481 ريض - التحليل الحقيقي (2)
حل الاختبار الفصلي - الفصل الثاني 1444 هـ
د. طارق بن عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

السؤال الأول : (9 درجات)

1. أعط مثالاً لدالة $f \notin \mathcal{R}(a,b)$ بينما $|f| \in \mathcal{R}(a,b)$. [1]

الحل : الدالة $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1 & , \quad x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases}$ غير قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[0,1]$.

بينما $|f| = 1 \in \mathcal{R}(0,1)$ لأنها دالة متصلة .

2. إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ ، فأثبت أن $f \in \mathcal{R}(a,b)$. [3]

الحل : لتكن $\epsilon > 0$ ، المطلوب إيجاد $P \in \mathcal{P}(a,b)$ بحيث يحقق $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$.

بما أن الدالة f متصلة على الفترة المتراصة $[a,b]$ فإن الدالة f متصلة بانتظام على الفترة $[a,b]$ ،

وبالتالي يوجد $\delta > 0$ (لا تعتمد على x) بحيث يتحقق

$$x, y \in [a,b]\,,\ |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

ليكن $P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$ أي تجزئ للفترة $[a,b]$ بحيث $\|P\| < \delta$ ،

الدالة f متصلة على أي فترة جزئية $[x_i, x_{i+1}]$ لكل $0 \le i \le n-1$ ، وبالتالي فهي تحقق قيمتيها العظمى والصرى على أي فترة جزئية ، أي يوجد $u_i, v_i \in [x_i, x_{i+1}]$ بحيث يكون $m_i = f(u_i)$ و $M_i = f(v_i)$

بما أن $|u_i - v_i| < |x_i - x_{i+1}| \le \|P\| < \delta$

فإن $M_i - m_i = f(v_i) - f(u_i) = |f(v_i) - f(u_i)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$

الآن $U(f,P) - L(f,p) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{b-a}(x_{i+1} - x_i) = \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon$$

أي أن $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$ وبالتالي $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

3. احسب النهاية $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{k^2+n^2}$. [2]

الحل : $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{k^2+n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{\frac{k^2}{n^2}+1}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\left(\frac{k}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}=\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2)-0=\ln 2$$

4. اذكر نص نظرية القيمة المتوسطة للتكامل وبرهنها . [3]

الحل : نص النظرية

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ فإنه يوجد $c\in(a,b)$ بحيث

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a) .$$

البرهان :

أولاً - إذا كانت الدالة f ثابتة ، فإن النظرية متحققة لأي نقطة $c\in(a,b)$.

ثانياً - إذا كانت الدالة f ليست ثابتة ، فبما أنها متصلة على الفترة المتراصة $[a,b]$ فإنها تحقق قيمتيها العظمى والصغرى على $[a,b]$ ، أي يوجد $u,v\in[a,b]$ بحيث $f(u)=m\le f(x)\le f(v)=M$ لكل $x\in[a,b]$.

بما أن الدالة f ليست ثابتة ، فإنه يوجد $s\in[a,b]$ بحيث $f(s)>m$ ، ويوجد $t\in[a,b]$ بحيث $f(t)<M$ ، وبالتالي $\int_a^b M\,dx ,\int_a^b f(x)\,dx<\int_a^b m\,dx$

$$m(b-a)<\int_a^b f(x)\,dx<M(b-a)\implies m=f(u)<\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}<M=f(v)$$

بما أن الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ فمن نظرية القيمة البينية يوجد c يقع بين u و v وبالتالي $c\in(a,b)$ بحيث

$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\implies\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a) .$$

السؤال الثاني : (6 درجات)

1. اذكر نص النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل. [2]

الحل : إذا كانت الدالة F قابلة للإشتقاق على الفترة $[a,b]$ وكانت $F' \in \mathcal{R}(a,b)$ فإن

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) \,.$$

2. إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ وكان $\int_x^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$ لكل $x \in [a,b]$ ، أثبت أن $f(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$. [2]

الحل : بما أن الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ فإن $\int_a^x f(t)\,dt$ و $\int_x^b f(t)\,dt$ قابلتان للإشتقاق على $[a,b]$.

بإشتقاق $\int_x^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$ بالنسبة للمتغير x نجد أن

$f(x) = 0 - f(x) \implies 2f(x) = 0 \implies f(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$.

3. ادرس تقارب التكامل المعتل $\int_0^\infty e^{-x^3}dx$. [2]

الحل : $\int_0^\infty e^{-x^3}dx = \int_0^1 e^{-x^3}dx + \int_1^\infty e^{-x^3}dx$

على الفترة $[0,1]$: الدالة e^{-x^3} تناقصية وبالتالي $\int_0^1 e^{-x^3}dx < \int_0^1 e^0 dx = 1 < \infty$.

على الفترة $[1,\infty)$: $e^{x^3} \geq 1 + x^3 > x^3$ وبالتالي $\int_1^\infty e^{-x^3}dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx < \infty$

أي أن التكامل المعتل $\int_0^\infty e^{-x^3}dx$ متقارب .

السؤال الثالث : (8 درجات)

1. عرف التقارب المنتظم لمتتالية الدوال (f_n) إلى الدالة f على $D \subset \mathbb{R}$. [1]

الحل : نقول أن متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام إلى الدالة f ، إذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ (لا يعتمد على x) بحيث : $n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ ، لكل $x \in D$.

أو بصيغة أخرى : $\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$.

2. إذا كانت $f_n \in \mathcal{R}(a,b)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكانت متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام إلى الدالة f على الفترة المحدودة والمغلقة $[a,b]$ وكانت $f \in \mathcal{R}(a,b)$ ،

أثبت أن $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. [2]

الحل : المطلوب إثبات أن لكل $\epsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث :

$$n \geq N \implies \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \epsilon$$

لتكن $\epsilon > 0$ ، بما أن متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام إلى الدالة f على الفترة المحدودة والمغلقة $[a,b]$

فإنه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث : $n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$ ، لكل $x \in [a,b]$.

$$n \geq N \implies \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,dx = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon$$

وبالتالي $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

3. ادرس التقارب المنتظم لمتتالية الدوال (f_n) فيما يلي :

(i) $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1+x^n}$ على $[0,1]$. [2]

الحل : دراسة التقارب النقطي :

على الفترة $[0,1)$: $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1+x^n} \longrightarrow \dfrac{1-0}{1+0} = 1$.

عندما $x = 1$: $f_n(1) = \dfrac{1-1}{1+1} = 0 \longrightarrow 0$.

أي أن : $f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in [0,1) \\ 0 & , \quad x = 1 \end{cases}$

لاحظ أن $f_n(x)$ متصلة لكل $x \in [0,1]$ ولكل $n \in \mathbb{N}$ ، بينما $f(x)$ غير متصلة عند $x = 1$.

وبالتالي التقارب ليس منتظماً .

(ii) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$ على $[0,\infty)$. [3]

الحل : دراسة التقارب النقطي :

عندما $x=0$: $1 \longrightarrow 1 = \dfrac{1}{1+0} = f_n(0)$.

على الفترة $(0,\infty)$: $0 \longrightarrow \dfrac{1}{1+nx^2} = f_n(x)$.

أي أن :
$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x=0 \\ 0 & , \quad x \in (0,\infty) \end{cases}$$

لاحظ أن $f_n(x)$ متصلة لكل $x \in [0,\infty)$ ولكل $n \in \mathbb{N}$ ، بينما $f(x)$ غير متصلة عند $x=0$.

وبالتالي التقارب ليس منتظماً .

حل آخر :
$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)-f(x)| \geq \sup_{x\in(0,\infty)} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{1}{1+nx^2}$$
$$\geq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{1+n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = \frac{1}{1+n\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad (\neq 0)$$

وبالتالي التقارب ليس منتظماً .

السؤال الرابع : (7 درجات)

1. ادرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+n^3+n}}$ على $\mathbb{R}$. [2]

الحل : لكل $x \in \mathbb{R}$ فإن
$$\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+n^3+n}}\right| < \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = M_n$$

بما أن المتسلسلة العددية $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ متقاربة (لأن $p = \dfrac{3}{2} > 1$) فمن اختبار فايرشتراس للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال ، نجد أن متسلسلة الدوال $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+n^3+n}}$ تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$.

2. ادرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x|+n}$ على $\mathbb{R}$. [3]

الحل :

(1) لتكن $u_n(x) = (-1)^n$ ، عندئذ

$\sum_{k=1}^{n} (-1)^n \leq 1$ $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_n(x) =$ ، لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكل $n \in \mathbb{N}$.

أي أن متتالية المجاميع الجزئية $(U_n(x))$ محدودة .

(2) لتكن $v_n(x) = \frac{1}{|x|+n}$ ، لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكل $n \in \mathbb{N}$ فإن :

$v_{n+1}(x) = \frac{1}{|x|+(n+1)} < \frac{1}{|x|+n} = v_n(x)$ ، أي أن متتالية الدوال $(v_n(x))$ تناقصية .

لكل $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq |v_n(x)| = \frac{1}{|x|+n} \leq \frac{1}{n}$

أي أن متتالية الدوال $(v_n(x))$ تتقارب بانتظام إلى الصفر .

من اختبار ديرشلية للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x|+n}$ تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$.

3. أذكر نص اختبار آبل للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال . [2]

الحل : نص اختبار آبل للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين من الدوال الحقيقية المعرفة على $D \subset \mathbb{R}$ وتحققان :

(i) $\sum u_n$ متقاربة بانتظام على D .

(ii) المتتالية (v_n) محدودة بانتظام ومتناقصة على D .

عندئذ المتسلسلة $\sum u_n v_n$ متقاربة بانتظام على D .