \\ 4A=-8 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (3) نجد أن : $A=-2$

من المعادلة (1) نجد أن : $B=2 \quad -2+B=0 \implies$

$$\int \frac{x-8}{x^3+4x}\,dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+4} \right)\,dx$$

$$= -2\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= -2\ln|x| + \ln\left(x^2+4\right) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

الجزء الثالث (17 درجة) :

(1) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

الحل :

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) \quad (\infty - \infty)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x\,\sin x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x\,\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{1+1-0}=0$$

(2) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ متقارباً أم متباعداً .

الحل :

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\tan^{-1}(e^x)\right]_0^t=\lim_{t\to\infty}\left[\tan^{-1}\left(e^t\right)-\tan^{-1}(1)\right]=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

التكامل المعتل متقارب وقيمته $\frac{\pi}{4}$.

(3) أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=1-x^2$ و $y=x^2-1$ وأحسب مساحتها .

الحل :

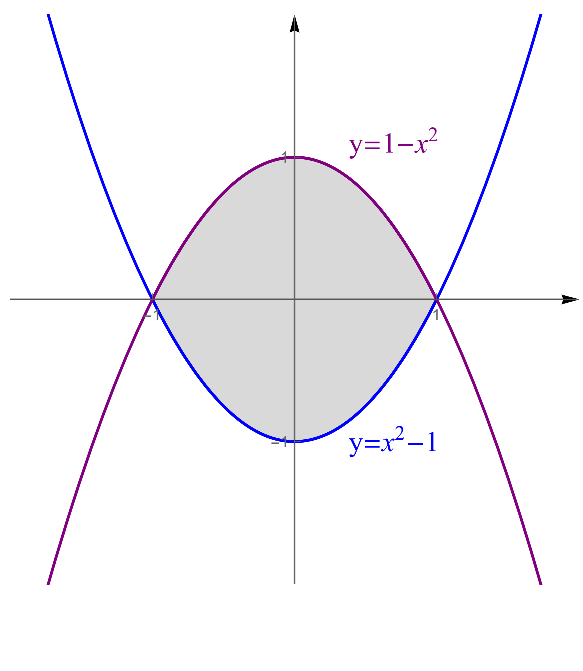
المنحنى $y=x^2-1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,-1)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y=1-x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,1)$ وفتحته للأسفل .

إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y=x^2-1$ و $y=1-x^2$:

$$x^2-1=1-x^2 \implies 2x^2-2=0 \implies 2(x^2-1)=0 \implies x^2-1=0$$

$$\implies (x-1)(x+1)=0 \implies x=-1\ ,\ x=1$$



$$\text{A} = \int_{-1}^{1} \left[(1-x^2)-(x^2-1)\right]\, dx = \int_{-1}^{1} \left(2-2x^2\right)\, dx = \left[2x - 2\,\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(2-\frac{2}{3}\right) - \left(-2+\frac{2}{3}\right) = 2-\frac{2}{3}+2-\frac{2}{3} = 4-\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

(4) جد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2 + 1$ و $y = 3x + 1$ حول محور x .

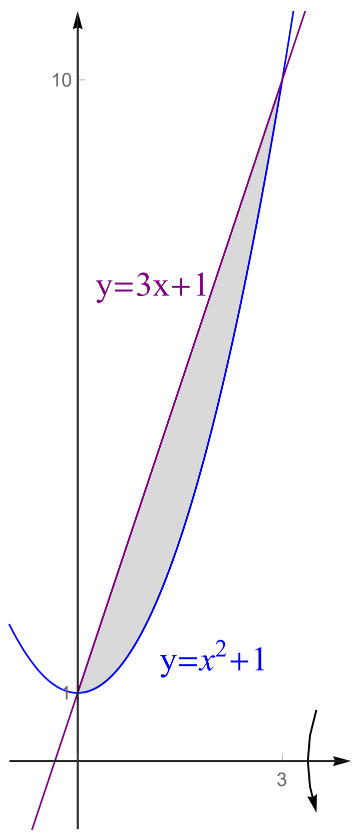
الحل :

$y = x^2 + 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 1)$ وفتحته للأعلى .

$y = 3x + 1$ يمثل خط مستقيم يمر بالنقطة $(0, 1)$ وميله 3 .

إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2 + 1$ و $y = 3x + 1$:

$$x^2 + 1 = 3x + 1 \implies x^2 - 3x = 0 \implies x(x-3) = 0 \implies x = 0\,,\ x = 3$$



باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^3 \left[(3x+1)^2 - (x^2+1)^2\right] \, dx = \pi \int_0^3 \left[\left(9x^2+6x+1\right) - \left(x^4+2x^2+1\right)\right] \, dx$$

$$= \pi \int_0^3 \left(-x^4+7x^2+6x\right) \, dx = \pi \left[-\frac{x^5}{5} + 7\,\frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_0^3$$

$$= \pi \left[\left(-\frac{3^5}{5} + 7\,\frac{3^3}{3} + 3(3^2)\right) - (0+0+0)\right] = \pi \left(-\frac{243}{5} + 63 + 27\right) = \frac{207\,\pi}{5}$$

(5) جد طول المنحنى $y = \sqrt{9-x^2}$ من $x = -3$ إلى $x = 3$.

الحل :

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$L = \int_{-3}^{3} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2} \, dx = \int_{-3}^{3} \sqrt{1 + \frac{x^2}{9-x^2}} \, dx = \int_{-3}^{3} \sqrt{\frac{9-x^2+x^2}{9-x^2}} \, dx$$

$$= \int_{-3}^{3} \sqrt{\frac{9}{9-x^2}} \, dx = \int_{-3}^{3} \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} \, dx = 3 \int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{(3)^2 - x^2}} \, dx = 3 \left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_{-3}^{3}$$

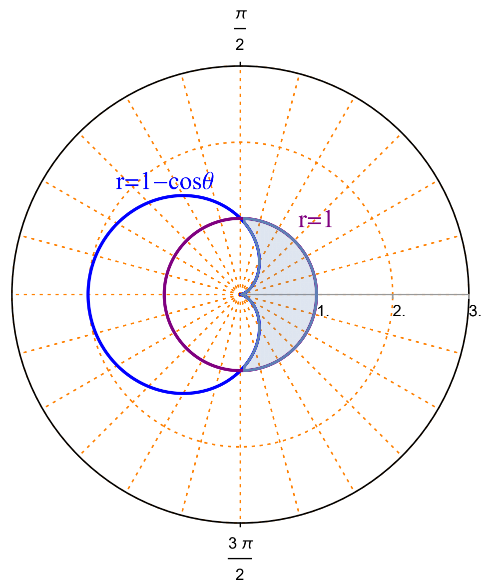
$$= 3 \left[\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)\right] = 3 \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 3\pi$$

(6) جد مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 1$ وخارج المنحنى $r = 1 - \cos\theta$.

الحل :

المنحنى $r = 1 - \cos\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 1$ يمثل دائرة مركزها القطب ، ونصف قطرها 1 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 1$ مع المنحنى $r = 1 - \cos\theta$:

$$1 - \cos\theta = 1 \implies -\cos\theta = 0 \implies \cos\theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2} \ , \ \theta = \frac{3\pi}{2}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(1)^2 - (1-\cos\theta)^2\right] d\theta\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta\right)\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2\cos\theta - \cos^2\theta\right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2\cos\theta - \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos\theta - \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \left[2\sin\theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\sin(\pi)\right) - \left(2\sin(0) - 0 - \frac{1}{4}\sin(0)\right)$$

$$= \left(2 - \frac{\pi}{4} - 0\right) - (0 - 0 - 0) = 2 - \frac{\pi}{4}$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1442 هـ
حل الاختبار الفصلي
د. طارق عبدالرحمن محمّد الفاضل

السؤال الأول (6 درجات) :

(1) استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل $\int_{-1}^{4} (2x+1)\, dx$

الحل :

$$f(x) = 2x+1 \, , [a,b] = [-1,4]$$

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-(-1)}{n} = \frac{5}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = -1 + k\left(\frac{5}{n}\right) = -1 + \frac{5k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right) \Delta_x = \sum_{k=1}^{n} f\left(-1+\frac{5k}{n}\right)\left(\frac{5}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[2\left(-1+\frac{5k}{n}\right)+1\right]\left(\frac{5}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(-2+\frac{10k}{n}+1\right)\left(\frac{5}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(-1+\frac{10k}{n}\right)\left(\frac{5}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-5}{n}+\frac{50k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{-5}{n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{50k}{n^2}$$

$$= \frac{-5}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{50}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{-5}{n}\,(n) + \frac{50}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = -5 + 25\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\int_{-1}^{4} (2x+1)\, dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(-5+25\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = -5+25(1) = -5+25 = 20$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 4x - x^2$ على الفترة $[0,3]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\, dx$

حيث $f(x) = 4x - x^2$ و $[a,b] = [0,3]$

$$(3-0)\;\left(4c-c^2\right) = \int_0^3 \left(4x-x^2\right)\; dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$3\left(4c-c^2\right)=\left[2(3^2)-\frac{3^3}{3}\right]-\left[2(0^2)-\frac{0^3}{3}\right]=18-9=9$$

$$\Longrightarrow\ 3\left(4c-c^2\right)=9\ \Longrightarrow\ 4c-c^2=3\ \Longrightarrow\ c^2-4c+3=0$$

$$\Longrightarrow\ (c-1)(c-3)=0\ \Longrightarrow\ c=1\ ,\ c=3$$

لاحظ أن $c=1\in(0,3)$ بينما $c=3\notin(0,3)$

(3) جد $F'(0)$ إذا كانت $F(x)=\displaystyle\int_{3x}^{3x^2+1}\frac{t}{4+t^2}\,dt$

الحل :

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{3x}^{3x^2+1}\frac{t}{4+t^2}\,dt=\frac{3x^2+1}{4+\left(3x^2+1\right)^2}\,(6x)-\frac{3x}{4+(3x)^2}\,(3)$$

$$=\frac{6x\left(3x^2+1\right)}{4+\left(3x^2+1\right)^2}-\frac{9x}{4+(3x)^2}$$

$$F'(0)=\frac{6(0)\left(3(0)^2+1\right)}{4+\left(3(0)^2+1\right)^2}-\frac{9(0)}{4+(3(0))^2}=0-0=0$$

السؤال الثاني (8 درجات) : أحسب $\dfrac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y=5^x\ \cos^{-1}\left(e^{2x}\right)$

الحل :

$$\frac{dy}{dx}=(5^x\ \ln 5)\ \cos^{-1}\left(e^{2x}\right)+5^x\left(\frac{-1}{\sqrt{1-\left(e^{2x}\right)^2}}\ \left(e^{2x}\,2\right)\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=5^x\ln 5\ \cos^{-1}\left(e^{2x}\right)-\frac{5^x\ \left(2e^{2x}\right)}{\sqrt{1-e^{4x}}}$$

(2) $y=\sqrt[3]{x}\ \log_7\left|4+\sec(2x^2)\right|$

الحل :

$$y=x^{\frac{1}{3}}\ \log_7\left|4+\sec(2x^2)\right|$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}\right)\ \log_7\left|4+\sec(2x^2)\right|+x^{\frac{1}{3}}\ \left(\frac{(4x)\sec(2x^2)\ \tan(2x^2)}{4+\sec(2x^2)}\ \frac{1}{\ln 7}\right)$$

$$= \frac{\log_7 \left|4+\sec(2x^2)\right|}{3x^{\frac{2}{3}}} + \frac{4x^{\frac{4}{3}}\ \sec(2x^2)\ \tan(2x^2)}{\ln 7\,(4+\sec(2x^2))}$$

$y = (\sin x)^{\cot x}$ (3)

الحل :

$$y = (\sin x)^{\cot x} \implies \ln|y| = \ln\left|(\sin x)^{\cot x}\right| = \cot x\ \ln|\sin x|$$

بإشتقاق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = -\csc^2 x\ \ln|\sin x| + \cot x\ \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$y' = y\ \left[-\csc^2 x\ \ln|\sin x| + \cot x\ \cot x\right]$$

$$y' = (\sin x)^{\cot x}\ \left[-\csc^2 x\ \ln|\sin x| + \cot^2 x\right]$$

$y = \sinh^{-1}(\ln|x|)$ (4)

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+(\ln|x|)^2}}\ \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln^2|x|}}$$

السؤال الثالث (16 درجة) : أحسب التكاملات التالية

$\int \frac{\sec^2\left(\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{2x}}\ dx$ (1)

الحل :

$$\int \frac{\sec^2\left(\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{2x}}\ dx = \int \sec^2\left(\sqrt{2x}\right)\ \frac{1}{\sqrt{2x}}\ dx = \tan\left(\sqrt{2x}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \sec^2(f(x))\ f'(x)\ dx = \tan(f(x)) + c$$

$\int \left(3^x + \frac{1}{e^{-2x}}\right)\ dx$ (2)

الحل :

$$\int \left(3^x + \frac{1}{e^{-2x}}\right)\,dx = \int \left(3^x + e^{2x}\right)\,dx$$

$$= \int 3^x\,dx + \frac{1}{2}\int e^{2x}(2)\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{2}\,e^{2x} + c$$

باستخدام القانون $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$ حيث $a > 0$

والقانون $\int e^{f(x)}\,f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$

(3) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} x\,9^{-x^2}\,dx$

الحل :

$$\int_1^{\sqrt{3}} x\,9^{-x^2}\,dx = \frac{1}{-2}\int_1^{\sqrt{3}} 9^{-x^2}\,(-2x)dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{9^{-x^2}}{\ln 9}\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1}{2\ln 9}\left[9^{-3} - 9^{-1}\right] = -\frac{1}{2\ln 9}\left(\frac{1}{9^3} - \frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{2\ln 9}\left(\frac{1-9^2}{9^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\ln 3}\left(\frac{1-81}{9^3}\right) = -\frac{1}{4\ln 3}\ \left(\frac{-80}{9^3}\right) = \frac{20}{9^3\ \ln 3}$$

باستخدام القانون

$\int a^{f(x)}\,f'(x)\,dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$ حيث $a > 0$

(4) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x+1}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{x+3}{x+1}\,dx = \int \frac{(x+1)+2}{x+1}\,dx = \int \left(\frac{x+1}{x+1} + \frac{2}{x+1}\right)\,dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)\,dx = \int dx + 2\int \frac{1}{x+1}\,dx = x + 2\ln|x+1| + c$$

(5) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{9+e^{4x}}}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{9+e^{4x}}}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{(3)^2+\left(e^{2x}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\,e^{2x}}{\sqrt{(3)^2+\left(e^{2x}\right)^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{e^{2x}}{3}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2+\left[f(x)\right]^2}}\,dx = \sinh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$\int 5^{2x}\tanh\left(5^{2x}\right)\,dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int 5^{2x}\tanh\left(5^{2x}\right)\,dx = \frac{1}{2\,\ln 5}\int \tanh\left(5^{2x}\right)\;\left(5^{2x}\,2\ln 5\right)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\ln 5}\;\ln\left|\cosh\left(5^{2x}\right)\right| + c$$

باستخدام القانون

$$\int \tanh\left(f(x)\right)\;f'(x)\,dx = \ln\left|\cosh\left(f(x)\right)\right| + c$$

$$\int \frac{\cosh x}{16-\sinh^2 x}\,dx \quad (7)$$

الحل :

$$\int \frac{\cosh x}{16-\sinh^2 x}\,dx = \int \frac{\cosh x}{(4)^2-\left(\sinh x\right)^2}\,dx = \frac{1}{4}\tanh^{-1}\left(\frac{\sinh x}{4}\right) + c$$

باستخدام القانون

$|f(x)| < a$ حيث $$\int \frac{f'(x)}{a^2-\left[f(x)\right]^2}\,dx = \frac{1}{a}\;\tanh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$\int (x-1)\;(x+5)^{\frac{1}{2}}\,dx \quad (8)$$

الحل : بوضع $x+5=u \implies x=u-5 \implies x-1=u-6$

$$dx = du$$

$$\int (x-1)\;(x+5)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int (u-6)\,u^{\frac{1}{2}}\,du = \int \left(u^{\frac{3}{2}}-6u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 6\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}\,u^{\frac{5}{2}} - 4\,u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}\,(x+5)^{\frac{5}{2}} - 4\,(x+5)^{\frac{3}{2}} + c$$