جامعة الملك سعود	**كلية العلوم**	**قسم الرياضيات**
الاختبار الفصلي	الفصل الثاني 1444 هـ	481 ريض

اجب عن الأسئلة التالية:

السؤال 1 : (تسع درجات)

1. أعط مثالاً لدالة $f \notin \mathcal{R}(a,b)$ بينما $|f| \in \mathcal{R}(a,b)$. [1]

2. إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ ، فأثبت أن $f \in \mathcal{R}(a,b)$. [3]

3. احسب النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2k}{k^2+n^2}$. [2]

4. اذكر نص نظرية القيمة المتوسطة للتكامل وبرهنها . [3]

السؤال 2 : (ست درجات)

1. اذكر نص النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل. [2]

2. إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ وكان $\int_x^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$ لكل $x \in [a,b]$ ، أثبت أن $f(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$. [2]

3. ادرس تقارب التكامل المعتل $\int_0^\infty e^{-x^3}dx$. [2]

السؤال 3 : (8 درجات)

1. عرف التقارب المنتظم لمتتالية الدوال (f_n) إلى الدالة f على $D \subset \mathbb{R}$. [1]

2. إذا كانت $f_n \in \mathcal{R}(a,b)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكانت متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام إلى الدالة f على الفترة المحدودة والمغلقة $[a,b]$ وكانت $f \in \mathcal{R}(a,b)$ ،
أثبت أن $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$. [2]

3. ادرس التقارب المنتظم لمتتالية الدوال (f_n) فيما يلي :

(i) $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1+x^n}$ على $[0,1]$. [2]

(ii) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$ على $[0,\infty)$. [3]

السؤال 4 : (7 درجات)

1. ادرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+n^3+n}}$ على $\mathbb{R}$. [2]

2. ادرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x|+n}$ على $\mathbb{R}$. [3]

3. أذكر نص اختبار آبل للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال . [2]

السؤال 5 : (سؤال إضافي : 4 درجات)

1. إذا كانت $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة ، احسب (مع تبرير الإجابة) :
$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$. [2]

2. ادرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2\, e^{-nx}$ على $[0,\infty)$. [2]